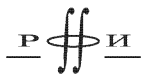


УДК 530.1
ББК 22.31
В 14



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 04-02-30035д*

Вайнберг С. **Квантовая теория поля.** Т. 2. Современные приложения / Пер. с англ.; Под ред. В.Ч. Жуковского. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 528 с. — ISBN 5-9221-0404-7.

Книга выдающегося американского ученого лауреата Нобелевской премии С. Вайнберга «Квантовая теория поля» представляет собой современный курс квантовой теории поля, охватывающий как основные положения этой области теоретической физики, так и многочисленные новые идеи и современные методы, разработанные в последние годы. Во втором томе дается современное изложение методов квантовой теории поля, показывается, как применение этих методов привело к пониманию слабых, сильных и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц. Современные математические методы преподносятся в сочетании с их применениями в теории элементарных частиц и теории конденсированного состояния вещества. При этом большое внимание уделяется таким вопросам, как обобщенная BRST-симметрия, метод фонового поля, метод эффективного поля в применении к теории спонтанного нарушения симметрии, метод операторного разложения, сверхпроводимость, теория критических явлений и др. Изложение сопровождается многочисленными задачами, помещенными в конце каждой главы.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, занимающихся проблемами квантовой теории поля и физики элементарных частиц.

ISBN 5-9221-0404-7 (русск.)

ISBN 0-521-55002-5 (англ.)

© Cambridge University Press, 2001

© ФИЗМАТЛИТ, 2003

Содержание

Г л а в а 15. Неабелевы калибровочные теории	7
§ 15.1. Калибровочная инвариантность	8
§ 15.2. Лагранжианы калибровочной теории и простые груп- пы Ли	14
§ 15.3. Уравнения поля и законы сохранения	20
§ 15.4. Квантование	22
§ 15.5. Метод Фаддеева–Попова–де Витта	27
§ 15.6. Духи	33
§ 15.7. БРСТ-симметрия	36
§ 15.8. Обобщения БРСТ-симметрии	46
§ 15.9. Формализм Баталина–Вильковыского	51
Приложение А. Теорема об алгебрах Ли	60
Приложение В. Классификация Картана	65
Задачи	69
Литература	70
Г л а в а 16. Метод внешнего поля	74
§ 16.1. Квантовое эффективное действие	74
§ 16.2. Вычисление эффективного потенциала	80
§ 16.3. Энергетическая интерпретация	83
§ 16.4. Симметрии эффективного действия	86
Задачи	89
Литература	90
Г л а в а 17. Перенормировки калибровочных теорий	91
§ 17.1. Уравнение Зинн–Жюстена	91
§ 17.2. Перенормировка: прямой анализ	93
§ 17.3. Перенормировка: общие калибровочные теории	103
§ 17.4. Калибровка фонового поля	108

§ 17.5. Однопетлевое вычисление в калибровке фонового поля	113
Задачи	122
Литература	122
Г л а в а 18. Метод ренормализационной группы	124
§ 18.1. Как возникают большие логарифмы?	126
§ 18.2. Плавающий масштаб	132
§ 18.3. Типы асимптотического поведения	144
§ 18.4. Случай нескольких констант связи и массовые эффекты	154
§ 18.5. Критические явления	160
§ 18.6. Минимальное вычитание	164
§ 18.7. Квантовая хромодинамика	167
§ 18.8. Усовершенствованная теория возмущений	173
Задачи	175
Литература	175
Г л а в а 19. Спонтанно нарушенные глобальные симметрии	178
§ 19.1. Вырожденные вакуумы	178
§ 19.2. Голдстоуновские бозоны	183
§ 19.3. Спонтанное нарушение приближенных симметрий . . .	193
§ 19.4. Пионы как голдстоуновские бозоны	198
§ 19.5. Эффективные теории поля: пионы и нуклоны	209
§ 19.6. Эффективные теории поля: нарушенные симметрии об- щего вида	229
§ 19.7. Эффективные теории поля: $SU(3) \times SU(3)$	245
§ 19.8. Аномальные члены в эффективных теориях поля . . .	254
§ 19.9. Ненарушенные симметрии	259
§ 19.10. $U(1)$ -проблема	265
Задачи	268
Литература	269
Г л а в а 20. Операторные разложения	273
§ 20.1. Разложение: описание и вывод	274
§ 20.2. Поток импульса	277
§ 20.3. Уравнения ренормгруппы для коэффициентных функ- ций	284
§ 20.4. Свойства симметрии коэффициентных функций	286
§ 20.5. Правила сумм спектральных функций	288

§ 20.6. Глубоко неупругое рассеяние	294
§ 20.7. Ренормалоны	306
Приложение А. Общий случай асимптотики больших импульсов	311
Задачи	315
Литература	316
Г л а в а 21. Спонтанно нарушенные калибровочные симметрии	318
§ 21.1. Унитарная калибровка	318
§ 21.2. Перенормируемые ξ -калибровки	324
§ 21.3. Теория электрослабых взаимодействий	328
§ 21.4. Динамически нарушенные локальные симметрии	343
§ 21.5. Объединенная теория сильных и электрослабых взаимодействий	353
§ 21.6. Сверхпроводимость	357
Приложение. Общий случай унитарной калибровки	379
Задачи	380
Литература	381
Г л а в а 22. Аномалии	386
§ 22.1. Задача о распаде π^0	386
§ 22.2. Преобразование меры: абелева аномалия	389
§ 22.3. Прямое вычисление аномалий: общий случай	398
§ 22.4. Калибровочные теории, не содержащие аномалий	412
§ 22.5. Связанные состояния с нулевой массой	417
§ 22.6. Условия непротиворечивости	425
§ 22.7. Аномалии и голдстоуновские бозоны	437
Задачи	446
Литература	447
Г л а в а 23. Нелокальные полевые конфигурации	450
§ 23.1. Применение топологических методов	451
§ 23.2. Гомотопические группы	460
§ 23.3. Монополи	467
§ 23.4. Интегральный инвариант Картана–Маурера	478
§ 23.5. Инстантоны	483
§ 23.6. θ -угол	490

§ 23.7. Квантовые флуктуации около протяженных полевых конфигураций	497
§ 23.8. Распад ложного вакуума	500
Приложение А. Евклидовы интегралы по траекториям	505
Приложение В. Список гомотопических групп различных многообразий	509
Задачи	510
Литература	511
Предметный указатель	514
Именной указатель	521

НЕАБЕЛЕВЫ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

Все квантовые теории поля, успешно описывающие реальный мир, являются неабелевыми калибровочными теориями. Последние основаны на принципах калибровочной инвариантности, обобщающих обычную калибровочную $U(1)$ инвариантность, имеющую место в квантовой электродинамике. И КЭД, и теории, ее обобщающие, обладают одним весьма замечательным свойством, упомянутым в конце § 8.1: некоторые свойства и даже сам факт существования калибровочных полей могут быть выведены из принципа инвариантности лагранжиана при калибровочных преобразованиях. В электродинамике на поля $\psi_n(x)$, обладающие зарядом e_n , действуют калибровочные преобразования $\psi_n(x) \rightarrow \exp(ie_n\Lambda(x))\psi_n(x)$ с произвольным $\Lambda(x)$. Поскольку закон преобразования для $\partial_\mu\psi_n(x)$ отличается от соответствующего закона для $\psi_n(x)$, мы вынуждены ввести поле $A_\mu(x)$, такое что при калибровочных преобразованиях $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$. Введенное поле мы можем использовать для построения калибровочно-ковариантной производной $\partial_\mu\psi_n(x) - ie_nA_\mu(x)\psi_n(x)$, которая преобразуется точно так же, как и $\psi_n(x)$. Это позволяет использовать ее наряду с $\psi_n(x)$ для построения калибровочно-инвариантного лагранжиана. Точно так же существование и некоторые свойства гравитационного поля $g_{\mu\nu}(x)$ в общей теории относительности вытекают из свойств симметрии лагранжиана относительно координатных преобразований общего вида¹⁾. Учитывая эти замечательные примеры, довольно естественно обобщить явление локальной калибровочной инвариантности на случай локальных неабелевых калибровочных преобразований.

В оригинальной работе Янга и Миллса [1], вышедшей в 1954 г., в качестве неабелевой калибровочной группы была выбрана группа $SU(2)$ изотопических вращений спина, а векторные поля, выступающие аналогами фотонного поля, интерпретировались как поля сильно взаимодействующих векторных мезонов с изотопическим спином 1.

¹⁾ Конечно, и локальную калибровочную инвариантность, и ковариантность общего вида можно рассмотреть в тривиальном случае, когда A_μ и $g_{\mu\nu}$ являются нединамическими c -числовыми функциями, соответствующими некоторому выбору фазы или системы координат соответственно. Обе симметрии становятся физически значимыми, если $A_\mu(x)$ и $g_{\mu\nu}$ — динамические поля, по которым мы интегрируем, когда вычисляем элементы S -матрицы.

Предложенная гипотеза тут же столкнулась с несколькими трудностями. Во-первых, эти векторные мезоны должны были бы подобно фотонам иметь нулевую массу. Но такие частицы были бы уже обнаружены. Во-вторых, в то время представлялось абсолютно невозможным сделать какие-либо выводы из гипотезы (как и из любой другой теории с сильным взаимодействием), поскольку из-за большой константы связи теория возмущений оказывалась бессильной.

В дальнейшем калибровочные теории были обобщены на случай произвольных неабелевых калибровочных групп [2] и изучение их квантования было продолжено с математической точки зрения. В работах Фейнмана [3], Фаддеева и Попова [4], а также де Витта [5]. В некотором смысле это казалось просто упражнением на пути к более сложной задаче квантования общей теории относительности. В работах перечисленных авторов было показано, что правила Фейнмана, полученные непосредственно из исходного лагранжиана, должны быть дополнены “духовыми” петлями. Однако физическая значимость таких теорий оставалась непонятой до конца 1960-х годов. В конечном счете оказалось, что *все* наблюдаемые взаимодействия элементарных частиц описываются векторными полями, ассоциированными с локальными калибровочными симметриями. Соответствующие частицы, обладающие спином 1, являются либо очень тяжелыми вследствие спонтанного нарушения калибровочной симметрии, либо оказываются в “ловушке” в результате роста константы взаимодействия на больших расстояниях.

Эти два явления будут нами изучены в гл. 21 и 18 соответственно. В этой же главе мы займемся формулировкой и выводом правил Фейнмана для неабелевых калибровочных теорий.

§ 15.1. Калибровочная инвариантность

Мы предполагаем, что лагранжиан нашей теории инвариантен относительно некоторого набора инфинитезимальных преобразований полей материи $\psi_l(x)$

$$\delta\psi_l(x) = i\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_l^m\psi_m(x), \quad (15.1.1)$$

где t_α — набор независимых постоянных матриц¹⁾, а $\epsilon^\alpha(x)$ — вещественные инфинитезимальные параметры, которые (как и в случае

¹⁾ В этой книге в большинстве случаев мы будем приписывать генераторам симметрии индексы α, β и т.д. (начальные буквы греческого алфавита) для того, чтобы отличать эти индексы от индексов μ, ν и т.д. из середины греческого алфавита, которые будут использоваться для обозначения координат пространства-времени. Кроме того, работая с нарушенными симметриями, мы будем часто использовать начальные буквы

калибровочных преобразований в квантовой электродинамике) могут зависеть от положения в пространстве–времени. Мы предполагаем, что эти преобразования симметрии являются инфинитезимальной частью группы Ли. Как показано в § 2.2, это приводит к следующему требованию: t_α должны удовлетворять коммутационным соотношениям

$$[t_\alpha, t_\beta] = iC_{\alpha\beta}^\gamma t_\gamma, \quad (15.1.2)$$

где $C_{\alpha\beta}^\gamma$ — набор вещественных постоянных, называемых структурными константами группы. Из антисимметричности коммутатора сразу следует антисимметричность структурных констант:

$$C_{\alpha\beta}^\gamma = -C_{\beta\alpha}^\gamma. \quad (15.1.3)$$

Кроме того, из тождества Якоби

$$0 = [[t_\alpha, t_\beta], t_\gamma] + [[t_\gamma, t_\alpha], t_\beta] + [[t_\beta, t_\gamma], t_\alpha] \quad (15.1.4)$$

мы видим, что константы $C_{\alpha\beta}^\gamma$ удовлетворяют следующему условию:

$$0 = C_{\alpha\beta}^\delta C_{\delta\gamma}^\epsilon + C_{\gamma\alpha}^\delta C_{\delta\beta}^\epsilon + C_{\beta\gamma}^\delta C_{\delta\alpha}^\epsilon. \quad (15.1.5)$$

Любой набор констант $C_{\alpha\beta}^\gamma$, удовлетворяющих равенствам (15.1.3) и (15.1.5), определяет, по меньшей мере, один набор матриц t_α^A :

$$(t_\alpha^A)^\beta_\gamma \equiv -iC_{\alpha\gamma}^\beta. \quad (15.1.6)$$

Эти матрицы удовлетворяют коммутационному соотношению (15.1.2) со структурными константами $C_{\alpha\beta}^\gamma$

$$[t_\alpha^A, t_\beta^A] = iC_{\alpha\beta}^\gamma t_\gamma^A. \quad (15.1.7)$$

Подобные матрицы образуют так называемое “присоединенное” (или “регулярное”) представление алгебры Ли со структурными константами $C_{\beta\gamma}^\alpha$.

Например, в первоначальной теории Янга–Миллса поля материи представляли собой дублет, состоящий из полей протона ψ_p и нейтрона ψ_n :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

а t_α с $\alpha = 1, 2, 3$ представляли собой матрицы изоспина:

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

латинского алфавита a, b и т. д. в качестве индексов для обозначения генераторов спонтанно нарушенных симметрий, а буквы середины латинского алфавита i, j и т. д. — для обозначения генераторов ненарушенных симметрий.

Эти матрицы удовлетворяют коммутационному соотношению (15.1.2), причем

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta},$$

где, как обычно, элемент $\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$ равен $+1$ (или -1) в случае, если набор γ, α, β получается с помощью четной (или нечетной) перестановки цифр в наборе 1, 2, 3, и нулю во всех остальных случаях. Мы узнаем в этой конструкции алгебру Ли (2.4.18) группы трехмерных вращений. Совокупность же матриц t_{α} образует представление этой алгебры Ли, соответствующее спину $1/2$. Матрицы (15.1.6) присоединенного представления имеют следующий вид (мы нумеруем строки и столбцы числами 1, 2, 3):

$$t_1^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad t_2^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t_3^A = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что это есть представление алгебры Ли группы вращений, соответствующее спину 1.

Посмотрим теперь, что необходимо сделать для того, чтобы лагранжиан стал инвариантным относительно преобразований (15.1.1). Если бы он не зависел от производных полей, то задача была бы простой. В этом случае любая функция полей материи, инвариантная относительно преобразования (15.1.1) с постоянными параметрами ϵ^{α} , осталась бы инвариантной относительно преобразований, для которых ϵ^{α} — произвольные вещественные функции координат пространства-времени. Это, однако, не так, если лагранжиан содержит производные полей (как это и должно быть), поскольку в случае зависящих от координат параметров $\epsilon^{\alpha}(x)$ производные полей материи преобразуются отлично от самих полей. Дифференцируя выражение (15.1.1), получаем

$$\delta(\partial_{\mu}\psi_l(x)) = i\epsilon^{\alpha}(x)(t_{\alpha})_l^m(\partial_{\mu}\psi_m(x)) + i(\partial_{\mu}\epsilon^{\alpha}(x))(t_{\alpha})_l^m\psi_m(x). \quad (15.1.8)$$

Для того чтобы сделать лагранжиан инвариантным, необходимо ввести поле A_{μ}^{α} , правило преобразования которого содержит член $\partial_{\mu}\epsilon^{\alpha}$, позволяющий нам уничтожить второе слагаемое в правой части равенства (15.1.8). Поскольку это новое поле снабжено индексом α , мы также ожидаем, что оно подвержено матричному преобразованию, подобному (15.1.1), в котором однако t_{α} заменены матрицами присоединенного представления (15.1.6). В качестве правила преобразования этих новых “калибровочных” полей попробуем взять следующее:

$$\delta A_{\mu}^{\beta} = \partial_{\mu}\epsilon^{\beta} + i\epsilon^{\alpha}(t_{\alpha}^A)^{\beta}_{\gamma}A_{\mu}^{\gamma},$$

или, используя соотношение (15.1.6),

$$\delta A_{\mu}^{\beta} = \partial_{\mu}\epsilon^{\beta} + C_{\gamma\alpha}^{\beta}\epsilon^{\alpha}A_{\mu}^{\gamma}. \quad (15.1.9)$$

Это позволяет нам построить “ковариантную производную”²⁾:

$$(D_\mu \psi(x))_l = \partial_\mu \psi_l(x) - i A_\mu^\beta(x) (t_\beta)_l^m \psi_m(x). \quad (15.1.10)$$

Как и следовало ожидать, возникающие после преобразования члены, содержащие производные $\partial_\mu \epsilon^\beta$, взаимно уничтожаются. В результате находим

$$\delta(D_\mu \psi)_l = i \epsilon^\alpha (t_\alpha)_l^m \partial_\mu \psi_m - i C_{\gamma\alpha}^\beta \epsilon^\alpha A_\mu^\gamma (t_\beta)_l^m \psi_m + A_\mu^\gamma (t_\gamma)_l^m (t_\alpha)_m^n \psi_n,$$

или, используя соотношение (15.1.2),

$$\delta(D_\mu \psi)_l = i \epsilon^\alpha (t_\alpha)_l^m (D_\mu \psi)_m. \quad (15.1.11)$$

Таким образом, величина $D_\mu \psi$ преобразуется точно так же, как и само поле ψ .

Нам необходимо также проследить за производными калибровочного поля. Для того чтобы уничтожить член вида $\partial_\nu \partial_\mu \epsilon^\beta$, возникающий при преобразовании $\partial_\nu A_\mu^\beta$, мы проведем антисимметризацию по отношению к μ и ν точно так же, как мы делали это в электродинамике. Однако преобразованное выражение $\partial_\nu A_\mu^\beta - \partial_\mu A_\nu^\beta$ по-прежнему содержит члены, пропорциональные первым производным функции $\epsilon(x)$. Они возникают из второго слагаемого в правой части выражения (15.1.9). Чтобы наиболее простым способом построить ковариантный ротор $F_{\nu\mu}^\gamma$, после преобразования которого все такие производные $\epsilon(x)$ взаимно уничтожаются, надо рассмотреть коммутатор двух ковариантных производных, действующий на поле ψ :

$$([D_\nu, D_\mu] \psi)_l = -i (t_\gamma)_l^m F_{\nu\mu}^\gamma \psi_m, \quad (15.1.12)$$

где

$$F_{\nu\mu}^\gamma \equiv \partial_\nu A_\mu^\gamma - \partial_\mu A_\nu^\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma A_\nu^\alpha A_\mu^\beta. \quad (15.1.13)$$

Равенство (15.1.12) делает очевидным тот факт, что тензор $F_{\nu\mu}^\gamma$ должен преобразовываться так же, как и поле материи, принадлежащее к присоединенному представлению:

$$\delta F_{\nu\mu}^\beta \equiv i \epsilon^\alpha (t_\alpha)_\gamma^\beta F_{\nu\mu}^\gamma = \epsilon^\alpha C_{\gamma\alpha}^\beta F_{\nu\mu}^\gamma. \quad (15.1.14)$$

Читатель может проверить непосредственным вычислением (воспользовавшись соотношением (15.1.5)), что величина $F_{\nu\mu}^\alpha$, определяемая формулой (15.1.13), действительно удовлетворяет простому правилу преобразования (15.1.14).

Для некоторых целей полезно знать, что эти инфинитезимальные калибровочные преобразования могут быть дополнены конечными

²⁾ Как будет объяснено в § 15.2 мы принимаем следующее соглашение: при написании выражения (15.1.10) по умолчанию подразумевается, что все константы связи, такие как электрический заряд, включаются в определенные t_β , а следовательно, и в структурные константы.

преобразованиями. Элементы группы могут быть параметризованы с помощью набора вещественных функций $\Lambda^\alpha(x)$, так что в результате, действие элемента Λ на поле $\psi_l(x)$ будет описываться посредством матричного преобразования

$$\psi_l(x) \rightarrow \psi_{l\Lambda}(x) = [\exp(it_\alpha \Lambda^\alpha(x))]^m_l \psi_m(x). \quad (15.1.15)$$

Мы хотим, чтобы ковариантная производная преобразовывалась точно таким же образом:

$$(\partial_\mu - it_\alpha A_{\mu\Lambda}^\alpha) \psi_\Lambda = \exp(it_\alpha \Lambda^\alpha) (\partial_\mu - it_\alpha A_\mu^\alpha) \psi. \quad (15.1.16)$$

Следовательно, поле A_μ^α должно преобразовываться согласно $A_\mu^\alpha \rightarrow A_{\mu\Lambda}^\alpha$, причем

$$\partial_\mu \exp(it_\beta \Lambda^\beta) - it_\beta \exp(it_\alpha \Lambda^\alpha) A_{\mu\Lambda}^\beta = -i \exp(it_\alpha \Lambda^\alpha) t_\beta A^\beta,$$

или, другими словами,

$$t_\alpha A_{\mu\Lambda}^\alpha = \exp(it_\beta \Lambda^\beta) t_\alpha A_\mu^\alpha \exp(-it_\beta \Lambda^\beta) - i [\partial_\mu \exp(it_\beta \Lambda^\beta)] \exp(-it_\beta \Lambda^\beta). \quad (15.1.17)$$

Законы преобразования (15.1.15) и (15.1.17) сводятся к исходным законам (15.1.1) и (15.1.9) в пределе, когда $\Lambda^\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция $\epsilon^\alpha(x)$.

Из выражения (15.1.17) следует, что выбирая подходящим образом $\Lambda^\beta(x)$, всегда можно обратить в нуль $A_{\mu\Lambda}^\alpha$ в какой-либо *одной* точке, например в точке $x = z$. (Просто положим, что $\Lambda^\alpha(z) = 0$, а ее производная $\partial \Lambda^\alpha(x) / \partial x^\mu = -A_\mu^\alpha(x)$ в точке $x = z$.) Кроме того, всегда можно выбрать $\Lambda^\beta(x)$ таким образом, чтобы какая-либо *одна* пространственно-временная компонента поля $A_{\mu\Lambda}^\alpha$ обратилась в нуль для любых α , по крайней мере в некоторой конечной окрестности заданной точки. Например, для того чтобы обратить в нуль компоненту поля $A_{3\Lambda}^\alpha(x)$, необходимо решить систему *обыкновенных* дифференциальных уравнений первого порядка для функций $\Lambda^\beta(x)$:

$$\partial_3 \exp(it_\beta \Lambda^\beta) = -i \exp(it_\beta \Lambda^\beta) t_\alpha A_{3\Lambda}^\alpha. \quad (15.1.18)$$

Эта система всегда имеет решение, по крайней мере в конечной окрестности произвольной точки.

Однако в общем случае невозможно выбрать $\Lambda^\alpha(x)$ так, чтобы все четыре компоненты поля $A_{\mu\Lambda}^\alpha(x)$ обратились в нуль в конечной области. Для того, чтобы это было возможно, функции $\Lambda^\beta(x)$ должны были бы удовлетворять дифференциальным уравнениям в *частных* производных

$$\partial_\mu \exp(it_\beta \Lambda^\beta) = -i \exp(it_\beta \Lambda^\beta) t_\alpha A_\mu^\alpha, \quad (15.1.19)$$

которые могут иметь решение только при выполнении определенных условий интегрируемости. В частности, если функция $A_{\mu\Lambda}^\alpha(x)$ обращается в нуль везде, то же самое происходит и с $F_{\mu\nu\Lambda}^\alpha(x)$. Однако

поскольку напряженность поля преобразуется однородным образом, $F_{\mu\nu\lambda}^\alpha(x)$ может обращаться в нуль, только если $F_{\mu\nu}^\alpha(x)$ тоже обращается в нуль. Калибровочное поле $A_\mu^\alpha(x)$ называется “чистой калибровкой”, если существует калибровочное преобразование, которое обращает его в нуль во всех точках. Нетрудно показать, что условие, согласно которому $F_{\mu\nu}^\alpha(x)$ обращается в нуль везде, не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы в любой односвязной области $A_\mu^\alpha(x)$ можно было представить как чистую калибровку [6].

* * *

Существует глубокая связь между объектами, преобразующимися под действием калибровочных преобразований, и объектами в общей теории относительности, преобразующимися ковариантным образом при преобразованиях координат общего вида. Точно так же, как мы использовали калибровочное поле для построения ковариантных производных $D_\mu\psi_l$, обладающих теми же свойствами относительно калибровочного преобразования, что и сами поля ψ_l , мы можем использовать аффинную связность $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x)$ для построения ковариантных производных тензоров $T^{\rho\sigma\dots}_{\kappa\lambda\dots}$:

$$T^{\rho\dots}_{\kappa\dots;\nu} \equiv \partial_\nu T^{\rho\dots}_{\kappa\dots} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho T^{\lambda\dots}_{\kappa\dots} + \dots - \Gamma_{\nu\kappa}^\mu T^{\rho\dots}_{\mu\dots} - \dots,$$

которые, в свою очередь, являются тензорами. Кроме того, из производных калибровочного поля мы построили напряженность поля $F_{\mu\nu}^\alpha$, обладающую теми же свойствами (относительно калибровочных преобразований), что и сами поля материи, принадлежащие присоединенному представлению калибровочной группы. Соответственно, из производных аффинной связности мы можем построить величину

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda,$$

которая преобразуется как тензор. В общей теории относительности она называется тензором кривизны Римана–Кристоффеля. Коммутатор двух калибровочно-ковариантных производных D_μ и D_ν может быть выражен через тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}^\alpha$. Аналогично коммутатор двух ковариантных производных по x^ν и x^κ может быть выражен через кривизну

$$T^{\lambda\dots}_{\mu\dots;\nu;\kappa} - T^{\lambda\dots}_{\mu\dots;\kappa;\nu} = R_{\sigma\nu\kappa}^\lambda T^{\sigma\dots}_{\mu\dots} + \dots - R_{\sigma\mu\kappa}^\lambda T^{\lambda\dots}_{\sigma\dots} - \dots$$

Необходимым и достаточным условием существования калибровки, в которой калибровочное поле обращается в нуль в конечной односвязной области, является обращение в нуль тензора напряженности. А необходимым и достаточным условием существования системы координат, в которой аффинная связность обращается в нуль в конечной односвязной области, является нулевое значение тензора кривизны Римана–Кристоффеля. Эта аналогия не является полной

в одном важном отношении: в общей теории относительности аффинная связность сама строится из первых производных метрического тензора, в то время как в калибровочных теориях калибровочные поля не выражаются ни через какие более фундаментальные поля.

§ 15.2. Лагранжианы калибровочной теории и простые группы Ли

Законы преобразования тензора калибровочного поля $F_{\mu\nu}^\alpha$, полей материи ψ , а также их калибровочно-ковариантных производных не включают в себя производные параметров преобразования $\epsilon^\alpha(x)$. Поэтому если лагранжиан построен только из этих объектов и инвариантен по отношению к глобальным преобразованиям с постоянными ϵ^α , то он будет также инвариантен относительно калибровочных преобразований с произвольными $\epsilon^\alpha(x)$. Поэтому мы предполагаем, что лагранжиан действительно строится только из них, т. е.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, D_\mu \psi, D_\nu D_\mu \psi, \dots, F_{\mu\nu}^\alpha, D_\rho F_{\mu\nu}^\alpha, \dots), \quad (15.2.1)$$

и, следовательно, выполняется условие инвариантности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} i(t_\alpha)_l^m \psi_m + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu \psi)_l} i(t_\alpha)_l^m (D_\mu \psi)_m + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\nu D_\mu \psi)_l} i(t_\alpha)_l^m (D_\nu D_\mu \psi)_m + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^\beta} C_{\gamma\alpha}^\beta F_{\mu\nu}^\gamma + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\rho F_{\mu\nu}^\beta} C_{\gamma\alpha}^\beta D_\rho F_{\mu\nu}^\gamma + \dots = 0. \end{aligned} \quad (15.2.2)$$

С другой стороны, лагранжиан не может зависеть явно от самого калибровочного поля, т. е. он может входить в него только через тензор $F_{\mu\nu}^\alpha$ и калибровочно-ковариантные производные D_μ . В частности, массовый член $-(1/2)m_{\alpha\beta}^2 A_{\alpha\mu} A_\beta^\mu$ запрещен.

В дальнейшем мы сконцентрируем наше внимание на тех членах в лагранжиане, которые зависят только от $F_{\mu\nu}^\alpha$. Так же как и в электродинамике, лагранжиан, описывающий произвольную безмассовую частицу со спином, равным единице, должен содержать член, квадратичный по $\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha$ (этот член соответствует свободной частице). Требование калибровочной инвариантности приводит к тому, что этот член, отвечающий свободным частицам, должен происходить из слагаемого, квадратичного по тензору напряженности поля $F_{\mu\nu}^\alpha$. В силу лоренц-инвариантности и закона сохранения четности, мы получаем

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\beta\mu\nu}, \quad (15.2.3)$$

где $g_{\alpha\beta}$ — постоянная матрица. Если мы не требуем сохранения четности (или CP- или T-симметрии), то мы, кроме того, можем включить

в лагранжиан слагаемое

$$\mathcal{L}'_A = -\frac{1}{2} \theta_{\alpha\beta} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^\alpha F_{\rho\sigma}^\beta,$$

где $\theta_{\alpha\beta}$ — другая постоянная матрица. Это слагаемое в действительности является производной и поэтому не влияет на полевые уравнения или на правила Фейнмана. Такое слагаемое приводит, однако, к непертурбативным квантово-механическим эффектам, которые будут обсуждаться в § 23.6.

Прежде чем перейти к рассмотрению свойств матрицы $g_{\alpha\beta}$, стоит обратить внимание на следующий факт. Оказывается, что невозможно ввести кинетический член для калибровочного поля $A_\mu^\alpha(x)$, не учитывая взаимодействий, представленных слагаемыми в выражении (15.2.3). Эти слагаемые возникают из квадратичной части тензора напряженности поля $F_{\mu\nu}^\alpha$, определяемого равенством (15.1.13). Это еще один аргумент в пользу того, что неабелевы калибровочные теории похожи на общую теорию относительности, в которой кинетическая часть лагранжиана гравитационного поля содержится в лагранжевой плотности Эйнштейна–Гильберта $-\sqrt{g} R/8\pi G$, которая также включает в себя самодействие поля. Причины этого в обоих случаях одинаковы: гравитационное поле взаимодействует с самим собой, поскольку оно взаимодействует со всем, что имеет энергию и импульс, а калибровочное поле взаимодействует с самим собой, поскольку оно, в свою очередь, взаимодействует со всем, что преобразуется согласно нетривиальному представлению (в данном случае — присоединенному представлению) калибровочной группы. В противоположность этому, в квантовой электродинамике для электромагнитного поля можно ввести кинетический член $-(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, который не приводит к взаимодействиям, поскольку фотон не несет электрического заряда — квантового числа, с которым он взаимодействует.

Числовая матрица $g_{\alpha\beta}$ может быть выбрана симметричной и должна быть вещественной, чтобы лагранжиан тоже получился вещественным. Это слагаемое удовлетворяет требованию калибровочной инвариантности (15.2.2), только если для всех δ выполняется равенство

$$g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^\alpha C_{\gamma\delta}^\beta F^{\gamma\mu\nu} = 0.$$

Чтобы это стало возможным без введения дополнительных функциональных отношений между компонентами тензора F , матрица $g_{\alpha\beta}$ должна удовлетворять следующему условию:

$$g_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta}^\beta = -g_{\gamma\beta} C_{\alpha\delta}^\beta. \quad (15.2.4)$$

Есть еще одно важное условие, которому должна удовлетворять матрица $g_{\gamma\beta}$. Так же как и в квантовой электродинамике, правила канонического квантования и свойства положительной определенности квантово-механического скалярного произведения приводят к положительной определенности матрицы $g_{\alpha\beta}$ в лагранжиане (15.2.3).

(Иными словами, сумма $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$ должна быть положительной для всех вещественных ненулевых u . Она может обращаться в нуль, только если $u^\alpha = 0$ для всех α .) Можно провести следующую аналогию: в кинетическом лагранжиане

$$-\frac{1}{2}Z\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

описывающем вещественное скалярное поле, постоянная Z также должна быть положительной.

Эти ограничения на матрицу $g_{\alpha\beta}$ имеют далеко идущие последствия. Они приводят к набору из трех эквивалентных условий:

а. Существует вещественная симметричная положительно определенная матрица $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющая условию инвариантности (15.2.4).

б. В алгебре Ли существует базис (т.е. набор генераторов $\tilde{t}_\alpha = \mathcal{S}_{\alpha\beta}t_\beta$, где $\mathcal{S}$ — вещественная несингулярная матрица), структурные константы $\tilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha$ которого антисимметричны не только по нижним индексам β и γ , но и по всем трем индексам α , β и γ . (Этот базис удобен тем, что в нем можно забыть о различиях между нижними и верхними индексами α , β и т.д. и писать просто $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}$ вместо $\tilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha$.)

в. Алгебра Ли есть прямая сумма коммутирующих компактных простых подалгебр и $U(1)$ ¹⁾.

В приложении А к этой главе представлено доказательство эквивалентности условий **а**, **б** и **в** [7].

¹⁾ Некоторые определения: подалгебра $\mathcal{H}$ алгебры Ли $\mathcal{G}$ есть линейное пространство, натянутое на определенные линейные комбинации $t_i = \mathcal{S}_{i\alpha}t_\alpha$ генераторов t_α алгебры $\mathcal{G}$ с вещественными коэффициентами, такое что $\mathcal{H}$ сама является алгеброй Ли в том смысле, что взаимные коммутаторы генераторов t_i имеют следующий вид: $[t_i, t_j] = ic_{ij}^k t_k$. Подалгебра $\mathcal{H}$ называется *инвариантной*, если коммутатор любого элемента алгебры $\mathcal{G}$ с любым элементом подалгебры $\mathcal{H}$ принадлежит подалгебре $\mathcal{H}$. *Простая* алгебра Ли — такая алгебра Ли, у которой нет инвариантных подалгебр. $U(1)$ -подалгебра алгебры $\mathcal{G}$ — это подалгебра, обладающая только одним генератором, коммутирующим со всеми генераторами алгебры $\mathcal{G}$. *Полупростая* алгебра Ли — такая алгебра Ли, у которой нет инвариантных абелевых подалгебр, т.е. инвариантных подалгебр, генераторы которых коммутируют друг с другом. Полупростые алгебры Ли являются прямыми суммами простых (но не $U(1)$) алгебр Ли. Простая или полупростая алгебра Ли называется *компактной*, если матрица $Tr\{t_\alpha^A t_\beta^A\} = -C_{\alpha\delta}^\gamma C_{\beta\gamma}^\delta$ является положительно определенной. Смысл и важность свойств простоты и компактности будут обсуждаться ниже. Когда говорят, что алгебра Ли $\mathcal{G}$ есть прямая сумма подалгебр $\mathcal{H}_n$, имеют в виду, что можно найти базис для $\mathcal{G}$ с генераторами t_{na} , в котором структурные константы примут следующий вид:

$$C_{na,mb}^{lc} = \delta_{lm}\delta_{mn}C_{ab}^{(n)c},$$

где $C_{ab}^{(n)c}$ — структурная константа подалгебры $\mathcal{H}_n$.

Прежде чем продолжить обсуждение физических следствий этого результата, стоит еще немного поговорить об условии компактности. Хотя мы здесь этим не воспользуемся, заметим, что компактная алгебра Ли состоит из генераторов компактной группы Ли (группа, инвариантный объем которой конечен). В частности, группа вращений компактна, а группа Лоренца нет. В качестве примера простой некомпактной алгебры Ли рассмотрим коммутационные соотношения

$$[t_1, t_2] = -it_3, \quad [t_2, t_3] = it_1, \quad [t_3, t_1] = it_2.$$

Здесь структурная константа является вещественным тензором, но не полностью антисимметричным. Ее ненулевые компоненты таковы:

$$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = -1, \quad C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1, \quad C_{31}^2 = -C_{13}^2 = 1.$$

Метрика, даваемая уравнением (15.A.10), в данном случае диагональна. Элементы ее равны

$$g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -2.$$

Эта матрица не является положительно определенной, так что алгебра Ли не является компактной. На самом деле, это алгебра Ли некомпактной группы $O(2, 1)$ (группы Лоренца в двух пространственных и одном временном измерениях).

Два набора генераторов, отличающиеся посредством *вещественного* несингулярного линейного преобразования, определяют одну и ту же алгебру Ли и генерируют одну и ту же группу. Это неверно для комплексных линейных преобразований генераторов. В частности, любая простая алгебра Ли может быть приведена к компактной форме изменением фазы генераторов в подходящем базисе. Например, для алгебры Ли из приведенного выше примера необходимо всего лишь определить новые генераторы $t'_1 = it_1$, $t'_2 = it_2$, $t'_3 = t_3$, для которых коммутационные соотношения будут следующими:

$$[t'_1, t'_2] = it'_3, \quad [t'_2, t'_3] = it'_1, \quad [t'_3, t'_1] = it'_2.$$

Структурная константа теперь вещественна и полностью антисимметрична: $C_{bc}^a = \epsilon_{abc}$. Здесь $g_{ab} = 2\delta_{ab}$, а алгебра компактна. В ней мы узнаем, конечно, известную алгебру компактной группы вращений в трех измерениях $O(3)$. Чтобы увидеть, что это всегда возможно для любой простой алгебры Ли, заметим, что матрица g_{ab} , определяемая выражением (15.A.10), действительна, симметрична и несингулярна, и поэтому может быть приведена действительным ортогональным преобразованием к диагональной форме с ненулевыми элементами вдоль главной диагонали. После этого необходимо просто умножить все генераторы, соответствующие в этом базисе отрицательным диагональным элементам матрицы g_{ab} , на мнимую единицу i .

Заметим без доказательства, что все представления конечной размерности компактных групп Ли унитарны и, соответственно, все

представления конечной размерности компактных алгебр Ли эрмитовы. Более того, легко увидеть, что единственными алгебрами Ли, которые могут иметь нетривиальное представление независимыми эрмитовыми матрицами конечной размерности t_α , являются прямые суммы $U(1)$ и компактных простых алгебр Ли. Чтобы показать это, можно принять следующее простое определение:

$$g_{\alpha\beta} \equiv \text{Tr}\{t_\alpha t_\beta\}.$$

Эта матрица, очевидно, положительно определена, поскольку след $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \text{Tr}\{(u^\alpha t_\alpha)^2\}$ положителен для любых вещественных u^α и обращается в нуль только в случае, если $u^\alpha t_\alpha = 0$. Последнее же равенство возможно только при обращении в нуль всех u^α , так как t^α предполагались независимыми. Кроме того, матрица $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условию инвариантности (15.2.4), в чем можно убедиться, умножив коммутационное соотношение (15.1.2) на t_δ и взяв от полученного выражения след. В результате получаем

$$iC_{\alpha\beta}^\gamma \text{Tr}\{t_\gamma t_\delta\} = \text{Tr}\{[t_\alpha, t_\beta] t_\delta\} = \text{Tr}\{t_\delta t_\alpha t_\beta - t_\beta t_\alpha t_\delta\}.$$

Это выражение, очевидно, антисимметрично по индексам β и δ . Проверив справедливость **a**, можно быть в достаточной степени уверенным, что вышеупомянутая теорема содержит условие **c**, так что алгебра Ли должна быть прямой суммой компактных простых и $U(1)$ -подалгебр.

Вернемся теперь к физическому смыслу калибровочных теорий. В этом параграфе мы пришли к выводу, что существует положительно определенная симметричная вещественная матрица $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющая условию инвариантности (15.2.4). Этот вывод был сделан из необходимости построения подходящего кинетического слагаемого в лагранжиане, описывающем калибровочное поле. Кроме того в приложении А к настоящей главе будет показано, что этот результат эквивалентен некоторому условию на алгебру Ли, которая должна представляться в виде прямой суммы компактных простых и $U(1)$ -подалгебр. В этом результате важным для нас является тот факт, что число различных типов и размерностей простых алгебр Ли ограничено. Например, нетрудно заметить, что не существует простых алгебр Ли с числом генераторов, меньшим трех, поскольку в одном или в двух измерениях не может быть ненулевых полностью антисимметричных структурных констант с тремя индексами. Если имеется три генератора, от одной инвариантной подалгебры можно избавиться, выбрав C_{12}^3 , C_{31}^2 и C_{23}^1 ненулевыми. Для базиса, в котором структурная константа действительна и полностью антисимметрична, существует только одна возможность:

$$C_{\alpha\beta\gamma} = c\epsilon_{\alpha\beta\gamma}.$$

Здесь c — произвольная ненулевая действительная постоянная, от которой можно избавиться, изменив масштаб генераторов $t_\alpha \rightarrow t_\alpha/c$,

так чтобы для новых генераторов выполнялись соотношения

$$[t_\alpha, t_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}t_\gamma.$$

Как видно, они образуют алгебру Ли группы трехмерных вращений $O(3)$, а также алгебру Ли группы $SU(2)$ унитарных матриц второго порядка с единичным детерминантом. На ее основе была построена неабелевая калибровочная теория в том изначальном виде, в каком она была задумана Янгом и Миллсом. Продолжая наше рассмотрение, можно показать, что не существует простых алгебр Ли с 4, 5, 6 или 7 генераторами, существует одна с 8 генераторами и т.д. Математики (а именно Киллинг и Э. Картан) смогли классифицировать все простые алгебры Ли. Компактные формы простых алгебр Ли образуют несколько бесконечных классов алгебр, соответствующих “классическим” группам Ли: специальной унитарной, унитарной ортогональной и унитарной симплектической группам, плюс пять алгебр Ли — исключений. Эта классификация представлена в приложении В к данной главе.

В приложении А, кроме того, показано, что при выполнении эквивалентных условий **а**, **б** или **в** метрика принимает вид

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2} \delta_{mn} \delta_{ab} \quad (15.2.5)$$

с вещественными g_m , где m и n нумеруют простые или $U(1)$ -подалгебры, а a и b нумеруют генераторы каждой из этих подалгебр. Можно избавиться от констант g_m^{-2} , изменяя масштаб калибровочных полей

$$A_{ma}^\mu \rightarrow \tilde{A}_{ma}^\mu \equiv g_m^{-1} A_{ma}^\mu. \quad (15.2.6)$$

Однако в этом случае для того чтобы сохранить вид формул (15.1.10) и (15.1.13) для $D_\mu(\psi)$ и $F_\alpha^{\mu\nu}$ неизменным, необходимо также переопределить матрицы t_α и структурные константы:

$$t_{ma} \rightarrow \tilde{t}_{ma} = g_m t_{ma}, \quad (15.2.7)$$

$$C_{cab}^{(m)} \rightarrow \tilde{C}_{cab}^{(m)} = g_m C_{cab}^{(m)}. \quad (15.2.8)$$

Таким образом, всегда можно определить масштаб калибровочных полей (опуская затем тильды) так, что g_m в формуле (15.2.5) будет единицей:

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (15.2.9)$$

Однако в этом случае матрицы преобразования t_α и структурные константы $C_{\alpha\beta\gamma}$ будут содержать неизвестный множитель g_m для каждой простой или $U(1)$ -подалгебры. Эти множители являются константами связи калибровочной теории. В качестве альтернативного варианта иногда удобнее использовать некоторую произвольную фиксированную нормировку для t_α и структурных констант в каждой простой или $U(1)$ -подалгебре. В этом случае константы связи возникают в лагранжиане (15.2.3), описывающем калибровочные поля, в виде множителей g_m^{-2} , фигурирующих в формуле (15.2.5).

§ 15.3. Уравнения поля и законы сохранения

Подставив выражение (15.2.9) для матрицы $g_{\alpha\beta}$ в формулу (15.2.3), получим для полной лагранжевой плотности

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_{\alpha}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, D_{\mu}\psi), \quad (15.3.1)$$

причем в отсутствие калибровочных полей слагаемое $\mathcal{L}_M(\psi, D_{\mu}\psi)$ являлось бы лагранжевой плотностью, описывающей материю. Мы могли бы, в принципе, дописать в качестве аргументов функции $\mathcal{L}_M$ тензор $F_{\alpha\mu\nu}$, а также высшие ковариантные производные $D_{\nu}D_{\mu}\psi$, $D_{\lambda}F_{\alpha\mu\nu}$ и т. д., но мы исключаем здесь эти неперенормируемые члены по той же самой причине, что и в электродинамике. Как было показано в § 12.3, такие члены при обычных энергиях оказываются в значительной степени подавлены отрицательными степенями некоторой очень большой массы. По этой причине стандартная модель слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий имеет лагранжиан общего вида (15.3.1).

Уравнения движения калибровочного поля даются формулами

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} A_{\alpha\nu})} = -\partial_{\mu} F_{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha\nu}} = -F_{\gamma}^{\nu\mu} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} - i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_{\nu}\psi} t_{\alpha}\psi,$$

так что

$$\partial_{\mu} F_{\alpha}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}, \quad (15.3.2)$$

где $\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}$ — ток:

$$\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu} \equiv -F_{\gamma}^{\nu\mu} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} - i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_{\nu}\psi} t_{\alpha}\psi. \quad (15.3.3)$$

Ток $\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}$ сохраняется в обычном смысле

$$\partial_{\nu} \mathcal{J}_{\alpha}^{\nu} = 0. \quad (15.3.4)$$

Это можно увидеть как из уравнений Эйлера–Лагранжа для ψ и условия инвариантности (15.2.2), так и непосредственно из уравнений поля (15.3.2).

Производные в формулах (15.3.2) и (15.3.4) обычные, а не калибровочно-ковариантные D_{ν} . Поэтому калибровочная инвариантность этих уравнений не очевидна. Ее можно сделать явной, если переписать уравнение (15.3.2) через калибровочно-ковариантную производную напряженности поля:

$$D_{\lambda} F_{\alpha}^{\mu\nu} \equiv \partial_{\lambda} F_{\alpha}^{\mu\nu} - i(t_{\beta}^A)_{\alpha\gamma} A_{\beta\lambda} F_{\gamma}^{\mu\nu} = \partial_{\lambda} F_{\alpha}^{\mu\nu} - C_{\alpha\gamma\beta} A_{\beta\lambda} F_{\gamma}^{\mu\nu}. \quad (15.3.5)$$

Тогда равенство (15.3.2) приобретает следующий вид:

$$D_{\mu} F_{\alpha}^{\mu\nu} = -J_{\alpha}^{\nu}, \quad (15.3.6)$$

где J_{α}^{ν} — ток, соответствующий только полям материи:

$$J_{\alpha}^{\nu} \equiv -i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_{\nu}\psi} t_{\alpha}\psi. \quad (15.3.7)$$

Это выражение калибровочно-ковариантно в том случае, если плотность $\mathcal{L}_M$ калибровочно-инвариантна. Кроме того, действуя на равенство (15.3.6) оператором ковариантной производной D_ν и используя коммутационное соотношение

$$[D_\nu, D_\mu]F_\alpha^{\rho\sigma} = -i(t_\gamma^A)_{\alpha\beta}F_{\gamma\nu\mu}F_\beta^{\rho\sigma} = -C_{\gamma\alpha\beta}F_{\gamma\nu\mu}F_\beta^{\rho\sigma},$$

мы находим, что J_α^ν удовлетворяет калибровочно-ковариантному закону сохранения

$$D_\nu J_\alpha^\nu = 0, \quad (15.3.8)$$

а не обычному закону сохранения (15.3.4), которому подчиняется полный ток $\mathcal{J}_\alpha^\nu$. Кроме того, отсюда сразу получаются (необходимо использовать соотношения (15.1.5)) следующие тождества:

$$D_\mu F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda F_{\alpha\mu\nu} = 0. \quad (15.3.9)$$

Эти тождества выполняются независимо от того, подчиняются калибровочные поля уравнениям поля или нет.

Эти результаты подчеркивают глубокую аналогию между неабелевыми калибровочными теориями и общей теорией относительности, упомянутую в § 15.1. В общей теории относительности имеется тензор энергии-импульса материи T_μ^ν , являющийся аналогом J^μ . Этот тензор в общем случае удовлетворяет ковариантному закону сохранения $T_{\mu;\nu}^\nu$ и стоит в правой части полевых уравнений Эйнштейна в их ковариантной форме, $R_\mu^\nu - (1/2)\delta_\mu^\nu R = -8\pi G T_\mu^\nu$. Однако T_μ^ν не сохраняется в обычном смысле: $\partial_\nu T_\mu^\nu$ не обращается в нуль. С другой стороны, перенося нелинейные слагаемые из левой части уравнения Эйнштейна в правую часть, получаем уравнение поля [8]

$$\left(R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R\right)_{\text{лин}} = -8\pi G \tau_\mu^\nu,$$

где τ_μ^ν — псевдотензор, имеющий вид

$$\tau_\mu^\nu \equiv T_\mu^\nu + \frac{1}{8\pi G} \left(R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R\right)_{\text{нелин}},$$

что напоминает $\mathcal{J}_\alpha^\nu$. Как и $\mathcal{J}_\alpha^\nu$, псевдотензор τ_μ^ν сохраняется в обычном смысле:

$$\partial_\nu \tau_\mu^\nu = 0,$$

и тогда ток

$$P_\mu = \int \tau_\mu^0 d^3x$$

может рассматриваться как вектор энергии и импульса. Это выражение содержит чисто гравитационный член, поскольку гравитационные поля обладают энергией и импульсом; без этого слагаемого псевдотензор τ_μ^ν не мог бы сохраняться. Аналогично, ток $\mathcal{J}_\alpha^\nu$ содержит член, состоящий из калибровочных полей (первое слагаемое в правой части выражения (15.3.3)). Это происходит из-за того, что в случае

неабелевых групп (таких, что $C_{\alpha\beta}^\gamma \neq 0$) калибровочные поля обладают квантовыми числами, которые определяют их взаимодействие друг с другом. Поскольку ток $\mathcal{J}_\alpha^\nu$ сохраняется в обычном смысле, он может рассматриваться как ток этих квантовых чисел, причем генераторы симметрии не зависят от времени:

$$T_\alpha = \int \mathcal{J}_\alpha^0 d^3x. \quad (15.3.10)$$

(Кроме того, однородные уравнения (15.3.9) содержат ковариантные производные, подобно тождествам Бьянки общей теории относительности.) В противоположность всему этому, в квантовой электродинамике не возникает ни одного из этих усложнений, поскольку фотоны не несут квантового числа — электрического заряда, посредством которого они могли бы взаимодействовать друг с другом.

§ 15.4. Квантование

Продолжая наше изложение, проведем квантование калибровочных теорий, описанных в предыдущих двух параграфах. Пусть плотность лагранжиана имеет вид (15.3.1)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, D_\mu\psi), \quad (15.4.1)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\alpha\mu\nu} &\equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}, \\ D_\mu\psi &\equiv \partial_\mu\psi - it_\alpha A_{\alpha\mu}\psi. \end{aligned}$$

В этом случае нельзя непосредственно провести квантование, просто положив коммутаторы равными соответствующим скобкам Пуассона, умноженным на i . Проблема возникает из-за связей. Используя терминологию Дирака, описанную в § 7.6, можно сказать, что существуют первичная связь

$$\Pi_{\alpha 0} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha^0)} = 0, \quad (15.4.2)$$

а также возникающая из полевых уравнений для A_α^0 вторичная связь:

$$\begin{aligned} -\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_{\alpha 0})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha 0}} &= \partial_\mu F_\alpha^{\mu 0} + F_\gamma^{\mu 0} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} + J_\alpha^0 = \\ &= \partial_k \Pi_\alpha^k + \Pi_\gamma^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta k} + J_\alpha^0 = 0. \end{aligned} \quad (15.4.3)$$

Здесь $\Pi_\alpha^k \equiv \partial \mathcal{L} / \partial(\partial_0 A_{\alpha k}) = F_\alpha^{k0}$ — “импульс”, сопряженный $A_{\alpha k}$, а k пробегает значения 1, 2, 3. Скобки Пуассона величин $\Pi_{\alpha 0}$ и $\partial_k \Pi_\alpha^k + \Pi_\gamma^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta k} + J_\alpha^0$ обращаются в нуль (поскольку последнее выражение не зависит от A_α^0), так что это связи первого рода, которые не пропадают при простой замене скобок Пуассона на скобки Дирака.

Как и в случае электродинамики, мы работаем с этими связями, выбирая подходящим образом калибровку. Принятая в электродинамике кулоновская калибровка в рассматриваемом случае привела бы к значительным трудностям¹⁾, так что вместо нее мы будем работать в так называемой *аксиальной калибровке*, определяемой условием

$$A_{\alpha 3} = 0. \quad (15.4.4)$$

Каноническими переменными, соответствующими калибровочному полю, в этом случае являются компоненты поля $A_{\alpha i}$ ($i = 1, 2$) и канонически сопряженные им

$$\Pi_{\alpha i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_{\alpha i})} = -F_{\alpha}^{0i} = \partial_0 A_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}. \quad (15.4.5)$$

Поле $A_{\alpha 0}$ не является независимой канонической переменной, а выражается через другие переменные с помощью уравнения связи (15.4.3). Чтобы увидеть это, заметим, что напряженность “электрического” поля $F_{\alpha}^{\mu 0}$ равна

$$F_{\alpha}^{i0} = \Pi_{\alpha i}, \quad F_{\alpha}^{30} = \partial_3 A_{\alpha}^0, \quad (15.4.6)$$

так что связь (15.4.3) принимает вид

$$-(\partial_3)^2 A_{\alpha}^0 = \partial_i \Pi_{\alpha i} + \Pi_{\gamma i} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta i} + J_{\alpha}^0. \quad (15.4.7)$$

Последнее уравнение может быть легко решено (при разумных граничных условиях), в результате чего получим A_{α}^0 в виде функционала от $\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$ и J_{α}^0 . (Мы используем общепринятое правило суммирования, при котором индексы i, j и т. д. пробегают значения 1 и 2.) Отметим, что величина, канонически сопряженная к полю материи ψ_l , дается формулой

$$\pi_l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_l)} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (D_0 \psi_l)}. \quad (15.4.8)$$

Поэтому временная компонента тока материи может быть выражена через канонические переменные *только* полей материи:

$$J_{\alpha}^0 = -i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (D_0 \psi)_l} (t_{\alpha})_l^m \psi_m = -i \pi_l (t_{\alpha})_l^m \psi_m. \quad (15.4.9)$$

¹⁾ Вдобавок к чисто алгебраическим трудностям, использование кулоновской калибровки (как и многих других калибровок) приводит к следующей проблеме, известной как неоднозначность Грибова [9]: даже при стремлении поля $\mathbf{A}_{\alpha}$ к нулю на больших расстояниях, для каждого решения, удовлетворяющего условию кулоновской калибровки $\nabla \cdot \mathbf{A}_{\alpha} = 0$, найдутся другие решения, отличающиеся на конечное калибровочное преобразование. Неоднозначность Грибова не будет создавать проблем, поскольку мы проводим квантование в аксиальной калибровке, в которой она не возникает, а другие калибровки (подобные лоренцевой) мы будем использовать только для построения теории возмущений.

Следовательно, уравнение (15.4.7) определяет величину A_α^0 в данный момент времени как функционал канонических переменных $\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$, π_l и ψ_m в тот же момент времени.

Теперь, когда мы установили вид канонических переменных в этой калибровке, можно перейти к построению гамильтониана. Гамильтонова плотность дается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_l \partial_0 \psi_l - \mathcal{L} = \\ & = \Pi_{\alpha i} (F_{\alpha 0 i} + \partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha \beta \gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \pi_l \partial_0 \psi_l - \\ & - \frac{1}{2} F_{\alpha 0 i} F_{\alpha 0 i} + \frac{1}{2} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + \frac{1}{2} F_{\alpha i 3} F_{\alpha i 3} - \frac{1}{2} F_{\alpha 0 3} F_{\alpha 0 3} - \mathcal{L}_M. \end{aligned} \quad (15.4.10)$$

Воспользовавшись уравнениями (15.4.4) и (15.4.6), это выражение можно привести к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \mathcal{H}_M + \Pi_{\alpha i} (\partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha \beta \gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha i} \Pi_{\alpha i} + \\ & + \frac{1}{4} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i} \partial_3 A_{\alpha i} - \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha 0} \partial_3 A_{\alpha 0}, \end{aligned} \quad (15.4.11)$$

где $\mathcal{H}_M$ — гамильтонова плотность, соответствующая материи:

$$\mathcal{H}_M \equiv \pi_l \partial_0 \psi_l - \mathcal{L}_M. \quad (15.4.12)$$

Следуя общим правилам, полученным в § 9.2, эту гамильтонову плотность теперь можно использовать для вычисления матричных элементов как функциональных интегралов по $A_{\alpha i}$, $\Pi_{\alpha i}$, ψ_l и π_l с весовым множителем $\exp(iI)$, где

$$I = \int d^4 x [\Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_l \partial_0 \psi_l - \mathcal{H} + \epsilon \text{ члены}]. \quad (15.4.13)$$

Здесь “ ϵ -члены” стоят только для того, чтобы обеспечить наличие правильного бесконечно малого мнимого члена в знаменателях пропагаторов (см. § 9.2). Заметим, что уравнения (15.4.7) и (15.4.9) определяют A_α^0 как функционал канонических переменных, *линейный* по $\Pi_{\alpha i}$ и π_l . Предположим, что выражение для плотности $\mathcal{L}_M$ не содержит членов, порядок которых по $D_\mu \psi$ выше квадратичного. Тогда из уравнения (15.4.11) следует, что интегрируемая функция в выражении для полного действия (15.4.13) также не может иметь более высокого порядка по $\Pi_{\alpha i}$ и π_α , чем второй. Поэтому мы можем выполнить функциональное интегрирование по этим каноническим “импульсам”, следуя обычным правилам гауссового интегрирования. Трудности, возникающие на этом пути, состоят в том, что коэффициенты при квадратичных по $\Pi_{\alpha i}$ членах в уравнении (15.4.13) являются функциями поля $A_{\alpha i}$. В результате в гауссовом интеграле возникает неудобный для работы детерминантный множитель, зависящий от полей. Кроме того, при таком подходе лоренц-инвариантность всего формализма далеко не очевидна.

Вместо того чтобы двигаться в указанном направлении, воспользуемся приемом, подобным тому, который мы применили в § 9.6 при формулировке электродинамики методом функционального интегрирования. Заметим, что если рассматривать поле $A_{\alpha 0}$ как независимую переменную, то действие (15.4.13) очевидным образом окажется квадратичным по $A_{\alpha 0}$, причем коэффициент при квадратичном члене $A_{\alpha 0}(x)A_{\beta 0}(y)$ дается выражением $(\partial_3)^2\delta^4(x-y)$, не зависящим от полей. Как мы видели в приложении к гл. 9, интеграл такого гауссиана по $A_{\alpha 0}(x)$ равен, с точностью до постоянного множителя, значению подынтегрального выражения в стационарной “точке” аргумента экспоненты. Но в данном случае вариационная производная действия есть

$$\frac{\delta I}{\delta A_{\alpha 0}} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A_{\alpha 0}} = J_{\alpha}^0 + \partial_i \Pi_{\alpha i} + C_{\beta \alpha \gamma} \Pi_{\beta i} A_{\gamma i} - \partial_3^2 A_{\alpha 0},$$

так что стационарная “точка” действия является решением уравнения связи (15.4.7). Следовательно, мы можем не иметь дела с решениями уравнения (15.4.7), а считать $A_{\alpha 0}$ независимой переменной интегрирования.

Так и поступим — будем рассматривать $A_{\alpha 0}$ как независимую переменную. Тогда гамильтониан $\int d^3x \mathcal{H}$ очевидным образом оказывается квадратичным по $\Pi_{\alpha i}$, причем коэффициент при квадратичном члене $\Pi_{\alpha i}(x)\Pi_{\beta j}(y)$ дается функцией $(1/2)\delta^4(x-y)\delta_{ij}$, не зависящей от полей. Предполагая, что то же самое справедливо для переменной π_l , соответствующей материи, мы можем вычислить функциональный интеграл по π_l и $\Pi_{\alpha i}$ с точностью до постоянного множителя, просто положив π_l и $\Pi_{\alpha i}$ равными своим значениям в стационарных “точках” действия, соответствующего лагранжиану (15.4.1):

$$0 = \frac{\delta I}{\delta \pi_l} = \partial_0 \psi_l - \frac{\partial \mathcal{H}_M}{\partial \pi_l},$$

$$0 = \frac{\delta I}{\delta \Pi_{\alpha i}} = \partial_0 A_{\alpha i} - \Pi_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha \beta \gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i} = F_{\alpha 0 i} - \Pi_{\alpha i}.$$

Подстановка полученного результата в уравнение (15.4.13) дает

$$I = \int d^4x \left[\mathcal{L}_M + \frac{1}{2} F_{\alpha 0 i} F_{\alpha 0 i} - \frac{1}{4} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} - \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i} \partial_3 A_{\alpha i} + \frac{1}{2} (\partial_3 A_{\alpha 0})^2 \right] = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (14.4.14)$$

где $\mathcal{L}$ — лагранжиан (15.3.1), с которого мы начинали! Другими словами, мы должны выполнить функциональное интегрирование по $\psi_l(x)$ и всем четырем компонентам $A_{\alpha \mu}(x)$ с ковариантным весовым множителем $\exp(iI)$, определяемым уравнениями (15.4.14) и (15.3.1), учитывая, однако, при этом условие аксиальной калибровки, налагаемое множителем

$$\prod_{x, \alpha} \delta(A_{\alpha 3}(x)). \quad (15.4.15)$$

Если операторы $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B, \dots$ калибровочно-инвариантны, то можно написать:

$$\begin{aligned} \langle T\{\mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots\} \rangle_{\text{вакуум}} &\propto \int \left[\prod_{l,x} d\psi_l(x) \right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x) \right] \times \\ &\times \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots \exp\{iI + \epsilon \text{ члены}\} \prod_{x,\alpha} \delta(A_{\alpha 3}(x)), \quad (15.4.16) \end{aligned}$$

причем действие I , являющееся лоренц- и калибровочно-инвариантным, дается формулой (15.4.14).

* * *

В дальнейшем для нас окажется полезным следующее замечание. Элемент меры интегрирования по калибровочным полям

$$\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x),$$

фигурирующий в (15.4.16), является калибровочно-инвариантным в том смысле, что

$$\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\Lambda\alpha\mu}(x) = \prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x), \quad (15.4.17)$$

где $A_{\Lambda\alpha\mu}(x)$ — результат действия на $A_{\alpha\mu}(x)$ калибровочного преобразования с параметрами $\Lambda_\alpha(x)$. Чтобы доказать это утверждение, достаточно показать, что оно справедливо для преобразований, близких к единице, т. е. для преобразований с бесконечно малыми параметрами $\lambda_\alpha(x)$. В этом случае

$$A_{\lambda\alpha}^\mu = A_\alpha^\mu + \partial^\mu \lambda_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_\beta^\mu \lambda_\gamma,$$

так что меры интегрирования связаны соотношением

$$\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\lambda\alpha\mu}(x) = \text{Det}(\mathcal{N}) \prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x),$$

где $\mathcal{N}$ — это “матрица”:

$$\mathcal{N}_{\alpha\mu x, \beta\nu y} = \frac{\delta A_{\lambda\alpha\mu}(x)}{\delta A_{\beta\nu}(y)} = \delta^4(x-y) \delta_\mu^\nu [\delta_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\gamma(x)].$$

Детерминант матрицы $\mathcal{N}$ равен единице с точностью до первого порядка по λ_γ , поскольку след $C_{\alpha\alpha\gamma}$ обращается в нуль.

В этой главе мы будем предполагать, что мера интегрирования $\prod_{n,x} d\psi_n(x)$ по полям материи также калибровочно-инвариантна.

В этом месте имеется несколько тонкостей, к которым мы вернемся в гл. 22. Там будет показано, что высказанное предположение оказывается справедливым в современных неабелевых теориях сильных и электрослабых взаимодействий.

§ 15.5. Метод Фаддеева–Попова–де Витта

Наша формула (15.4.16) для функционального интеграла была выведена в калибровке, удобной для канонического квантования, однако основополагающие вращательная и лоренцева инвариантности теории не являющиеся очевидными из правил Фейнмана, которые могут быть получены из этой формулы. Для того чтобы сделать лоренц-инвариантность правил Фейнмана явной, надо воспользоваться другой калибровкой.

Сначала заметим, что выражение (15.4.16) (с точностью до несущественного постоянного множителя) представляет собой частный случай из общего класса функциональных интегралов вида

$$\mathcal{I} = \int \left[\prod_{n,x} d\phi_n(x) \right] \mathcal{G}[\phi] B[f[\phi]] \text{Det } \mathcal{F}[\phi], \quad (15.5.1)$$

где $\phi_n(x)$ — совокупность калибровочных полей и полей материи, $\prod_{n,x} d\phi_n(x)$ — элемент объема, а $\mathcal{G}[\phi]$ — функционал, аргументами которого являются поля $\phi_n(x)$, удовлетворяющий условию калибровочной инвариантности:

$$\mathcal{G}[\phi_\lambda] \prod_{n,x} d\phi_{\lambda n}(x) = \mathcal{G}[\phi] \prod_{n,x} d\phi_n(x). \quad (15.5.2)$$

Здесь $\phi_{\lambda n}(x)$ — результат действия на поля ϕ калибровочного преобразования с параметром $\lambda_\alpha(x)$. (Обычно когда это условие выполняется, функционал $\mathcal{G}$ и элемент объема инвариантны по отдельности. Однако все, что нам нужно, — это выполнение условия (15.5.2)). Выражение $f_\alpha[\phi; x]$ в формуле (15.5.1) представляет собой калибровочно-неинвариантный “фиксирующий калибровку функционал” этих полей, который, кроме того, зависит также от x и α . Символом $B[f]$ обозначен некоторый числовой функционал, определенный для произвольных функций $f_\alpha(x)$ аргументов x и α , а $\mathcal{F}$ — это “матрица”

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\phi] \equiv \left. \frac{\delta f_\alpha[\phi_\lambda; x]}{\delta \lambda_\beta(y)} \right|_{\lambda=0}. \quad (15.5.3)$$

(В соответствии с нашими обычными обозначениями для функционалов от функций или функционалов, мы предполагаем, что функционал $B[f[\phi]]$ зависит от значений, принимаемых функцией $f_\alpha[\phi, x]$ для всех значений опущенных переменных α и x . При этом переменная, указанная явно, — функция $\phi_n(x)$ — считается фиксированной.) Интеграл вида (15.5.1) не является наиболее общим из всех возможных обобщений интеграла (15.4.16). Мы увидим в § 15.7, что существует более широкое обобщение, необходимое для некоторых целей. Здесь же мы будем использовать интеграл (15.5.1), поскольку он поможет нам прояснить суть формализма, изложенного в § 15.7. Кроме того,

он естественным образом возникает при работе с неабелевыми калибровочными теориями в наиболее удобных калибровках.

Теперь мы должны проверить, что функциональный интеграл (15.4.16) фактически является частным случаем (15.5.1). В формуле (15.4.16) набор полей $\phi_n(x)$ состоит из полей $A_{\alpha\mu}(x)$ и $\psi_l(x)$. Кроме того, имеют место равенства

$$f_\alpha[A, \phi; x] = A_{\alpha 3}(x), \quad (15.5.4)$$

$$B[f] = \prod_{x, \alpha} \delta(f_\alpha(x)), \quad (15.5.5)$$

$$\mathcal{G}[A, \psi] = \exp\{iI + \epsilon \text{ члены}\} \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots, \quad (15.5.6)$$

$$\prod_{n, x} d\phi_n(x) = \left[\prod_{l, x} d\phi_l(x) \right] \left[\prod_{\alpha, \mu, x} dA_\alpha^\mu(x) \right]. \quad (15.5.7)$$

(Мы пренебрегаем здесь различиями между верхними и нижними индексами $\alpha, \beta, \dots$) Сравнение выражения (15.4.16) с формулами (15.5.1)–(15.5.3) показывает, что эти функциональные интегралы с точностью до множителя $\text{Det } \mathcal{F}[\phi]$ совпадают. В частном случае, когда функционал, фиксирующий калибровку, дается формулой (15.5.4), этот множитель не зависит от полей: если $A_\alpha^3(x) = 0$, то изменение поля $A_\alpha^3(x)$ под действием калибровочного преобразования с параметрами $\lambda_\alpha(x)$ есть

$$A_{\lambda\alpha}^3(x) = \partial_3 \lambda_\alpha(x) = \int d^4 y \lambda_\alpha(y) \partial_3 \delta^4(x - y),$$

так что выражение (15.5.3) сводится к “матрице”, не зависящей от полей:

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\phi] = \delta_{\alpha\beta} \partial_3 \delta^4(x - y).$$

По этой причине в калибровке, используемой нами, детерминант, стоящий в формуле (15.5.1), также не зависит от полей. Как было отмечено в гл. 9, множители в функциональном интеграле, не зависящие от полей, влияют только на те члены в выражении для средних и элементов S -матрицы, которые соответствуют вакуумным флуктуациям. Следовательно, эти множители оказываются несущественными при вычислении связанных частей S -матрицы.

Преимущество функционального интеграла (15.4.16), описывающего неабелевые калибровочные теории и являющегося частным случаем функционального интеграла (15.5.1), состоит в том, что работая с ним, мы можем свободно переходить от одной калибровки к другой. Выражаясь более точно, имеет место следующая

Теорема. *Интеграл (15.5.1) на самом деле не зависит (в довольно широких пределах) от функционала $f_\alpha[\phi; x]$, фиксирующего калибровку, а зависимость от выбора функционала $B[f]$ сводится только к несущественному постоянному множителю.*

Доказательство. Заменим в выражении (15.5.1) переменную интегрирования ϕ на новую переменную интегрирования ϕ_Λ , где $\Lambda^\alpha(x)$ — произвольный (но вместе с тем фиксированный) набор параметров калибровочного преобразования:

$$\mathcal{I} = \int \left[\prod_{n,x} d\phi_{\Lambda n}(x) \right] \mathcal{G}[\phi_\Lambda] B[f[\phi_\Lambda]] \text{Det } \mathcal{F}[\phi_\Lambda]. \quad (15.5.8)$$

(Этот шаг тривиален в математическом смысле, поскольку он сводится к простой замене интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ на интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$, и пока никак не использует наши предположения относительно калибровочной инвариантности.) Используем теперь предполагаемую калибровочную инвариантность меры $\text{Pd}\phi$, умноженной на функционал $\mathcal{G}[\phi]$. (Эта инвариантность выражается условием (15.5.2).) В результате выражение (15.5.8) перепишется следующим образом:

$$\mathcal{I} = \int \left[\prod_{n,x} d\phi_n(x) \right] \mathcal{G}[\phi] B[f[\phi_\Lambda]] \text{Det } \mathcal{F}[\phi_\Lambda]. \quad (15.5.9)$$

Поскольку преобразование $\Lambda^\alpha(x)$ произвольное, левая часть полученного выражения не может от него зависеть. Интегрирование по $\Lambda^\alpha(x)$ с некоторым подходящим весовым функционалом $\rho[\Lambda]$ (который мы определим ниже) приводит поэтому к равенству

$$\mathcal{I} \int \left[\prod_{\alpha,x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \rho[\Lambda] = \int \left[\prod_{n,x} d\phi_n(x) \right] \mathcal{G}[\phi] C[\phi], \quad (15.5.10)$$

где

$$C[\phi] \equiv \int \left[\prod_{\alpha,x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \rho[\Lambda] B[f[\phi_\Lambda]] \text{Det } \mathcal{F}[\phi_\Lambda].$$

Из формулы (15.5.3) следует, что

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\phi_\Lambda] = \frac{\delta f_\alpha[(\phi_\Lambda)_\lambda; x]}{\delta \lambda^\beta(y)} \Big|_{\lambda=0}. \quad (15.5.12)$$

Мы предполагаем, что эти преобразования образуют группу, т. е. мы можем записать результат последовательного выполнения калибровочных преобразований с параметрами $\Lambda^\alpha(x)$ и $\lambda^\alpha(x)$ в виде одного “результатирующего” калибровочного преобразования с параметрами $\tilde{\Lambda}^\alpha(x; \Lambda, \lambda)$:

$$(\phi_\Lambda)_\lambda = \phi_{\tilde{\Lambda}(\Lambda, \lambda)}. \quad (15.5.13)$$

Воспользуемся цепным правилом нахождения частных (функциональных) производных:

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\phi_\Lambda] = \int \mathcal{I}_{\alpha x, \gamma z}[\phi, \Lambda] \mathcal{R}_{\beta y}^{\gamma z}[\Lambda] d^4 z, \quad (15.5.14)$$

где

$$\mathcal{J}_{\alpha x, \gamma z}[\phi, \Lambda] \equiv \frac{\delta f_\alpha[\phi_\Lambda; x]}{\delta \tilde{\Lambda}^\gamma(z)} \Big|_{\tilde{\Lambda}=\Lambda} = \frac{\delta f_\alpha[\phi_\Lambda; x]}{\delta \Lambda^\gamma(z)} \quad (15.5.15)$$

и

$$\mathcal{R}_{\beta y}^{\gamma z}[\Lambda] = \frac{\delta \tilde{\Lambda}^\gamma(z; \Lambda, \lambda)}{\delta \lambda^\beta(y)} \Big|_{\lambda=0}. \quad (15.5.16)$$

Отсюда следует, что

$$\text{Det } \mathcal{F}[\phi_\Lambda] = \text{Det } \mathcal{J}[\phi, \Lambda] \text{Det } \mathcal{R}[\Lambda]. \quad (15.5.17)$$

Заметим, что детерминант $\text{Det } \mathcal{J}[\phi, \Lambda]$ есть не что иное, как якобиан преобразования переменных интегрирования от $\Lambda^\alpha(x)$ к $f_\alpha[\phi_\Lambda; x]$ (для фиксированного ϕ). Таким образом, если весовая функция $\rho(\Lambda)$ имеет вид

$$\rho(\Lambda) = \frac{1}{\text{Det } \mathcal{R}[\Lambda]}, \quad (15.5.18)$$

то

$$C[\phi] = \int \left[\prod_{\alpha, x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \text{Det } \mathcal{J}[\phi, \Lambda] B[f[\phi_\Lambda]] = \int \left[\prod_{\alpha, x} df_\alpha(x) \right] B[f] \equiv C. \quad (15.5.19)$$

Очевидно, что последнее выражение не зависит от ϕ . (Читатель, возможно, узнает в (15.5.18) инвариантную меру (Хаара) на пространстве групповых параметров). В итоге мы получаем

$$\mathcal{J} = \frac{C \int \left[\prod_{n, x} d\phi_n(x) \right] \mathcal{G}[\phi]}{\int \left[\prod_{\alpha, x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \rho[\Lambda]}. \quad (15.5.20)$$

Очевидно, что это выражение не зависит от выбора функционала $f_\alpha[\phi; x]$, сведенного нами к простой переменной интегрирования, а от $B[f]$ зависит только за счет константы C . Это и требовалось доказать.

Прежде чем перейти к применениям этой теоремы, необходимо остановиться и обратить внимание на одну тонкость, использованную при ее выводе. Интегралы в числителе и знаменателе (15.5.20) плохо определены по одной и той же причине. В силу того что функционал $\mathcal{G}[\phi]$ предполагается калибровочно-инвариантным, интеграл от него по ϕ не может сходить; подынтегральное выражение остается постоянным вдоль каждой из “орбит”, образующихся в результате преобразования полей ϕ со всеми возможными $\lambda^\alpha(x)$ ($\phi \rightarrow \phi_\lambda$). Расходится и интеграл в знаменателе, поскольку произведение $\rho(\Lambda) \prod d\Lambda$ есть не что иное, как обычный инвариантный элемент объема для интегрирования по калибровочной группе, а этот элемент также постоянен вдоль “орбит” $\Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}(\Lambda, \lambda)$. Расходимость в числителе и знаменателе выражения (15.5.20) может быть устранена

путем формулировки теории на конечной пространственно-временной решетке. В этом случае объем калибровочной группы равен объему глобальной группы Ли, умноженной на число узлов решетки. Поскольку множитель $B[f]$, фиксирующий калибровку, устраняет эту расходимость в исходном определении (15.5.1) левой части формулы (15.5.20), можно справедливо полагать, что при стремлении числа узлов решетки к бесконечности расходимости в числителе и знаменателе в правой части формулы (15.5.20) сокращаются.

Перейдем теперь к применению доказанной теоремы. Мы видели, что вакуумное среднее (15.4.16) в аксиальной калибровке дается функциональным интегралом общего вида (15.5.1). Вооруженные вышеизложенной теоремой, мы заключаем, что

$$\langle T\{\mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots\} \rangle_V \propto \int \left[\prod_{l,x} d\psi_l(x) \right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA_\alpha^\mu(x) \right] \times \\ \times \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots \exp\{iI + \epsilon \text{ члены}\} B[f[A, \psi]] \text{Det } \mathcal{F}[A, \psi] \quad (15.5.21)$$

при (почти) любом выборе функционалов $f_\alpha[A, \psi; x]$ и $B[f]$. Следовательно, теперь мы можем свободно использовать формулу (15.5.21) для вывода правил Фейнмана в более удобной калибровке.

Функциональные интегралы, которые мы умеем брать, — это интегралы от произведения гауссианов и полиномов. Поэтому в общем случае мы положим

$$B[f] = \exp\left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x f_\alpha(x) f_\alpha(x)\right), \quad (15.5.22)$$

где ξ — произвольный вещественный параметр. При таком выборе вклад множителя B в (15.5.21) сводится к дополнительному слагаемому в эффективном лагранжиане:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha. \quad (15.5.23)$$

Простейшая лоренц-инвариантная функция f_α , фиксирующая калибровку, точно такая же, как и в электродинамике:

$$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu. \quad (15.5.24)$$

Поэтому “голый” пропагатор калибровочного поля может быть вычислен тем же образом, что и в квантовой электродинамике. Часть эффективного действия, соответствующая свободному векторному бозону, может быть записана в виде

$$I_{0A} = - \int d^4x \left[\frac{1}{4} (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) (\partial^\mu A_\alpha^\nu - \partial^\nu A_\alpha^\mu) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\alpha^\mu) (\partial_\nu A_\alpha^\nu) + \epsilon \text{ члены} \right] = -\frac{1}{2} \int d^4x \mathcal{D}_{\alpha\mu x, \beta\nu y} A_\alpha^\mu(x) A_\beta^\nu(y),$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\alpha\mu x, \beta\nu y} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial y_\lambda} \delta^4(x-y) \delta_{\alpha\beta} - \\ &- \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \delta^4(x-y) \delta_{\alpha\beta} + \epsilon \text{ члены} = \\ &= (2\pi)^{-4} \delta_{\alpha\beta} \int d^4 p \left[\eta_{\mu\nu} (p^2 - i\epsilon) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p_\mu p_\nu \right] e^{ip \cdot (x-y)}.\end{aligned}$$

Обратив матрицу в квадратных скобках, мы получим пропагатор:

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha\mu, \beta\nu}(x, y) &= (\mathcal{D}^{-1})_{\alpha\mu x, \beta\nu y} = \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4 p \left[\eta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 - i\epsilon}.\end{aligned}\quad (15.5.25)$$

Это выражение записано в калибровке, обобщающей калибровки Ландау и Фейнмана, которые возникают, если положить соответственно $\xi = 0$ и $\xi = 1$. При $\xi \rightarrow 0$ функционал (15.5.22) быстро осциллирует всюду, кроме окрестности $f_\alpha = 0$, и поэтому эквивалентен дельта-функции, обеспечивая выполнение калибровочного условия Ландау $\partial_\mu A^\mu = 0$. Это естественным образом приводит к тому, что пропагатор удовлетворяет соответствующему условию $\partial^\mu \Delta_{\alpha\mu, \beta\nu} = 0$. При ненулевых значениях ξ функционал $B[f]$ не производит автоматический отбор калибровочных полей, удовлетворяющих какому-либо определенному калибровочному условию на поле $A_{\alpha\mu}$. Тем не менее обычно выражение (15.5.25) называют пропагатором в “обобщенной калибровке Фейнмана” или “обобщенной ξ -калибровке”. Зачастую хорошей стратегией является вычисление физических амплитуд при произвольном ξ и затем, в конце вычисления, проверка независимости результата от ξ .

С одной единственной оговоркой, правила Фейнмана теперь становятся очевидными: вклады вершин можно записать, взглянув на те члены в исходном лагранжиане $\mathcal{L}$, которые описывают взаимодействие; пропагаторы калибровочных полей даются формулой (15.5.25), а пропагаторы полей материи вычисляются так же, как и раньше. Более точно, трилинейное взаимодействие в $\mathcal{L}$

$$-\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) A_\beta^\mu A_\gamma^\nu$$

соответствует вершине, в которой начинаются три векторно-бозонные линии. Если эти линии несут (входящие) импульсы p, q, k , а также лоренцевы и калибровочные индексы $\mu\alpha, \nu\beta, \rho\gamma$, то, согласно правилам Фейнмана в импульсном пространстве, вклад такой вершины в подынтегральное выражение равен

$$\begin{aligned}i(2\pi)^4 \delta^4(p+q+k) [-iC_{\alpha\beta\gamma}] [p_\nu \eta_{\mu\lambda} - p_\lambda \eta_{\mu\nu} + q_\lambda \eta_{\nu\mu} - \\ - q_\mu \eta_{\nu\lambda} + k_\mu \eta_{\lambda\nu} - k_\nu \eta_{\lambda\mu}].\end{aligned}\quad (15.5.26)$$

Аналогично, взаимодействию A^4 в $\mathcal{L}$,

$$-\frac{1}{4} C_{\epsilon\alpha\beta} C_{\epsilon\gamma\delta} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_{\gamma}^{\mu} A_{\delta}^{\nu},$$

соответствует вершина, в которой начинаются четыре векторно-бозонные линии. Если эти линии несут (входящие) импульсы p, q, k, l , а также лоренцевы и калибровочные индексы $\mu\alpha, \nu\beta, \rho\gamma, \sigma\delta$, то вклад такой вершины в подынтегральное выражение равен

$$i(2\pi)^4 \delta^4(p + q + k + l) \times [-C_{\epsilon\alpha\beta} C_{\epsilon\gamma\delta} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) - \\ - C_{\epsilon\alpha\gamma} C_{\epsilon\delta\beta} (\eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho}) - C_{\epsilon\alpha\delta} C_{\epsilon\beta\gamma} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\sigma\nu})]. \quad (15.5.27)$$

(Вспомним, что структурные константы $C_{\alpha\beta\gamma}$ содержат константы связи, а потому множители (15.5.26) и (15.5.27) являются величинами соответственно первого и второго порядка по константам связи).

Единственная трудность, связанная с правилами Фейнмана, которая еще не обсуждалась нами, — это наличие в формуле (15.5.21) множителя $\text{Det } \mathcal{F}$, который для произвольно выбранных калибровок не является константой. В следующем параграфе мы займемся его изучением.

§ 15.6. Духи

Выясним теперь, каким образом множитель $\text{Det } \mathcal{F}$ в уравнении (15.5.21) модифицирует правила Фейнмана для неабелевой калибровочной теории. Для этого вспомним, что, как показано в § 9.5, определитель любой матрицы $\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}$ может быть представлен в виде функционального интеграла:

$$\text{Det } \mathcal{F} \propto \int \left[\prod_{\alpha, x} d\omega_{\alpha}^*(x) \right] \left[\prod_{\alpha, x} d\omega_{\alpha}(x) \right] \exp(iI_{GH}), \quad (15.6.1)$$

где

$$I_{GH} \equiv \int d^4x d^4y \omega_{\alpha}^*(x) \omega_{\beta}(y) \mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}. \quad (15.6.2)$$

Здесь ω_{α}^* и ω_{α} — набор независимых антикоммутирующих классических переменных, а константа пропорциональности не зависит от полей. (Если полевые переменные ω_{α} и ω_{α}^* являются фермионными, функциональный интеграл оказывается пропорциональным множителю $\text{Det } \mathcal{F}$; если бы мы выбрали бозонные полевые переменные, он был бы пропорционален $(\text{Det } \mathcal{F})^{-1}$.) Поля ω_{α}^* и ω_{α} не обязательно являются комплексно сопряженными друг другу; в действительности, как мы увидим в § 15.7, для некоторых целей необходимо считать, что ω_{α}^* и ω_{α} являются независимыми *вещественными* переменными. Учет множителя $\text{Det } \mathcal{F}$ приводит к эффекту, аналогичному включению $I_{GH}(\omega_{\alpha}^*, \omega_{\alpha}^*)$ в полное эффективное действие и интегрированию по “полям” ω_{α} и ω_{α}^* . Таким образом, для любых фиксирующих калибров-

ку функционалов $f_\alpha(x)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \langle T\{\mathcal{O}_A \dots\} \rangle_V &\propto \int \left[\prod_{n,x} d\psi_n(x) \right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x) \right] \times \\ &\times \left[\prod_{\alpha,x} d\omega_\alpha(x) d\omega_\alpha^*(x) \right] \exp(iI_{\text{мод}}[\psi, A, \omega, \omega^*]) \mathcal{O}_A \dots, \end{aligned} \quad (15.6.3)$$

где $I_{\text{мод}}$ — модифицированное действие

$$I_{\text{мод}} = \int d^4x \left[\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha \right] + I_{GH}. \quad (15.6.4)$$

Поля ω_α и ω_α^* являются лоренцевыми скалярами (по крайней мере в ковариантных калибровках), однако удовлетворяют ферми-статистике. В действительности связь между спином и статистикой в этом случае не нарушается, поскольку начальные или конечные состояния не могут содержать частиц, которые описываются этими полями. По этой причине ω_α и ω_α^* называют полями “духов” и “анти-духов”. Анализируя интеграл (15.6.2), можно видеть, что имеет место закон сохранения “числа духов”, равного $+1$ для ω_α , -1 для ω_α^* и нулю для любых других полей.

Правила Фейнмана для духов оказываются особенно простыми в случае, когда “матрица” $\mathcal{F}$ может быть представлена в виде суммы

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1, \quad (15.6.5)$$

где величина $\mathcal{F}_0$ не зависит от полей и имеет нулевой порядок по константам связи, а величина $\mathcal{F}_1$ наоборот, зависит от полей и пропорциональна константам связи в первой или более высокой степени. Духовый пропагатор имеет вид

$$\Delta_{\alpha\beta}(x, y) = -(\mathcal{F}_0^{-1})_{\alpha\beta, yx}, \quad (15.6.6)$$

а вершины определяются слагаемым, соответствующим взаимодействию

$$I'_{GH} = \int d^4x d^4y \omega_\alpha^*(x) \omega_\beta(y) (\mathcal{F}_1)_{\alpha\beta, yx}. \quad (15.6.7)$$

Например, в обобщенной ξ -калибровке, о которой шла речь в предыдущем параграфе, мы имеем

$$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu, \quad (15.6.8)$$

а для инфинитезимальных калибровочных параметров λ_α правило преобразования (15.1.9) дает

$$A_{\alpha\lambda}^\mu = A_\alpha^\mu + \partial^\mu \lambda_\alpha + C_{\alpha\gamma\beta} \lambda_\beta A_\gamma^\mu,$$

так что

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta, yx} = \left. \frac{\delta \partial_\mu A_{\alpha\lambda}^\mu(x)}{\delta \lambda_\beta(y)} \right|_{\lambda=0} = \square \delta^4(x-y) + C_{\alpha\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [A_\gamma^\mu(x) \delta^4(x-y)]. \quad (15.6.9)$$

Это выражение имеет вид (15.6.5), при этом

$$(\mathcal{F}_0)_{\alpha x, \beta y} = \square \delta^4(x - y) \delta_{\alpha\beta}, \quad (15.6.10)$$

$$(\mathcal{F}_1)_{\alpha x, \beta y} = -C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [A_\gamma^\mu(x) \delta^4(x - y)]. \quad (15.6.11)$$

Из формул (15.6.6) и (15.6.10) можно видеть, что пропагатор духов равен

$$\Delta_{\alpha\beta}(x, y) = \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^{-4} \int d^4 p (p^2 - i\epsilon)^{-1} e^{ip \cdot (x-y)}, \quad (15.6.12)$$

так что в этой калибровке духи ведут себя как бесспиновые фермионы нулевой массы, которые преобразуются согласно присоединенному представлению калибровочной группы. Используя выражения (15.6.7), (15.6.11) и интегрируя по частям, можно найти, что слагаемое в действии, соответствующее взаимодействию духов, равно

$$I'_{GH} = \int d^4 x C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \omega_\alpha^*}{\partial x^\mu} A_\gamma^\mu \omega_\beta. \quad (15.6.13)$$

Это взаимодействие отвечает вершине, к которой присоединена одна выходящая духовая линия, одна входящая духовая линия и одна векторно-бозонная линия. Если эти линии несут (входящие) импульсы p, q, k соответственно и индексы калибровочной группы α, β, γ соответственно, а калибровочное поле имеет векторный индекс μ , то вклад такой вершины в подынтегральное выражение согласно правилам Фейнмана в импульсном пространстве задается формулой

$$i(2\pi)^4 \delta^4(p + q + k) \times ip_\mu C_{\alpha\beta\gamma}. \quad (15.6.14)$$

Духи распространяются в петлях; при этом к каждой вершине вдоль петли присоединена одна векторно-бозонная линия, и каждой петле соответствует дополнительный знак “минус”, как это имеет место для фермионных полевых переменных.

Дополнительный знак “минус” для духовых петель наводит на мысль, что каждое духовое поле ω_α вместе с соответствующим антидуховым полем ω_α^* представляет собой нечто вроде “отрицательной” степени свободы. Эти “отрицательные” степени свободы необходимы, поскольку при работе с ковариантными пропагаторами калибровочных полей мы используем большее число степеней свободы, чем есть на самом деле; физическими степенями свободы являются компоненты $A_\alpha^\mu(x)$ за вычетом параметров $\Lambda_\alpha(x)$, необходимых для описания калибровочного преобразования.

В результате модифицированное действие (15.6.4) может быть записано в обобщенной ξ -калибровке как

$$I_{\text{мод}} = \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{мод}} \quad (15.6.15)$$

с модифицированной лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L}_{\text{мод}} = \mathcal{L}_M - \frac{1}{4} F_{\alpha}^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_{\mu} A_{\alpha}^{\mu})(\partial_{\nu} A_{\alpha}^{\nu}) - \\ - \partial_{\mu} \omega_{\alpha}^{*} \partial^{\mu} \omega_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_{\mu} \omega_{\alpha}^{*}) A_{\gamma}^{\mu} \omega_{\beta}. \quad (15.6.16)$$

Важно, что этот лагранжиан является *перенормируемым* (если перенормируем лагранжиан материи $\mathcal{L}_M$) в обычном смысле: вклады в него включают произведения полей и их производных с суммарной (массовой) размерностью 4 или меньше (кинетический член $\partial_{\mu} \omega_{\alpha}^{*} \partial^{\mu} \omega_{\alpha}$ в выражении (15.6.16) фиксирует размерность полей ω_{α} и ω_{α}^{*} равной массе в первой степени, как у обычных скалярных и калибровочных полей). Однако для проверки перенормируемости подсчета степеней недостаточно; необходимо также, чтобы для всякой расходимости существовал нейтрализующий ее контрчлен. В следующем параграфе мы обсудим свойства одной замечательной симметрии, посредством учета которой можно показать (см. § 17.2), что неабелевы калибровочные теории действительно являются перенормируемыми. Подобный метод квантования калибровочных полей является столь же мощным, как и подход Фаддеева–Попова–де Витта, которому мы следовали до сих пор.

§ 15.7. БРСТ-симметрия

Хотя описанный в предыдущих двух параграфах метод Фаддеева–Попова–де Витта позволяет сохранить явную лоренц-инвариантность теории на каждом этапе вычисления, он тем не менее основан на выборе калибровки и, таким образом, скрывает калибровочную инвариантность теории. Это приводит к серьезным проблемам при доказательстве ее перенормируемости — калибровочная инвариантность накладывает ограничения на форму контрчленов в лагранжиане. Мы не можем быть уверенными в том, что после выбора калибровки в вычислениях не возникнут новые нефизические бесконечности.

Имеет место, однако, замечательный факт, заключающийся в том, что даже после того как калибровка выбрана, функциональный интеграл все еще обладает симметрией, связанной с калибровочной инвариантностью. Она была открыта Беччи, Руэ и Стора [10] (а также независимо о них Тютиним [11]) в 1975 г., несколько лет спустя после работ Фаддеева, Попова и де Витта и получила в честь ее авторов название БРСТ-симметрии. Далее мы будем следовать в большой степени оригинальным работам, в которых БРСТ-симметрия была выведена как результат применения метода Фаддеева, Попова и де Витта, однако, как мы увидим, основанный на ней подход можно считать альтернативным этому методу.

Как можно видеть из (15.6.3) и (15.6.4), правила Фейнмана для неабелевой калибровочной теории могут быть получены из функцио-

нального интеграла по полям материи, калибровочным и духовым полям с модифицированным действием вида

$$I_{\text{мод}} = I_{\text{эф}} + I_{GH} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{мод}}, \quad (15.7.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{мод}} \equiv \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha + \omega_\alpha^* \Delta_\alpha, \quad (15.7.2)$$

где

$$\Delta_\alpha(x) \equiv \int d^4y \mathcal{T}_{\alpha x, \beta y} [A, \psi] \omega_\beta(y). \quad (15.7.3)$$

При этом в (15.5.21) мы выбираем следующий фиксирующий калибровку функционал:

$$B[f] \propto \exp\left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x f_\alpha f_\alpha\right). \quad (15.7.4)$$

Для дальнейшего анализа удобно представить $B[f]$ в виде интеграла Фурье:

$$B[f] = \int \left[\prod_{\alpha, x} dh_\alpha(x) \right] \exp\left[\frac{i\xi}{2} \int d^4x h_\alpha h_\alpha\right] \exp\left[i \int d^4x f_\alpha h_\alpha\right]. \quad (15.7.5)$$

Теперь нужно выполнить функциональное интегрирование по полям h_α (получившим название “полей Наканиши-Лаутрупа” [11a]), а также по полям материи, калибровочным, духовым и антидуховым полям с новым модифицированным действием

$$I_{\text{нов}} = \int d^4x \left(\mathcal{L} + \omega_\alpha^* \Delta_\alpha + h_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2} \xi h_\alpha h_\alpha \right). \quad (15.7.6)$$

Это модифицированное действие не является калибровочно-инвариантным, однако в этом случае с ним проще работать. Оказывается, что оно инвариантно относительно преобразований БРСТ-симметрии, параметризованных бесконечно малой константой θ , которая *антикоммутирует* с ω_α , ω_α^* и всеми фермионными полями материи. Для данного θ БРСТ-преобразование определяется выражениями

$$\delta_\theta \psi = i t_\alpha \theta \omega_\alpha \psi, \quad (15.7.7)$$

$$\delta_\theta A_{\alpha\mu} = \theta D_\mu \omega_\alpha = \theta [\partial_\mu \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma], \quad (15.7.8)$$

$$\delta_\theta \omega_\alpha^* = -\theta h_\alpha, \quad (15.7.9)$$

$$\delta_\theta \omega_\alpha = -\frac{1}{2} \theta C_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \omega_\gamma, \quad (15.7.10)$$

$$\delta_\theta h_\alpha = 0. \quad (15.7.11)$$

(Напомним, что в фермионных функциональных интегралах нет связи между ω_α и ω_α^* , так что выражение (15.7.9) не обязательно должно быть комплексно сопряженным к (15.7.10).) Поскольку величина h_α

БРСТ-инвариантна, при желании можно заменить гауссов множитель $\exp((1/2)i\xi \int h_\alpha h_\alpha)$ в (15.7.5) на произвольный гладкий функционал от h_α и построить произвольный функционал $B[f]$. При этом БРСТ-инвариантность действия не нарушается. Однако для диаграммных вычислений и проведения перенормировок будет полезно оставить $B[f]$ гауссовым.

При проверке инвариантности действия (15.7.1) полезно заметить, что преобразование (15.7.7)–(15.7.11) является *нильпотентным*, т. е. если F — произвольный функционал от ψ , A , ω_α , ω_α^* и h , а sF определяется согласно

$$\delta_\theta F \equiv \theta sF, \quad (15.7.12)$$

то¹⁾

$$\delta_\theta(sF) = 0, \quad (15.7.13)$$

или, что эквивалентно,

$$s(sF) = 0. \quad (15.7.14)$$

Нильпотентность δ_θ при действии на отдельное поле проверяется непосредственно. Во-первых, при действии на поле материи имеем

$$\begin{aligned} \delta_\theta s\psi &= it_\alpha \delta_\theta(\omega_\alpha, \psi) = -\frac{1}{2} iC_{\alpha\beta\gamma} t_\alpha \theta \omega_\beta \omega_\gamma \psi - t_\alpha t_\beta \omega_\alpha \theta \omega_\beta \psi = \\ &= -\frac{1}{2} iC_{\alpha\beta\gamma} t_\alpha \theta \omega_\beta \omega_\gamma \psi + t_\alpha t_\beta \theta \omega_\alpha \omega_\beta \psi. \end{aligned}$$

Произведение $\omega_\alpha \omega_\beta$ во втором члене в правой части является антисимметричным по α и β , так что в этом слагаемом $t_\alpha t_\beta$ можно заменить на $(1/2)[t_\alpha, t_\beta]$. Таким образом, второй член взаимно уничтожается с первым:

$$ss\psi = 0. \quad (15.7.15)$$

Далее, действуя на калибровочное поле, имеем

$$\begin{aligned} \delta_\theta sA_{\alpha\mu} &= \delta_\theta D_\mu \omega_\alpha = \partial_\mu \delta_\theta \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} \delta_\theta A_{\beta\mu} \omega_\gamma + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \delta_\theta \omega_\gamma = \\ &= \theta \left(-\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} \partial_\mu (\omega_\beta \omega_\gamma) + C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\beta) \omega_\gamma + \right. \\ &\quad \left. + C_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\delta\epsilon} A_{\delta\mu} \omega_\epsilon \omega_\gamma - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} A_{\beta\mu} \omega_\delta \omega_\epsilon \right) = \\ &= \theta \left(\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\beta) \omega_\gamma + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\gamma) \omega_\beta - \right. \\ &\quad \left. - C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} A_{\delta\mu} \omega_\epsilon \omega_\beta - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} A_{\beta\mu} \omega_\delta \omega_\epsilon \right). \end{aligned}$$

¹⁾ В оригинальных работах по БРСТ-симметрии функционал $B[f]$ имел вид (15.7.4). Поэтому в (15.7.9) величина h_α заменялась на $-f_\alpha/\xi$, а БРСТ-преобразование оказывалось нильпотентным лишь при действии на функции, зависящие от ω_α , калибровочных полей и полей материи, но не от ω_α^* .

Первые два члена окончательного выражения взаимно уничтожаются, поскольку $C_{\alpha\beta\gamma}$ антисимметрично по β и γ , а третий и четвертый члены уничтожаются в силу тождества Якоби (15.1.5). Таким образом,

$$ssA_{\alpha\mu} = 0. \quad (15.7.16)$$

Правила преобразования (15.7.9) и (15.7.11) немедленно показывают, что

$$ss\omega_\alpha^* = 0 \quad (15.7.17)$$

и

$$ssh_\alpha = 0. \quad (15.7.18)$$

Наконец, имеем

$$\begin{aligned} \delta_\theta s\omega_\alpha &= -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} \delta_\theta(\omega_\beta\omega_\gamma) = \\ &= \frac{1}{4} \theta(C_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\delta\epsilon} \omega_\delta\omega_\epsilon\omega_\gamma - C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} \omega_\beta\omega_\delta\omega_\epsilon) = \frac{1}{2} \theta C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} \omega_\delta\omega_\epsilon\omega_\beta. \end{aligned}$$

Произведение $\omega_\beta\omega_\delta\omega_\epsilon$ антисимметрично, и это выражение согласно тождеству Якоби (15.1.5) также обращается в нуль:

$$ss\omega_\alpha = 0. \quad (15.7.19)$$

Рассмотрим теперь произведение двух полей ϕ_1 и ϕ_2 , каждым из которых могут быть поля ψ , A , ω_α , ω_α^* или h ; причем поля в паре не обязательно определены в одной и той же точке пространства-времени. Тогда

$$\delta_\theta(\phi_1\phi_2) = \theta(s\phi_1)\phi_2 + \phi_1\theta(s\phi_2) = \theta[(s\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1 s\phi_2],$$

где “ $\pm$ ” означает “+”, если ϕ_1 — бозонное поле, и “−”, если ϕ_1 — фермионное поле. То есть

$$s(\phi_1\phi_2) = (s\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1 s\phi_2.$$

Поскольку, как было показано, $\delta_\theta(s\phi_1) = \delta_\theta(s\phi_2) = 0$, результат действия БРСТ-преобразования на $s(\phi_1\phi_2)$ имеет вид

$$\delta_\theta s(\phi_1\phi_2) = (s\phi_1)\theta(s\phi_2) \pm \theta(s\phi_1)(s\phi_2).$$

Но статистика $s\phi$ всегда противоположна статистике ϕ , так что перенос θ влево в первом члене правой части вносит знаковый множитель $\mp$:

$$\delta_\theta s(\phi_1\phi_2) = \theta[\mp(s\phi_1)(s\phi_2) \pm (s\phi_1)(s\phi_2)] = 0.$$

Далее, легко видеть, что БРСТ-преобразования оказываются нильпотентными при действии на любое произведение полей, взятых в произвольных точках пространства-времени:

$$\delta_\theta s(\phi_1\phi_2\phi_3 \dots) = 0.$$

Любой функционал $F[\phi]$ может быть представлен в виде суммы кратных интегралов от таких произведений с c -числовыми коэффициентами, так что

$$\delta_\theta sF[\phi] = \theta ssF[\phi] = 0. \quad (15.7.20)$$

Это завершает доказательство нильпотентности БРСТ-преобразования.

Вернемся теперь к проверке БРСТ-инвариантности действия (15.7.6). Заметим сначала, что для любого функционала полей материи или калибровочных полей БРСТ-преобразование имеет вид калибровочного преобразования с инфинитезимальным калибровочным параметром

$$\lambda_\alpha(x) = \theta \omega_\alpha(x). \quad (15.7.21)$$

Следовательно, первый член в действии (17.7.6) автоматически оказывается БРСТ-инвариантным:

$$\delta_\theta \int d^4x \mathcal{L} = 0. \quad (15.7.22)$$

Для вычисления результата действия БРСТ-преобразования на оставшуюся часть действия (15.7.6) заметим, что его действие на фиксирующую калибровку функцию дает калибровочное преобразование (15.7.21), так что

$$\begin{aligned} \delta_\theta f_\alpha[x; A, \psi] &= \int \frac{\delta f_\alpha[x; A_\lambda, \psi_\lambda]}{\delta \lambda^\beta(y)} \Big|_{\lambda=0} \theta \omega_\beta(y) d^4y = \\ &= \theta \int \mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[A, \psi] \omega_\beta(y) d^4y. \end{aligned}$$

Выражая ответ через величину (15.7.3), имеем

$$\delta_\theta f_\alpha[x; A, \psi] = \theta \Delta_\alpha(x; A, \psi, \omega). \quad (15.7.23)$$

(Заметим, что $\mathcal{F}$ — бозонная величина, так что здесь при переносе θ влево не возникает изменения знака.) Вспомним также, что $\delta_\theta \omega_\alpha^* = -\theta h_\alpha$ и $\delta_\theta h_\alpha = 0$. Следовательно, члены подынтегрального выражения “нового” действия (15.7.6), не входящие в $\mathcal{L}$, могут быть представлены в виде

$$\omega_\alpha^* \Delta_\alpha + h_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2} \xi h_\alpha h_\alpha = s \left(\omega_\alpha^* f_\alpha + \frac{1}{2} \xi \omega_\alpha^* h_\alpha \right), \quad (15.7.24)$$

или, другими словами,

$$I_{\text{нов}} = \int d^4x \mathcal{L} + s\Psi, \quad (15.7.25)$$

где

$$\Psi \equiv - \int d^4x (\omega_\alpha^* f_\alpha + \frac{1}{2} \xi \omega_\alpha^* h_\alpha). \quad (15.7.26)$$

Нильпотентность БРСТ-преобразования приводит к тому, что слабое $s\Psi$, так же как и $\int d^4x \mathcal{L}$, оказывается БРСТ-инвариантным.

В некотором смысле имеет место и обратное утверждение: как мы увидим в § 17.2, перенормируемый лагранжиан, обладающий БРСТ-симметрией и другими симметриями лагранжиана (15.7.25), должен с точностью до значений различных постоянных коэффициентов иметь вид (15.7.25). Однако этого недостаточно для установления перенормируемости теории. Преобразования БРСТ-симметрии

действуют на поля нелинейным образом, и поэтому между симметриями лагранжиана и симметриями матричных элементов или функций Грина не существует простой связи. С помощью методов внешнего поля, представленных в следующей главе, в § 17.2 будет установлено, что расходящиеся ультрафиолетовым образом слагаемые в фейнмановских амплитудах подчиняются некоторого рода перенормированной БРСТ-инвариантности (однако это неверно для конечных частей), что позволяет завершить доказательство перенормируемости.

Из выражения (15.7.25) следует, что физическая составляющая любой калибровочной теории содержится в *ядре* БРСТ-оператора (т. е. в общем БРСТ-инвариантном выражении $\int d^4x \mathcal{L} + s\Psi$), определенном по модулю объектов из *образа* БРСТ-преобразования, т. е. выражений вида $s\Psi$. Элементы ядра с точностью до образов некоторого нильпотентного оператора составляют так называемые *когомологии* соответствующего преобразования. Физическая составляющая калибровочной теории может быть отождествлена с когомологиями БРСТ-оператора и в ином смысле [12]. Условие того, что матричные элементы переходов между физическими состояниями не должны зависеть от фиксирующей калибровку функции f_α , или, другими словами, от функционала Ψ в (15.7.25), является фундаментальным. Изменение любого матричного элемента $\langle\alpha|\beta\rangle$ в результате изменения Ψ на $\delta\Psi$ равно

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle = i\langle\alpha|\tilde{\delta}I_{\text{нов}}|\beta\rangle = i\langle\alpha|s\tilde{\delta}\Psi|\beta\rangle. \quad (15.7.27)$$

(Здесь значок “тильда” используется для того, чтобы отличать произвольные изменения фиксирующей калибровку функции от БРСТ- или калибровочных преобразований.) Можно ввести фермионный БРСТ-“заряд” Q , который определяется так, что для любого полевого оператора Φ

$$\delta_\theta\Phi = i[\theta Q, \Phi] = i\theta[Q, \Phi]_\mp,$$

или, другими словами,

$$[Q, \Phi]_\mp = is\Phi, \quad (15.7.28)$$

где знак “−” или “+” выбирается в зависимости от того, бозонным или фермионным является поле Φ . Нильпотентность БРСТ-преобразования теперь приводит к равенству

$$0 = -ss\Phi = [Q, [Q, \Phi]_\mp]_\pm = [Q^2, \Phi]_-.$$

Для того чтобы это соотношение выполнялось для любых операторов Φ , необходимо, чтобы величина Q^2 обращалась в нуль либо была пропорциональна единичному оператору. Однако оператор Q^2 не может быть пропорционален единичному, поскольку он имеет ненулевое духовое квантовое число²⁾. Таким образом, величина Q^2 должна

²⁾ Вспомним, что духовое квантовое число определяется как +1 для ω_α , −1 для ω_α^* и 0 для других калибровочных полей и полей материи.

обращаться в нуль:

$$Q^2 = 0. \quad (15.7.29)$$

Из (15.7.27) и (15.7.28) имеем

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|[Q, \tilde{\delta}\Psi]|\beta\rangle. \quad (15.7.30)$$

Последнее выражение обращается в нуль для любой $\tilde{\delta}\Psi$, если выполняется

$$\langle\alpha|Q = Q|\beta\rangle = 0. \quad (15.7.31)$$

Таким образом, физические состояния содержатся в ядре нильпотентного оператора Q . Любые два состояния, отличающиеся только на вектор из образа Q , т.е. состояние вида $Q|\dots\rangle$, очевидным образом имеют одинаковые матричные элементы при переходе в любое другое физическое состояние и поэтому являются физически эквивалентными. Следовательно, *независимые* физические состояния соответствуют состояниям из ядра оператора Q по модулю образа Q , т.е. принадлежат когомологии Q .

В качестве иллюстрации рассмотрим чистую электродинамику³⁾. Выбирая фиксирующую калибровку функцию в виде $f = \partial_\mu A^\mu$ и интегрируя по вспомогательному полю h , мы получаем БРСТ-преобразование (15.7.8)–(15.7.10) в виде

$$sA_\mu = \partial_\mu \omega, \quad s\omega^* = \partial_\mu A^\mu / \xi, \quad s\omega = 0. \quad (15.7.32)$$

Будем раскладывать поля в интеграл по нормальным модам⁴⁾:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} [a^\mu(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + a^{\mu*}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}], \\ \omega(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} [c(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + c^*(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}], \\ \omega^*(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} [b(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + b^*(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (15.7.33)$$

³⁾ Равенства (15.6.11) и (15.6.7) показывают, что благодаря обращению в нуль структурных констант в чистой электродинамике духи не взаимодействуют с другими полями. Тем не менее на примере электродинамики можно легко показать, насколько удобно использование БРСТ-симметрии для отождествления физических состояний. В самом деле, анализируя “*in*”- и “*out*”-состояния, мы не учитываем взаимодействие, поэтому неабелевы калибровочные теории могут рассматриваться как набор нескольких копий квантовой электродинамики.

⁴⁾ Здесь $\omega^*(x)$ не следует понимать как эрмитово сопряженную к $\omega(x)$ величину. Точно так же, b^* и c^* не являются сопряженными к c и b . Однако, так как $A^\mu(x)$ является эрмитовым, оператор $\omega(x)$ эрмитов в случае, если эрмитов оператор Q .

Сопоставляя коэффициенты при $e^{\pm ip \cdot x}$ в обеих частях равенства (15.7.28), имеем

$$\begin{aligned} [Q, a^\mu(\mathbf{p})]_- &= -p^\mu c(\mathbf{p}), & [Q, a^{\mu*}(\mathbf{p})]_- &= p^\mu c^*(\mathbf{p}), \\ [Q, b(\mathbf{p})]_+ &= p^\mu a_\mu(\mathbf{p})/\xi, & [Q, b^*(\mathbf{p})]_+ &= p^\mu a_\mu^*(\mathbf{p})/\xi, \\ [Q, c(\mathbf{p})]_+ &= [Q, c^*(\mathbf{p})]_+ = 0. \end{aligned} \quad (15.7.34)$$

Рассмотрим произвольное состояние $|\psi\rangle$, удовлетворяющее условию “физичности” (15.7.31):

$$Q|\psi\rangle = 0. \quad (15.7.35)$$

Состояния $|e, \psi\rangle = e_\mu a^{\mu*}(\mathbf{p})|\psi\rangle$ с одним дополнительным фотоном тогда удовлетворяют условию $Q|e, \psi\rangle = 0$, если $e_\mu p^\mu = 0$. Кроме того, состояние $|\psi\rangle' \equiv b^*(\mathbf{p})|\psi\rangle$ удовлетворяет

$$Q|\psi\rangle' = p^\mu a_\mu^*(\mathbf{p})|\psi\rangle/\xi, \quad (15.7.36)$$

так что $|e + \alpha p, \psi\rangle = |e, \psi\rangle + \xi \alpha Q|\psi\rangle'$ и, следовательно, является “физически” эквивалентным $|e, \psi\rangle$. Отсюда следует, что состояние e_μ “физически” эквивалентно $e^\mu + \alpha p^\mu$; это условие аналогично обычному условию “калибровочной инвариантности” при преобразовании векторов поляризации фотона. С другой стороны,

$$Qb^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = p^\mu a_\mu^*(\mathbf{p})|\psi\rangle \neq 0,$$

так что $b^*|\psi\rangle$ не удовлетворяет условию (15.7.31). Кроме того, для любого e_μ с $e \cdot p \neq 0$

$$c^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = Qe_\mu a^{\mu*}(\mathbf{p})|\psi\rangle / e \cdot p$$

и $c^*|\psi\rangle$ является БРСТ-точным, и следовательно, эквивалентно нулю. Таким образом, физическое гильбертово пространство свободно от духов и антидухов.

Для сохранения лоренц-инвариантности всем четырем компонентам $a^\mu(\mathbf{p})$ следует придать смысл операторов уничтожения:

$$0 = a_\mu(\mathbf{p})|0\rangle, \quad (15.7.37)$$

где $|0\rangle$ — БРСТ-инвариантное вакуумное состояние. Канонические коммутационные соотношения, полученные из БРСТ-инвариантного действия (например, при $\xi = 1$), дают

$$[a_\mu(\mathbf{p}), a_\nu^*(\mathbf{p}')]_- = \eta_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (15.7.38)$$

что соответствует пропагатору в калибровке Фейнмана. Это нарушает обычные условия положительной определенности в квантовой механике, поскольку из (15.7.37) и (15.7.38) следует [13], что

$$\langle 0|a_0(\mathbf{p})a_0^*(\mathbf{p}')|0\rangle = -\langle 0|0\rangle. \quad (15.7.39)$$

Тем не менее все амплитуды переходов между физическими состояниями удовлетворяют обычным условиям положительной определенности, поскольку сами эти состояния удовлетворяют (15.7.31). Для таких состояний амплитуды перехода имеют такой же вид, какой бы

они имели в кулоновской или аксиальной калибровке, где нет проблем положительной определенности или унитарности.

Формализм Фаддеева–Попова–де Витта, которым мы пользовались до сих пор, с необходимостью приводит к действию, билинейному по полям духов ω_α^* и ω_α . Это оказывается достаточным для перенормируемых теорий Янга–Миллса с фиксирующей калибровку функцией $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$, но не в более общих случаях. Например, как будет показано в § 17.2, для других калибровок в перенормируемых теориях Янга–Миллса необходимы вклады в лагранжеву плотность слагаемых вида $\omega^* \omega^* \omega \omega^5$).

К счастью, формализм Фаддеева–Попова–де Витта обеспечивает лишь один из способов построения класса эквивалентных лагранжианов, которые дают одну и ту же унитарную S -матрицу. Формализм БРСТ представляет собой более общий подход, который позволяет совершенно освободиться от трудностей формализма Фаддеева–Попова–де Витта. В рамках такого подхода действие теории выбирают в виде наиболее общего локального функционала полей материи, калибровочных полей, ω^A , ω^{*A} и h^A с нулевым духовым числом, который является инвариантным относительно БРСТ-преобразования (15.7.7)–(15.7.11) и других глобальных симметрий теории (для перенормируемых теорий также ограничиваются вкладами в лагранжеву плотность от операторов размерности 4 или менее, однако это не играет никакой роли в последующем обсуждении). В следующем параграфе будет показано, что наиболее общее действие такого вида представляет собой сумму функционала полей материи и калибровочных полей (совокупность которых мы будем обозначать ϕ) и вклада, получаемого в результате действия БРСТ-оператора s на произвольный функционал Ψ с духовым числом -1 :

$$I_{\text{нов}}[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + s\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h], \quad (15.7.40)$$

как, например, в действии Фаддеева–Попова–де Витта (15.7.25), где $s\Psi$ не обязательно является билинейным по духовым и антидуховым полям.

Элементы S -матрицы состояний, которые обращаются в нуль под действием БРСТ-генератора Q , не зависят от выбора Ψ в (15.7.40). Поэтому если существует какой-либо способ выбрать Ψ так, что духи отщепляются, то отщепление духов будет иметь место и в общем случае. В теориях Янга–Миллса такой функционал Ψ определяется квантованием теории в аксиальной калибровке. Поэтому в таких теориях духи отщепляются при произвольном выборе функционала $\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h]$, а не только в случае выбора функционалов (15.7.26), генерируемых в методе Фаддеева–Попова–де Витта.

⁵⁾ Они служат контрчленами и приводят к сокращению ультрафиолетовых расходимостей в петлевых диаграммах с четырьмя внешними духовыми линиями.

Можно пойти несколько дальше и убрать зависимость от канонического квантования в лоренц-неинвариантных калибровках (к этому классу принадлежит и аксиальная калибровка). Возьмем действие в виде наиболее общего функционала калибровочных полей, полей материи, ω^A , ω^{*A} и h^A с нулевым духовым числом, который инвариантен относительно преобразований БРСТ (15.7.7)–(15.7.11) и любых других глобальных симметрий теории, в том числе преобразований группы Лоренца. Из БРСТ-инвариантности действия следует существование сохраняющегося нильпотентного БРСТ-генератора Q . Если духовые и антидуховые поля являются эрмитовыми, оператор Q также эрмитов. Как и выше, пространство физических состояний представляет собой совокупность состояний, обращаемых в нуль генератором Q ; при этом два физических состояния являются эквивалентными, если их разность представляет собой результат действия оператора Q на другое физическое состояние. Как было показано, для теорий Янга–Миллса это пространство оказывается свободным от духов (и антидухов) и имеет положительно определенную норму, а S -матрица в пространстве физических состояний является унитарной [13a].

Такая процедура получила название БРСТ-квантования. Ее можно обобщить на случай таких теорий с локальными симметриями как общая теория относительности или теория струн. К сожалению, в настоящий момент в каждом отдельном случае необходимо доказывать, что БРСТ-когомология не включает духи и что S -матрица, действующая в физическом пространстве, является унитарной. Ключевым моментом такого доказательства всегда является тот факт, что для каждой степени свободы с отрицательной нормой (например, для временных компонент калибровочных полей в теориях Янга–Миллса), есть локальная симметрия, позволяющая избавиться от этой степени свободы.

* * *

Заметим (хотя далее это использоваться не будет), что существует прекрасная геометрическая интерпретация [14] духов и БРСТ-симметрии. Калибровочные поля A_α^μ можно представить в виде 1-форм $A_\alpha \equiv A_{\alpha\mu} dx^\mu$, где dx^μ — набор антикоммутирующих чисел (см. § 5.8). Их можно объединить с духами и составить одну 1-форму $\mathcal{A}_\alpha \equiv A_\alpha + \omega_\alpha$ в расширенном пространстве. Обычная внешняя производная $d \equiv dx^\mu \partial / \partial x^\mu$ также может быть объединена с БРСТ-оператором s , образуя внешнюю производную $\mathcal{D} \equiv d + s$ в этом пространстве, которая нильпотентна, поскольку $s^2 = d^2 = sd + ds = 0$.

В следующей главе мы представим методы внешнего поля, с помощью которых, наряду с применением метода БРСТ-симметрии, впоследствии (гл. 17) завершим доказательство перенормируемости неабелевых калибровочных теорий.

§ 15.8. Обобщения БРСТ-симметрии¹⁾

БРСТ-симметрия, описанная в предыдущем параграфе, имеет важные приложения, связанные с квантованием широкого класса теорий, включающего общую теорию относительности и теорию струн. При изучении свойств этих теорий мы имеем дело с действием $I[\phi]$ и мерой $[d\phi] \equiv \prod_r d\phi^r$, которые являются инвариантными относительно инфинитезимальных преобразований

$$\phi^r \rightarrow \phi^r + \epsilon^A \delta_A \phi^r. \quad (15.8.1)$$

Здесь введены так называемые обозначения де Витта, где индексы r и A объединяют пространственно-временные координаты и индексы других симметрий, а суммы по индексам включают в себя также и интегрирование по пространственно-временным координатам. Например, в калибровочных преобразованиях (15.1.9) индекс A состоит из группового индекса α и пространственно-временной координаты x таким образом, что $\epsilon^\alpha \equiv \epsilon^\alpha(x)$, а индекс r объединяет векторный индекс μ , групповой индекс α и пространственно-временную координату x таким образом, что $\phi^{\mu\alpha x} \equiv A_\mu^\alpha(x)$. Вариация $\delta_A \phi^r$ в преобразовании (15.1.9) обозначает

$$\delta_{\beta y} \phi^{\mu\alpha x} = \delta_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta^4(x - y) + C_{\gamma\alpha}^\beta \phi^{\mu\gamma x} \delta^4(x - y).$$

Аналогично тому, как это было в случае теории Янга–Миллса, описанном в предыдущем параграфе, БРСТ-инвариантность может быть использована вместо подхода Фаддеева–Попова–де Витта для альтернативной формулировки теории. БРСТ-инвариантность помогает в тех случаях, когда метод Фаддеева–Попова–де Витта не работает. Мы начнем с того, что опишем метод Фаддеева–Попова–де Витта для теорий с общей локальной симметрией, а потом рассмотрим дальнейшие обобщения.

Если в данной ситуации воспроизвести вывод (15.5.21), можно получить общую теорему Фаддеева–Попова–де Витта:

$$\frac{C}{\Omega} \int [d\phi] e^{iI[\phi]} V[\phi] = \int [d\phi] e^{iI[\phi]} B[f[\phi]] \text{Det}(\delta_A f_B[\phi]) V[\phi], \quad (15.8.2)$$

где $V[\phi]$ — произвольный функционал ϕ^r , инвариантный относительно калибровочных преобразований (15.8.1); $f_A[\phi]$ — набор зависящих от ϕ^r фиксирующих калибровку функционалов²⁾, выбранных таким образом, чтобы матрица $\delta_A f_B[\phi]$ имела ненулевой определитель,

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

²⁾ Буквы A , B и т. д. используются как для обозначения f_A , так и для калибровочных преобразований δ_A . Этим мы подчеркиваем, что должно быть столько же функционалов, фиксирующих калибровку, сколько су-

а $B[f]$ представлял собой произвольный функционал f_A (например, $\prod_A \delta(f_A)$). Постоянная Ω является объемом калибровочной группы, а постоянная C определяется следующим образом (см. (15.5.19)):

$$C \equiv \int [df] B[f]. \quad (15.8.3)$$

Как было показано, в случае калибровочных теорий смысл выражения (15.8.2) состоит в том, что интеграл в его правой части не зависит от выбора функционала f_A , фиксирующего калибровку, а его зависимость от $B[f]$ осуществляется через постоянную C . В том случае, когда обычно бесконечному групповому объему Ω можно придать некоторый смысл (как в калибровочных теориях на конечной пространственно-временной решетке), соотношение (15.8.2) можно понимать как выражение для интеграла в левой части.

Для того чтобы определить нильпотентное БРСТ-преобразование, сначала нужно представить функционал $B[f]$ в виде фурье-образа

$$B[f] = \int [dh] \exp(ih^A f_A) \mathcal{B}[h], \quad (15.8.4)$$

где $[dh] \equiv \prod_A dh^A$. Определитель также можно выразить в виде интеграла по фермионным c -числовым полям³⁾ ω^{*A} и ω^A :

$$\text{Det}(\delta_A f_B[\phi]) \propto \int [d\omega^*][d\omega] \exp(i\omega^{*B} \omega^A \delta_A f_B), \quad (15.8.5)$$

где $[d\omega^*] \equiv \prod_A d\omega^{*A}$ и $[d\omega] \equiv \prod_A d\omega^A$, а знак “ $\propto$ ” обозначает пропорциональность с точностью до не зависящих от полей коэффициентов. Подставляя эти соотношения в (15.8.2), мы получаем общее выражение для интеграла с фиксированной калибровкой:

$$\begin{aligned} \int [d\phi] \exp(iI[\phi]) B[f[\phi]] \text{Det}(\delta_A f_B[\phi]) V[\phi] &\propto \\ &\propto \int [d\phi][dh][d\omega^*][d\omega] \exp(iI_{\text{нов}}[\phi, h, \omega, \omega^*]) \mathcal{B}[h] V[\phi], \end{aligned} \quad (15.8.6)$$

где $I_{\text{нов}}$ — новое полное действие:

$$I_{\text{нов}}[\phi, h, \omega, \omega^*] = I[\phi] + h^A f_A[\phi] + \omega^{*B} \omega^A \delta_A f_B[\phi]. \quad (15.8.7)$$

существует независимых калибровочных преобразований. Однако в таких теориях, как теория струн, лучше использовать фиксирующие калибровку функционалы f^a , для которых, несмотря на то что индекс a принимает столько же значений, что и индекс A в вариации δ_A , сами эти значения отличны от значений индекса A . Данный формализм не требует каких-либо изменений, так как всегда можно выполнить замену $f_A = c_{Aa} f^a$, где величины c_{Aa} не зависят от полей и являются несингулярными.

³⁾ В теориях струн и некоторых других теориях духовые поля ω^{*A} и ω^A часто обозначаются буквами b^A (или b_A) и c^A соответственно.

Как указано в § 15.6, мы можем представлять себе духи как поля, компенсирующие интегрирование по полям ϕ^r , связанным друг с другом калибровочным преобразованием (15.8.1). Так как духи являются фермионными полями, петли по ним вносят дополнительный знак “—”, который позволяет выполнить такую компенсацию. Для этого конечно необходимо, чтобы имелось столько же полей ω^A , сколько имеется независимых калибровочных преобразований. Так как поля ω^A независимы, калибровочные преобразования (15.8.1) также должны быть независимыми. Хотя это имеет место как для калибровочных преобразований в теории Янга–Миллса, так и для координатных преобразований в общей теории относительности, в общем случае это не так. Классическим примером теории с калибровочными преобразованиями, не являющимися независимыми, является теория калибровочных p -форм, описанная в § 8.8. Некоторая p -форма A (антисимметричный тензор ранга p) преобразуется под действием калибровочного преобразования согласно правилу $A \rightarrow A + d\phi$, где ϕ является $(p-1)$ -формой, а $d\phi$ — внешняя производная (антисимметризованная производная). Так как величина d является нильпотентной, в случае $p \geq 2$ мы можем сдвинуть ϕ на $d\psi$, не меняя калибровочного преобразования. Таким образом, имеется своеобразная инвариантность по отношению к калибровочным преобразованиям калибровочных преобразований, параметризуемым $(p-2)$ -формами ψ . В таких случаях введение лишних духов необходимо компенсировать введением “духов для духов” [15]. При $p \geq 3$ также необходимо вводить “духи для духов духов” и т. д. Далее мы везде будем считать, что калибровочные преобразования (15.8.1) являются независимыми.

Несмотря на то что вставкой калибровочно-неинвариантного функционала $B[f]$ исходная симметрия (15.8.1) была нарушена, новое полное действие имеет точную симметрию относительно бесконечно малых БРСТ-преобразований

$$\chi \rightarrow \chi + \theta s\chi, \quad (15.8.8)$$

где χ — любое поле из ϕ^r , ω^A , ω^{A*} или h^A ; θ — бесконечно малый антикоммутирующий комплексный параметр, а s — оператор Славнова:

$$s = \omega^A \delta_A \phi^r \frac{\delta_L}{\delta \phi^r} - \frac{1}{2} \omega^B \omega^C f_{BC}^A \frac{\delta_L}{\delta \omega^A} - h^A \frac{\delta_L}{\delta \omega^{A*}}. \quad (15.8.9)$$

В выражении (15.8.9) индекс L обозначает левое дифференцирование, определенное так, что если $\delta F = \delta\chi G$, то $\delta_L F / \delta\chi = G$, а f_{BC}^A — структурные константы⁴⁾, подчиняющиеся коммутационным соотно-

⁴⁾ Например, для калибровочных преобразований, действующих на поле материи $\psi(x)$, имеем: $\delta_{\beta\gamma}\psi(x) = it_{\beta}\psi(x)\delta^4(x-y)$, а $\delta_{\beta\gamma}\delta\gamma z\psi(x) = -t_{\gamma}t_{\beta}\psi(x)\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)$. Таким образом, в этом случае $f_{\beta\gamma\gamma z}^{\alpha x} = C_{\beta\gamma}^{\alpha}\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)$.

нениям

$$[\delta_B, \delta_C] = f_{BC}^A \delta_A. \quad (15.9.10)$$

Структурные константы f_{BC}^A не зависят от полей в неабелевой калибровочной теории и теории струн, однако такая ситуация имеет место не всегда. БРСТ-формализм пригоден для более широкого класса теорий, чем теории с не зависящими от полей структурными константами. Непосредственным вычислением можно получить, что

$$s^2 = \frac{1}{2} \omega^A \omega^B \left[\delta_A \phi^s \frac{\delta_L(\delta_B \phi^r)}{\delta \phi^s} - \delta_B \phi^s \frac{\delta_L(\delta_A \phi^r)}{\delta \phi^s} - f_{AB}^C \delta_C \phi^r \right] \frac{\delta_L}{\delta \phi^r} - \\ - \frac{1}{2} \omega^B \omega^C \omega^D \left[f_{BC}^E f_{DE}^A + \delta_D \phi^r \frac{\delta_L f_{BC}^A}{\delta \phi^r} \right] \frac{\delta_L}{\delta \phi^A}. \quad (15.8.11)$$

Таким образом, условие нильпотентности БРСТ-преобразования эквивалентно коммутационным соотношениям (15.8.10), объединенным с условием согласованности

$$f_{[BC}^E f_{D]E}^A + \delta_{[D} \phi^r (\delta_L f_{BC}^A] / \delta \phi^r) = 0, \quad (15.8.12)$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию по отношению к заключенным в них индексам B , C и D . Выражение (15.8.12) является обобщением тождества Якоби на симметрии с зависящими от полей структурными константами (его можно получить из коммутационных соотношений (15.8.10) так же, как обычное тождество Якоби).

Чтобы показать, что преобразование (15.8.8) является преобразованием симметрии действия $I_{\text{нов}}$, заметим, (вспоминая, что θ антикоммутирует с ω^{*A}), что действие (15.8.7) можно переписать в виде

$$I_{\text{нов}}[\phi, h, \omega, \omega^*] = I[\phi] - s(\omega^{*A} f_A). \quad (15.8.13)$$

Слагаемое $I[\phi]$ является БРСТ-инвариантным, поскольку БРСТ-преобразование полей ϕ^r совпадает с калибровочным преобразованием (15.8.1), характеризующимся параметрами $\theta \omega^A$, коммутирующими со всеми ϕ^r . Слагаемое $s(\omega^{*A} f_A)$ является БРСТ-инвариантным, поскольку БРСТ-преобразования нильпотентны.

По нескольким причинам нам может понадобиться рассмотрение теорий с действиями, отличными от тех, которые могут получиться при применении подхода Фаддеева–Попова–де Витта. Будем интересоваться любой теорией с действием, инвариантным относительно БРСТ-преобразования (15.8.8). Чтобы показать, что такое действие ведет к разумным в физическом смысле результатам, докажем сначала общее утверждение (оно уже применялось в предыдущем параграфе), согласно которому наиболее общий БРСТ-инвариантный функционал с нулевым духовым числом, подобно действию Фаддеева–Попова–де Витта (15.8.13), представляет собой сумму функционала, зависящего только от ϕ , и вклада, определяющегося результатом

действия БРСТ-оператора s на произвольный функционал Ψ с духовым числом, равным -1 :

$$I_{\text{нов}}[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + s\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h]. \quad (15.8.14)$$

Его математический смысл заключается в том, что БРСТ-когомологии состоят из калибровочно-инвариантных функционалов $I[\phi]$, зависящих только от полей ϕ^r .

Чтобы доказать справедливость (15.8.14), заметим, что БРСТ-преобразование (15.8.8)–(15.8.9) не меняет общего числа полей h^A и ω^{*A} . Поэтому если разложить I в ряд по I_N (которые содержат по N полей h^A и ω^{*A}), то между членами с разными N в sI не может быть сокращений. Таким образом, каждый член должен быть БРСТ-инвариантным:

$$sI_N = 0. \quad (15.8.15)$$

Определим далее оператор Ходжа:

$$t \equiv \omega^{*A} \frac{\delta}{\delta h^A}. \quad (15.8.16)$$

Теперь несложно проверить антикоммутационное соотношение

$$\{s, t\} = -\omega^{*A} \frac{\delta_L}{\delta \omega^{*A}} - h^A \frac{\delta}{\delta h^A}. \quad (15.8.17)$$

Действуя оператором $\{s, t\}$ на I_N и используя равенство (15.8.15), получаем, что

$$stI_N = -NI_N. \quad (15.8.18)$$

Следовательно, каждое I_N , кроме I_0 , является БРСТ-точным в том смысле, что оно может быть представлено в виде результата действия оператора s на некоторый другой функционал. Полный функционал I может быть записан в виде $I_0 + s\Psi$, где

$$\Psi = - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{tI_N}{N}. \quad (15.8.19)$$

Слагаемое I_0 по определению не зависит от ω^{*A} и h^A . Кроме того, поскольку оно имеет нулевое духовое число, также должна отсутствовать зависимость от ω^A , что и требовалось доказать.

Чтобы показать инвариантность физических матричных элементов при изменении определения функционала Ψ , фиксирующего калибровку, введем фермионный “заряд” Q так, чтобы изменение любого оператора Φ при БРСТ-преобразовании имело вид

$$\delta_\theta \Phi = i[\theta Q, \Phi] = i\theta[Q, \Phi]_{\mp}, \quad (15.8.20)$$

где в $[x, y]_{\mp} \equiv xy \mp yx$ необходимо фиксировать верхний или нижний знаки в зависимости от того, бозонным или фермионным является оператор Φ . Так же как и в предыдущем параграфе, нильпотентность

БРСТ-преобразование приводит к тому, что $Q^2 = 0$. Матричные элементы калибровочно-инвариантных операторов между физическими состояниями не зависят от выбора Ψ тогда и только тогда, когда физические состояния $|\alpha\rangle$ и $\langle\beta|$ удовлетворяют соотношению

$$Q|\alpha\rangle = \langle\beta|Q = 0, \quad (15.8.21)$$

так что отличные друг от друга физические состояния находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами когомологий Q . Таким образом, БРСТ-инвариантное действие общего вида (15.8.14) ведет к разумным в физическом смысле предсказаниям для любого фиксирующего калибровку функционала Ψ , если возможно найти *такое* Ψ , при котором духи не будут взаимодействовать с другими полями. Если такой выбор Ψ оказывается неудобным для конкретных вычислений, (как, например, неудобной является аксиальная калибровка, поскольку она нарушает лоренц-инвариантность), мы можем выбрать любой другой фиксирующий калибровку функционал Ψ и быть по-прежнему уверенными в том, что S -матрица унитарна, и что начальные и конечные состояния не будут содержать духов.

Этот подход хорошо работает в теориях струн, где так называемое квантование в переменных светового конуса заменяет аксиальную калибровку. В других теориях (например, в общей теории относительности) не существует способа выбрать систему координат так, чтобы духи отщепились. В этом случае можно воспользоваться методом БРСТ-квантования, предложенном в конце предыдущего параграфа, и, используя БРСТ-инвариантность, доказывать, что S -матрица в физическом, свободном от духов, гильбертовом пространстве является унитарной.

Открытие [17] инвариантности относительно “анти-БРСТ-симметрии” [18] показало, что, несмотря на внешнее различие, существует некоторая аналогия между ролями ω^{*A} и ω^A , которая до сих пор остается в чем-то загадочной.

§ 15.9. Формализм Баталина–Вильковыского¹⁾

Этот параграф посвящен описанию мощного формализма теории поля, получившего название метода Баталина–Вильковыского [19]. Несмотря на то что он был развит в рамках лагранжева подхода, более ранние работы, посвященные выводу формализма Баталина–Вильковыского–Фрадкина [20], опираются на гамильтонов подход. (Эквивалентность обоих подходов была доказана в рамках теории возмущений [21]). Аналогичный метод для работы с перенормиров-

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

кой калибровочных теорий был разработан ранее Зин-Жюстеном [22] (см. § 17.1). Известны по крайней мере три области, в которых использование данного формализма оказывается предпочтительным.

1. До сих пор мы рассматривали лишь неприводимые представления групп симметрий с алгебрами, замкнутыми в том смысле, что выполняется коммутационное соотношение (15.8.10). В некоторых теориях, подобных супергравитации (без вспомогательных полей) [23], алгебра является незамкнутой: она замыкается только на уравнениях движения, так что слагаемые, возникающие в коммутаторе (15.8.10), оказываются пропорциональными $\delta I/\delta \chi^n$. Подобные вклады появляются также и в условии самосогласованности (15.8.12). Из равенства (15.8.11) в этом случае следует, что s^2 не обращается в нуль и представляется в виде некоторой линейной комбинации производных $\delta I/\delta \chi^n$. Как мы увидим в этом параграфе, метод Баталина–Вильковыского позволяет работать с довольно общими калибровочными теориями, в том числе с незамкнутыми или приводимыми алгебрами калибровочной симметрии.

2. Как было отмечено, основы формализма Баталина–Вильковыского были разработаны еще Зин-Жюстеном для доказательства перенормируемости калибровочных теорий. Важнейший факт (см. § 17.1) заключается в том, что хотя сумма всех одночастичных неприводимых диаграмм во внешнем поле не обладает БРСТ-симметрией исходного действия, она тем не менее удовлетворяет так называемому основному уравнению, наличие которого является одним из ключевых свойств действия.

3. Метод Баталина–Вильковыского дает удобный способ анализа возможных нарушений симметрии действия квантовыми эффектами. Он будет использоваться для этой цели в § 22.6.

Основу формализма Баталина–Вильковыского представляет введение так называемых антиполей, число которых совпадает с числом полей в теории. Пусть символ χ^n обозначает все поля: ϕ^r , ω^A , ω^{*A} и h^A . Введем для каждого χ^n внешнее антиполе²⁾ $\chi_n^\dagger$ с такой же статистикой и духовым числом³⁾, как у БРСТ-преобразованного поля $s\chi^n$. Таким образом, поле $\chi_n^\dagger$ обладает противоположной по отношению к χ^n статистикой и духовым числом $-gh(\chi^n) - 1$, где $gh(\chi^n)$ — духовое число поля χ^n . В простейших случаях, включающих теорию Янга–Миллса и квантовую гравитацию, к исходному калибровочно-инвариантному действию $I[\phi]$ добавляется слагаемое, отвечающее за взаимодействие антиполей $\chi_n^\dagger$ с $s\chi^n$. В результате действие имеет вид

$$S[\chi, \chi^\dagger] \equiv I[\phi] + (s\chi^n)\chi_n^\dagger. \quad (15.9.1)$$

²⁾ Символ “ $\dagger$ ” используется здесь вместо “*”, для того чтобы подчеркнуть отличие от комплексного и зарядового сопряжения. В частности, поле антидухов ω^{*A} не совпадает с $\omega_A^\dagger$.

Оно удовлетворяет *основному уравнению*

$$0 = \frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L S}{\delta \chi^n}. \quad (15.9.2)$$

где индексы “ R ” и “ L ” обозначают правое и левое дифференцирование соответственно. Чтоб убедиться в этом, заметим, что члены нулевого порядка по антиполям в уравнении (15.9.2) дают условие калибровочной инвариантности

$$0 = (s\phi^r) \frac{\delta_L I}{\delta \phi^r} = \omega^A \delta_A I[\phi], \quad (15.9.3)$$

в то время как линейные по антиполям $\chi_n^\dagger$ члены дают условие нильпотентности:

$$0 = (s\chi^m) \frac{\delta_L (s\chi^n)}{\delta \chi^m} = s^2 \chi^n. \quad (15.9.4)$$

Поля $\chi_n^\dagger$ являются внешними; мы должны присвоить им подходящие значения, прежде использовать $S[\chi, \chi^\dagger]$ для вычисления S -матрицы. Для этой цели введем произвольный фермионный функционал $\Psi[\chi]$ с духовым числом -1 и положим³⁾

$$\chi_n^\dagger = \frac{\delta \Psi[\chi]}{\delta \chi^n}. \quad (15.9.5)$$

Теперь действие (15.9.1) приобретает вид

$$S[\phi, \delta \Psi / \delta \chi] = I[\phi] + (s\chi^n) \delta \Psi[\chi] / \delta \chi^n = I[\phi] + s\Psi[\chi]. \quad (15.9.6)$$

Сравнение с (15.8.14) показывает, что оно совпадает с действием в фиксированной калибровке $I_{\text{нов}}[\chi]$. Таким образом, физические матричные элементы не зависят от малых вариаций функционала Ψ (см. предыдущий параграф). Действие (15.8.7), построенное по процедуре Фаддеева–Попова–де Витта, соответствует выбору $\Psi = -\omega^{*A} f_A$, где $\phi_r^\dagger = \omega^{*A} \delta f_A / \delta \phi^r$, $\omega_C^\dagger = 0$ и $\omega_A^{*\dagger} = -f_A$.

Пока мы не выяснили ничего нового. Свежая идея заключается в том, что основное уравнение (15.9.2) можно использовать и для более общих теорий, если допустить, что $S[\chi, \chi^\dagger]$ может быть нелинейным функционалом по антиполям $\chi_n^\dagger$. (В приводимых теориях необходимо, кроме того, включить в состав духовых полей χ^n духи для духов вместе со своими антиполями, см. предыдущий параграф.) Как и раньше, мы считаем, что $\chi_n^\dagger$ обладает противоположной статистикой по отношению к χ^n и несет духовое число $-gh(\chi^n) - 1$. Будем также требовать, чтобы действие $S[\chi, \chi^\dagger]$ было бозонным оператором с духовым числом, равным нулю. Поскольку величины ω^{*A} и h_A при БРСТ-преобразованиях преобразуются *линейно*, в отличие от других

³⁾ Нет необходимости отличать правое дифференцирование от левого, поскольку χ^n либо $\delta \Psi / \delta \chi^n$ должно быть бозонным полем.

полей в χ^n , они входят в действие $S[\chi, \chi^\dagger]$ таким же образом, как в (15.9.1) (в этой связи см. § 16.4). Следовательно,

$$S = S_{\min}[\phi, \omega, \phi^\dagger, \omega^\dagger] - h^A \omega_A^{*\dagger}, \quad (15.9.7)$$

где $\phi_r^\dagger$, $\omega_A^\dagger$ и $\omega_A^{*\dagger}$ являются антиполями к ϕ^r , ω^A и ω^{*A} с духовыми числами -1 , -2 и 0 соответственно. Действие $S_{\min}[\phi, \omega, \phi^\dagger, \omega^\dagger]$ представляет собой некоторый бозонный функционал с духовым числом 0 . Второе слагаемое в (15.9.7) никак не влияет на основное уравнение, поэтому само действие $S_{\min}$ ему удовлетворяет⁴⁾.

Так как $S_{\min}$ несет нулевое духовое число, его разложение в ряд по антиполям должно иметь вид

$$\begin{aligned} S_{\min} = & I[\phi] + \omega^A f_A^r[\phi] \phi_r^\dagger + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B f_{AB}^C[\phi] \omega_C^\dagger + \\ & + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B f_{AB}^{rs}[\phi] \phi_r^\dagger \phi_s^\dagger + \omega^A \omega^B \omega^C f_{ABC}^D[\phi] \phi_r^\dagger \phi_D^\dagger + \\ & + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B \omega^C \omega^D f_{ABCD}^{EF}[\phi] \omega_E^\dagger \omega_F^\dagger + \dots \end{aligned} \quad (15.9.8)$$

Слагаемое нулевого порядка по антиполям (и первого порядка по ω^A) в основном уравнении (15.9.2) дает

$$0 = f_A^r[\phi] \frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi^r}, \quad (15.9.9)$$

что является следствием инвариантности $I[\phi]$ относительно преобразования

$$\phi^r \rightarrow \phi^r + \epsilon^A f_A^r[\phi] \quad (15.9.10)$$

с произвольным бесконечно малым ϵ^A . Слагаемое в основном уравнении, пропорциональное $\phi_s^\dagger$ и $\omega^A \omega^B$, дает соответственно

$$0 = f_A^r[\phi] \frac{\delta f_B^s[\phi]}{\delta \phi^r} - f_B^r[\phi] \frac{\delta f_A^s[\phi]}{\delta \phi^r} + f_{AB}^C[\phi] f_C^s[\phi] + \frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi^r} f_{AB}^{rs}[\phi]. \quad (15.9.11)$$

Это выражение при условии выполнения полевых уравнений $\delta I/\delta \phi = 0$ играет роль коммутационного соотношения (со структурными константами $f_{AB}^C[\phi]$) для преобразования (15.9.10). Другое слагаемое в основном уравнении, линейное по антиполям, пропорционально $\omega^A \omega^B \omega^C$ и $\omega_D^\dagger$. Из его структуры следует, что

$$0 = f_{[A}^r[\phi] \frac{\delta f_{BC]}^D[\phi]}{\delta \phi^r} - f_{[AB}^E[\phi] f_{C]E}^D[\phi] + f_{ABC}^D[\phi] \frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi^r}, \quad (15.9.12)$$

где квадратные скобки означают антисимметризацию по индексам A ,

⁴⁾ Поля ϕ^r , ω^A , $\phi_r^\dagger$, $\omega_A^\dagger$ иногда называют *минимальными переменными*. Поля ω^{*A} и h_A , которые вместе со своими антиполями входят в теорию билинейным образом (см., например, (15.9.7)), называют *тривиальными парами*.

B и C . На уравнениях движения это равенство превращается в обобщенное тождество Якоби (15.8.12). Соотношение (15.9.11) необходимо для самосогласованности условия симметрии (15.9.9) (в предположении, что f_A^r образуют полный набор калибровочных симметрий), а равенство (15.9.12) — для самосогласованности коммутационных соотношений (15.9.11). Заметим, что слагаемые в уравнениях (15.9.11) и (15.9.12), возникающие благодаря членам в $S_{\min}$, квадратичным по антиполям, пропорциональны $\delta I[\phi]/\delta\chi$. Следовательно, они обращаются в нуль лишь на уравнениях движения и в этом смысле отвечают незамкнутой алгебре симметрий. Члены второго и высших порядков по антиполям в основном уравнении возникают благодаря слагаемым третьего и высших порядков по антиполям в $S_{\min}$. Они обеспечивают выполнение условий самосогласованности для (15.9.11) и (15.9.12) и условий самосогласованности для уравнений самосогласованности и т. д. Достоинство формализма Баталина–Вильковыского состоит в том, что все эти условия являются следствием одного единственного основного уравнения.

Основное уравнение может быть интерпретировано как следствие инвариантности действия S относительно обобщенного БРСТ-преобразования. Чтобы убедиться в этом, удобно ввести *антискобки*. В прежних обозначениях антискобки двух произвольных функционалов $F[\chi, \chi^\dagger]$ и $G[\chi, \chi^\dagger]$ определяются следующим образом:

$$(F, G) \equiv \frac{\delta_R F}{\delta \chi^n} \frac{\delta_L G}{\delta \chi_n^\dagger} - \frac{\delta_R F}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L G}{\delta \chi^n}. \quad (15.9.13)$$

Заметим, что левые и правые функциональные производные от бозонного функционала типа S по бозонным или фермионным переменным соответственно равны или отличаются лишь знаком. Поскольку в паре $\chi_n^\dagger$ и χ^n одно поле обязательно является бозонным, а другое — фермионным, второе слагаемое в правой части (15.9.13) изменит знак, если мы поменяем местами левое и правое дифференцирование:

$$\frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L S}{\delta \chi^n} = - \frac{\delta_L S}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_R S}{\delta \chi^n} = - \frac{\delta_R S}{\delta \chi^n} \frac{\delta_L S}{\delta \chi_n^\dagger}.$$

(Последнее оказывается справедливым, поскольку один из множителей является бозонным полем, т. е. порядок множителей не важен.) Таким образом, мы видим, что второе слагаемое в антискобке (15.9.13) для (S, S) совпадает с первым слагаемым, если изменить его знак на противоположный. Поэтому основное уравнение может быть переписано в виде условия равенства нулю антискобки (S, S) :

$$(S, S) = 0. \quad (15.9.14)$$

Это условие довольно нетривиально, поскольку антискобка обладает общим свойством симметрии:

$$(F, G) = \pm (G, F), \quad (15.9.15)$$

где в случае, если оба сомножителя F и G являются бозонными, берется знак “+”, а в противном случае — знак “−”. В частности, (F, F) автоматически обращается в нуль, если F — фермионный функционал, однако в случае, если F — бозонный функционал, это неверно.

Обобщенное БРСТ-преобразование определяется следующим образом:

$$\widehat{\delta}_\theta \chi^n = \theta \frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^\dagger} = -\theta(S, \chi^n), \quad (15.9.16)$$

$$\widehat{\delta}_\theta \chi_n^\dagger = -\theta \frac{\delta_R S}{\delta \chi^n} = -\theta(S, \chi_n^\dagger), \quad (15.9.17)$$

где θ — фермионная бесконечно малая постоянная. (В случае, если S имеет вид (15.9.1), преобразование χ совпадает с исходным БРСТ-преобразованием $\widehat{\delta}_\theta \chi^n = \theta s \chi^n$.) Для определения действия этого преобразования на произвольный функционал заметим, что антискобка действует как производная в следующем смысле:

$$(F, GH) = (F, G)H \pm G(F, H), \quad (15.9.18)$$

где знак “−” реализуется для фермионного G и бозонного F , а знак “+” — в остальных случаях. Следовательно, если G и H — произвольные функционалы χ и $\chi^\dagger$, причем $\widehat{\delta}_\theta G = -\theta(S, G)$ и $\widehat{\delta}_\theta H = -\theta(S, H)$, то:

$$\widehat{\delta}_\theta (GH) = -\theta(S, G)H - G\theta(S, H) = -\theta[(S, G)H \pm G(S, H)],$$

где знаки “+” или “−” реализуются соответственно, если G — бозонный или фермионный функционал. Подставляя в (15.9.18) вместо F бозонный функционал S , мы видим, что:

$$\widehat{\delta}_\theta (GH) = -\theta(S, GH).$$

Из (15.9.16), (15.9.17) и последнего соотношения следует, что для любого функционала F , имеющего вид суммы произведений полей и антиполей, верно равенство

$$\widehat{\delta}_\theta F = -\theta(S, F). \quad (15.9.19)$$

Основное уравнение (15.9.14) теперь можно интерпретировать как требование инвариантности S относительно обобщенных БРСТ-преобразований:

$$\widehat{\delta}_\theta S = -\theta(S, S) = 0. \quad (15.9.20)$$

Как и исходное БРСТ-преобразование, это преобразование симметрии является нильпотентным. Для того чтобы убедиться в этом, воспользуемся тождеством Якоби для антискобки:

$$\pm(F, (GH)) + \text{циклические перестановки} = 0, \quad (15.9.21)$$

где в первом слагаемом реализуется знак “−”, если F и H — бозонные функционалы, а в противном случае реализуется знак “+”; знаки для других двух циклических перестановок F , G и H выбираются

соответствующим образом. После подстановки $F = G = S$ тождество (15.9.21) принимает вид

$$0 = \mp(S, (S, H)) \mp (H, (S, S)) + (S, (H, S)) = \mp 2(S, (S, H)) \mp (H, (S, S)),$$

где знаки “ $-$ ” или “ $+$ ” реализуются соответственно, если H — бозонный или фермионный функционал. Теперь из основного уравнения следует условие нильпотентности

$$(S, (S, H)) = 0. \quad (15.9.22)$$

Вследствие этой симметрии решение основного уравнения не единственно. К примеру, из (15.9.22) следует, что для любого заданного решения S инфинитезимальным преобразованием можно получить другое решение

$$S' = S + (\delta F, S). \quad (15.9.23)$$

Здесь δF — произвольный фермионный инфинитезимальный функционал полей χ и $\chi^\dagger$, несущий духовое число -1 , поскольку действие S' должно быть бозонным и иметь духовое число 0. Если, в частности, взять в качестве δF фермионный функционал $\epsilon\Psi$, зависящий только от χ^n , мы получим, что

$$S[\chi, \chi^\dagger] = S[\chi, \chi^\dagger] + \epsilon \frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi^n} \frac{\delta_R S}{\delta\chi_n^\dagger} = S\left[\chi, \chi^\dagger + \epsilon \frac{\delta\Psi}{\delta\chi}\right]. \quad (15.9.24)$$

Это бесконечно малое преобразование может быть тривиальным образом проинтегрировано. В результате можно убедиться, что основное уравнение по-прежнему выполняется, если заменить антиполя на новые переменные $\chi_n^{\dagger'} \equiv \chi_n^\dagger - \delta\Psi/\delta\chi^n$.

Преобразование (15.9.23) является частным случаем канонического преобразования и будет здесь называться “антиканоническим”, чтобы отличать его от канонического преобразования из гл. 7. Антиканоническим преобразованием по определению называется такое инфинитезимальное или конечное преобразование полей и антиполей, которое оставляет инвариантными фундаментальные антискобочные соотношения:

$$(\chi^n, \chi_m^\dagger) = \delta_m^n, \quad (\chi^n, \chi^m) = (\chi_n^\dagger, \chi_m^\dagger) = 0. \quad (15.9.25)$$

Рассмотрим в качестве примера бесконечно малое антиканоническое преобразование, порожденное инфинитезимальным фермионным генератором δF , под действием которого любой бозонный или фермионный функционал G переходит в

$$G \rightarrow G' = G + (\delta F, G). \quad (15.9.26)$$

Легко показать, что такое преобразование не меняет фундаментальные антискобки (15.9.25). Для этого отметим, что антискобка (G, H) двух функционалов G и H преобразуется в антискобку (G', H') , что с точностью до первого порядка по бесконечно малым величинам равно

$$(G', H') = (G, H) + (((\delta F), G), H) + (G, (\delta F, H)).$$

Используя тождество Якоби (15.9.21), перепишем последнее выражение в виде

$$(G', H') = (G, H) \pm (\delta F, (G, H)), \quad (15.9.27)$$

со знаком “+”, если G и H — бозонные функционалы, и знаком “−” в противоположном случае. В частности, если антискобка (G, H) равна некоторому c -числу, то она сохраняется при антиканонических преобразованиях. (Таким образом можно снова убедиться в том, что преобразования (15.9.23) оставляют инвариантным основное уравнение.) Антискобка (15.9.25) полей с антиполями является c -числовой, поэтому то же самое должно выполняться для преобразованных полей и антиполей.

Для вычисления S -матрицы необходимо приписать некоторые определенные значения антиполям. Так же как и в простейшем случае замкнутых калибровочных алгебр, где S имеет линейную форму (15.9.5), мы можем выбрать антиполя в форме (15.9.5). Это означает, что S -матрица будет вычисляться для действия в фиксированной калибровке:

$$I_\Psi[\chi] = S\left[\chi, \frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi}\right], \quad (15.9.28)$$

где $\Psi[\chi]$ — фермионный функционал с духовым числом -1 . Такой выбор, согласно замечаниям, сделанным после (15.9.24), соответствует приравнению нулю канонически преобразованного антиполя $\chi^{\dagger'}$.

Действие с фиксированной калибровкой является инвариантным относительно БРСТ-преобразования, которое действует только на поля χ^n :

$$\delta_\theta \chi^n = \theta s\chi^n, \quad \text{где} \quad s\chi^n = \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi}. \quad (15.9.29)$$

Для проверки последнего заметим, что

$$\begin{aligned} sI_\Psi[\chi] = & \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi_n^\dagger} \frac{\delta_L S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi^n} \right)_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} + \\ & + \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi_m^\dagger} \frac{\delta_L^2 \Psi[\chi]}{\delta\chi^m \delta\chi^n} \frac{\delta_L S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю в силу основного уравнения, а второе — в силу антисимметричности суммируемых членов⁵⁾ по m и n .

⁵⁾ Если оба поля χ^n и χ^m являются бозонными, это справедливо, поскольку $\delta S/\delta\chi^n$ и $\delta S/\delta\chi^m$ антикоммутируют. Если оба поля χ^n и χ^m являются фермионными, это справедливо, поскольку антисимметрично выражение $\delta_L^2 \Psi/\delta\chi^m \delta\chi^n$. В случае различных статистик χ^n и χ^m правые и левые производные от S по фермионному χ имеют противоположные знаки. Поэтому исходное утверждение снова оказывается верным.

Для замкнутых алгебр с действием S в (15.9.1) преобразование (15.9.29) является исходным БРСТ-преобразованием $\delta_\theta \chi^n = \theta s \chi^n$. Однако для незамкнутых алгебр общего вида преобразование (15.9.29) отличается от исходного БРСТ-преобразования, и, вообще говоря, даже не является нильпотентным вне области, где выполняются уравнения движения. Вместо этого из слагаемых первого порядка по преобразованным антиполям $\chi_n^{\dagger'} = \chi_n^\dagger - \delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n$ в основном уравнении мы находим

$$s^2 \chi^m = \mp \left(\frac{\delta_L}{\delta \chi_m^\dagger} \frac{\delta_R}{\delta \chi_n^\dagger} I[\chi, \chi^\dagger] \right)_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} \frac{\delta I_\Psi[\chi]}{\delta \chi^n}, \quad (15.9.30)$$

где знак “−” или “+” реализуется соответственно, если поле χ^m — бозонное или фермионное. Мы снова видим, что характерная для незамкнутых алгебр калибровочных симметрий зависимость от уравнений движения возникает из-за вкладов в S , квадратичных по антиполям.

До настоящего момента мы рассматривали лишь формулировку классической теории поля для замкнутой или незамкнутой калибровочной алгебры. Выясним теперь, как в таких теориях производятся квантовые вычисления. Физические матричные элементы могут быть найдены посредством функционального интегрирования с весом $\exp(iI_\Psi[\chi])$, где $I_\Psi[\chi]$ можно найти из $S[\chi, \chi^\dagger]$, если положить $\chi_n^\dagger = \delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n$, или, иными словами, $\chi_n^{\dagger'} = 0$. Рассмотрим, как влияет изменение в $\Psi[\chi]$ на эти матричные элементы. Сперва рассмотрим амплитуду перехода из вакуума в вакуум:

$$Z_\Psi = \int \left[\prod d\chi \right] \exp(iI_\Psi[\chi]). \quad (15.9.31)$$

При сдвиге $\Psi[\chi]$ на $\delta\Psi[\chi]$ амплитуда (15.9.31) изменяется на величину

$$\delta Z = i \int \left[\prod d\chi \right] \exp(iI_\Psi[\chi]) \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} \left(\frac{\delta(\delta\Psi)[\chi]}{\delta \chi^n} \right). \quad (15.9.32)$$

Посредством интегрирования по частям в полевом пространстве последняя формула преобразуется к виду

$$\delta Z = \int \left[\prod d\chi \right] \exp(iI_\Psi[\chi]) \times \left\{ \frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L I_\Psi[\chi]}{\delta \chi^n} - i \Delta S[\chi, \chi^\dagger] \right\}_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} \delta\Psi[\chi], \quad (15.9.33)$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\delta_R}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L}{\delta \chi^n}. \quad (15.9.34)$$

Мы видим, что условие независимости от Ψ амплитуды перехода “вакуум–вакуум”, вообще говоря, определяется не через основное уравнение (15.9.2), а через квантовое основное уравнение

$$(S, S) - 2i\Delta S = 0 \quad \text{при} \quad \chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi. \quad (15.9.35)$$

Если перейти к единицам СГС, действие $S[\chi, \chi^\dagger]$ будет входить в функциональный интеграл с множителем $1/\hbar$, поэтому во втором слагаемом в (15.9.35) вместо $-2i$ появится множитель $-2i\hbar$. Таким образом, выполнение квантового основного уравнения влечет за собой для слагаемых в S нулевого порядка по $\hbar$ выполнение классического основного уравнения (15.9.2). Обычно легко построить действие, удовлетворяющее классическому основному уравнению, так что первое слагаемое в (15.9.35) обращается в нуль. Обратится ли в нуль второе слагаемое? Случай, когда локальное действие теории не удовлетворяет квантовому основному уравнению, будет обсуждаться в гл. 22, посвященной аномалиям.

При условии, что квантовое основное уравнение (15.9.35) выполняется, изменение вакуумного среднего оператора $\mathcal{O}[\chi]$ при сдвиге Ψ на $\delta\Psi$ имеет вид

$$\delta\langle\mathcal{O}\rangle = \frac{-i}{Z_\Psi} \int [\prod d\chi] \times \\ \times \exp(iI_\Psi[\chi]) \frac{\delta_R \mathcal{O}[\chi]}{\delta\chi^n} \left(\frac{\delta_R S(\chi, \chi^\dagger)}{\delta\chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} \delta\Psi[\chi]. \quad (15.9.36)$$

Коэффициент перед экспонентой в подынтегральном выражении (15.9.36) равен $s\mathcal{O}[\chi]$. Мы видим, что вакуумные средние операторов, инвариантные относительно обобщенных БРСТ-преобразований (15.9.16)–(15.9.17)⁶⁾, не зависят от вариаций фермионного поля Ψ , фиксирующего калибровку. Соответствующие результаты верны также для произведения двух и большего числа операторов.

Приложение А. Теорема об алгебрах Ли

В этом приложении будут рассмотрены некоторые свойства алгебры Ли общего вида $\mathcal{G}$ с генераторами t_α и структурными константами $C^\alpha_{\beta\gamma}$. Мы докажем эквивалентность следующих трех условий.

а. Существует вещественная положительно определенная симметричная матрица $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющая условию инвариантности

$$g_{\alpha\beta} C^\beta_{\gamma\delta} = -g_{\gamma\beta} C^\beta_{\alpha\delta}. \quad (15.A.1)$$

⁶⁾ Для теорий с незамкнутыми алгебрами калибровочных симметрий вообще говоря не существует инвариантных относительно (15.9.16)–(15.9.17) операторов, кроме констант. Вместо этого следует рассматривать операторы $O(\chi, \chi^\dagger)$, инвариантные относительно действия нильпотентного “квантового БРСТ-оператора” σ , который определяется как $\sigma O = (O, S) - i\Delta O$. Если O зависит только от χ , то последнее условие сводится к (15.9.36). Если $\sigma O = 0$, то вакуумное среднее $O(\Psi, \delta\Psi/\delta\chi)$ не зависит от малых вариаций ответственного за фиксацию калибровки фермионного поля Ψ .

(Это условие совпадает с условием (15.2.4), полученным в § 15.2 на основе физических соображений.)

б. Существует такой базис алгебры Ли $\mathcal{G}$ (или, другими словами, набор генераторов $\tilde{t}_\alpha = \mathcal{S}_{\alpha\beta} t_\beta$, где $\mathcal{S}$ — вещественная несингулярная матрица), для которого структурные константы $\tilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha$ антисимметричны не только по нижним индексам β и γ , но и по любой паре индексов из набора α, β и γ .

в. Алгебра Ли $\mathcal{G}$ является прямой суммой компактной простой подалгебры и $U(1)$ -подалгебры $\mathcal{H}_m$, причем они коммутируют.

Мы убедимся в эквивалентности этих трех утверждений, последовательно выводя **б** из **а**, **в** из **б** и **а** из **в**. Попутно будет показано, что если эти три условия выполняются, то генераторы алгебры $\mathcal{G}$ можно выбрать в виде t_{ma} . Здесь первый индекс “ m ” отвечает выбору простой подалгебры или $U(1)$ -подалгебры $\mathcal{H}_m$, а второй “ a ” индекс перечисляет генераторы в выбранной подалгебре. Для данного базиса матрица $g_{ma,nb}$, удовлетворяющая условию (15.A.1), будет иметь вид

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2} \delta_{mn} \delta_{ab}, \quad (15.A.2)$$

где g_m^{-2} — произвольные вещественные положительные постоянные.

Итак, предположим, что **а** верно, т. е. существует действительная симметричная положительно определенная матрица $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющая условию инвариантности (15.A.1). В таком случае выберем в качестве генераторов элементы

$$\tilde{t}_\alpha \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\beta} t_\beta, \quad (15.A.3)$$

где $g^{-1/2}$ — корень из обратной матрицы, существование которого обеспечивается положительной определенностью матрицы $g_{\alpha\beta}$. Эти новые генераторы определяют алгебру Ли

$$[\tilde{t}_\alpha, \tilde{t}_\beta] = i \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \tilde{T}_\gamma, \quad (15.A.4)$$

где

$$\tilde{C}_{\gamma\alpha\beta} \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\alpha'} (g^{-1/2})_{\beta\beta'} (g^{+1/2})_{\gamma\gamma'} C_{\alpha'\beta'\gamma'}. \quad (15.A.5)$$

(В этом базисе удобно отказаться от различия между верхними и нижними индексами α, β и т. д. Мы будем писать $\tilde{C}_{\gamma\alpha\beta}$ вместо $\tilde{C}_{\alpha\beta}^\gamma$.) Теперь из условия (15.A.1) немедленно следует антисимметричность $\tilde{C}_{\alpha\gamma\delta}$ по паре индексов α и γ , а также по паре γ и β , и, таким образом, полная антисимметричность матрицы структурных констант. Итак, **б** доказано.

Предположим, теперь выполнено условие **б**: существует базис алгебры Ли с полностью антисимметричными структурными константами. В этом базисе матрица $(\tilde{t}_\alpha^A)_{\beta\gamma} \equiv -i \tilde{C}_{\beta\gamma\alpha}$ присоединенного представления является чисто мнимой и, кроме того, антисимметричной,

следовательно, она эрмитова. Согласно известной теореме об эрмитовых матрицах¹⁾, матрицы $\tilde{t}_\alpha^A$ либо неприводимы, либо вполне приводимы.

Под неприводимым набором матриц $\tilde{t}_\alpha^A$ размерности $N \times N$ мы подразумеваем множество, для которого не существует подпространства размерности меньше N , которое было бы инвариантным относительно действия всех $\tilde{t}_\alpha^A$. Иными словами, не существует множества из менее чем N ненулевых векторов $(u_r)_\beta$, такого что $(\tilde{t}_\alpha^A)_{\beta\gamma}(u_r)_\gamma$ является для каждого α и r линейной комбинацией векторов $(u_s)_\beta$. Поскольку в этом базисе матрицы $(\tilde{t}_\alpha^A)_{\beta\gamma}$ пропорциональны структурным константам, то последнее утверждение эквивалентно тому, что не существует замкнутого относительно коммутирования со всеми $\tilde{t}_\alpha^A$ множества линейных комбинаций $\mathcal{T}_r \equiv (u_r)_\gamma \tilde{t}_\alpha^A$, т. е. такого множества, для которого скобка $[\tilde{t}_\alpha^A, \mathcal{T}_r]$ для всех α и r является линейной комбинацией $\mathcal{T}_s$. Если бы такое множество матриц $\mathcal{T}_r$ существовало, то оно могло бы служить множеством генераторов инвариантной подалгебры полной алгебры Ли, а его отсутствие равносильно тому, что данная алгебра Ли является простой.

Под вполне приводимым набором матриц $\tilde{t}_\alpha^A$ подразумевается набор, который при подходящем выборе базиса может быть записан в виде блочно-диагональных суперматриц

$$(\tilde{t}_\alpha^A)_{ma,nb} = [t_\alpha^{A(m)}]_{ab} \delta_{mn}, \quad (15.A.6)$$

где матрицы $t_\alpha^{A(m)}$ являются либо неприводимыми, либо нулевыми²⁾. Рассматривая такой базис для всей алгебры Ли, мы видим, что струк-

¹⁾ Если набор матриц H_α неприводим, то по определению должен существовать набор векторов u_n , порождающий подпространство (отличное от всего пространства), которое остается инвариантным под действием H_α . То есть для всех α и n имеем $H_\alpha u_n = \sum_m (C_\alpha)_{mn} u_m$. В этом случае мы можем принять базис, состоящий из векторов u_n и набора векторов v_k , который порождает пространство, ортогональное всем u_n . Если матрицы H_α эрмитовы, то $(u_n, H_\alpha v_k) = \sum_m (C_\alpha)_{mn}^* (u_m, v_k) = 0$, так что пространство, натянутое на векторы v_k , также инвариантно под действием H_α : $H_\alpha v_k = \sum_l (D_\alpha)_{lk} v_l$. В этом базисе матрицы H_α одновременно приводятся к блочно-диагональному виду:

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} C_\alpha & 0 \\ 0 & D_\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом можно полностью привести матрицы H_α к блочно-диагональному виду с неприводимыми матрицами в блоках.

²⁾ Здесь индексы m и n нумеруют блоки вдоль главной диагонали, а индексы a и b — строки и столбцы внутри блоков. Кроме того, заметим, что по m суммирования нет, а область возможных значений для индексов a , b и т. д. в общем случае зависит от m .

турные константы имеют вид

$$\tilde{C}_{lc,ma,nb} = i(\tilde{t}_{lc}^A)_{ma,nb} = i(t_{lc}^{A(m)})_{ab}\delta_{mn}. \quad (15.A.7)$$

Но поскольку это выражение полностью антисимметрично и пропорционально δ_{mn} , то оно должно одновременно быть пропорциональным δ_{ln} и δ_{lm} :

$$\tilde{C}_{lc,ma,nd} = \delta_{ln}\delta_{lm}C_{cab}^{(l)}. \quad (15.A.8)$$

Другими словами, для *любого* представления $t^{(m)}_a \equiv t_{ma}$ алгебры Ли в этом базисе мы имеем

$$[t_a^{(m)}, t_b^{(n)}] = i\delta_{mn}C_{cab}^{(m)}t_c^{(m)}, \quad (15.A.9)$$

где $C_{cab}^{(m)}$ действительны и полностью антисимметричны по индексам a , b , c . Возможность построить базис, в котором генераторы разбиваются на наборы $t^{(m)}$, такие что коммутатор элементов из одного набора друг с другом дается линейной комбинацией генераторов в этом наборе, а коммутатор любых двух генераторов из разных наборов обращается в нуль, означает, что алгебра Ли является *прямой суммой* подалгебр $t^{(m)}$. Набор матриц $t^{(m)A}$ присоединенного представления для всякого m является неприводимым или нулевым. Это означает, что соответствующая подалгебра либо является простой, либо порождена так называемыми $U(1)$ -генераторами, коммутирующими со всеми генераторами полной алгебры.

Итак, мы показали, что алгебра Ли наиболее общего вида с вещественными полностью антисимметричными структурными константами является прямой суммой одной или нескольких простых и/или $U(1)$ -алгебр Ли. Кроме того, простые подалгебры компактны в том смысле, что любая матрица $-C_{acd}^{(m)}C_{bdc}^{(m)}$ положительно определена. Действительно, для всякого вещественного вектора u_a выражение

$$-C_{acd}^{(m)}C_{bdc}^{(m)}u_a u_b = \sum_{cd} \left[\sum_a u_a C_{acd}^{(m)} \right]^2$$

представляет собой сумму неотрицательных величин, которая может обращаться в нуль только в случае $u_a = 0$, поскольку для $u_a \neq 0$ условие $\sum_a u_a C_{acd}^{(m)} = 0$ привело бы к тому, что $\sum_a u_a t^{(m)}_a$ сама являлась бы инвариантной абелевой подалгеброй. Это однако противоречит тому, что $t^{(m)}_a$ образуют простую алгебру Ли. Утверждение в доказано.

Наконец предположим, что верно утверждение в: алгебра Ли раскладывается в прямую сумму простых и $U(1)$ -подалгебр, т. е. в некотором базисе $t_a^{(m)} = \mathcal{S}_{ma,\alpha} t_\alpha$ с вещественной несингулярной матрицей $\mathcal{S}$ имеем

$$[t_a^{(m)}, t_b^{(n)}] = i\delta_{mn}C_{ab}^{(m)c}t_c^{(m)},$$

где каждая подалгебра $t^{(m)}$ либо является простой, либо коммутирует со всеми остальными подалгебрами. Кроме того, мы предполагаем,

что простые подалгебры компактны, т. е. матрицы

$$g_{ab}^{(m)} \equiv -C_{ad}^{(m)c} C_{bc}^{(m)d} \quad (15.A.10)$$

положительно определены. Для того чтобы построить в базисе генераторов $t_{ma} = t_a^{(m)}$ вещественную положительно определенную матрицу $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющую условию (15.A.1), выберем

$$g_{ma,nb} \equiv g_{ab}^{(m)} \delta_{mn}, \quad (15.A.11)$$

где $g_{ab}^{(m)}$ имеет вид (15.A.10), когда $t^{(m)}$ — простая подалгебра, и является произвольной вещественной симметричной положительно определенной матрицей, когда $t^{(m)}$ представляет собой прямую сумму некоторого числа $U(1)$ -подалгебр. Матрица (15.A.11) очевидным образом является вещественной, симметричной и положительно определенной, поскольку каждая из матриц $g_{ab}^{(m)}$ удовлетворяет этим условиям. Для проверки (15.A.1) воспользуемся тождеством Якоби для структурных констант:

$$C_{ad}^{(m)c} C_{be}^{(m)d} + C_{bd}^{(m)c} C_{ea}^{(m)d} + C_{ed}^{(m)c} C_{ab}^{(m)d} = 0. \quad (15.A.12)$$

Свернем его с $C_{fc}^{(m)e}$. После переобозначения $c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c$ индексов суммирования в третьем слагаемом и учета (15.A.10) результат для простых подалгебр можно записать в виде

$$g_{df}^{(m)} C_{ab}^{(m)d} = C_{ad}^{(m)c} C_{be}^{(m)d} C_{cf}^{(m)e} - C_{fd}^{(m)c} C_{be}^{(m)d} C_{ca}^{(m)e}.$$

Заметим, что из этого равенства следует, что его левая часть антисимметрична по индексам a и f :

$$g_{df}^{(m)} C_{ab}^{(m)d} = -g_{da}^{(m)} C_{fb}^{(m)d}. \quad (15.A.13)$$

Аналогичный результат для $U(1)$ -подалгебр тривиален, поскольку в этом случае структурные константы обращаются в нуль. Таким образом, условие симметричности (15.A.1) немедленно следует из (15.A.13), что завершает доказательство **а**. Эквивалентность условий **а**, **б** и **в** доказана.

Заметим, что при полностью антисимметричных структурных константах условие инвариантности (15.2.4) можно переформулировать как требование коммутирования матрицы $g_{\alpha\beta}$ со всеми матрицами в присоединенном представлении алгебры $\mathcal{L}$ и:

$$[g, t_\gamma^A] = 0. \quad (15.A.14)$$

Мы показали, что все $(t_\gamma^A)_{\alpha\beta}$ можно привести к блочно-диагональному виду с неприводимыми (или нулевыми) блоками вдоль главной диагонали. Согласно известной теореме [25] при этих условиях матрица $g_{\alpha\beta}$ также должна быть блочно-диагональной с блоками того же размера

и расположенными так же, как блоки в t_γ^A , причем всякий блок внутри блока будет пропорционален единичной матрице. (В том случае, если два блока в t_γ^A эквивалентны, т. е. их можно связать преобразованием подобия, для того чтобы блоки матрицы $g_{\alpha\beta}$ были пропорциональны единичной матрице, может оказаться необходимым сделать подходящую замену базиса.) В обозначениях из (15.A.11) метрика имеет вид (15.A.2).

Приложение В. Классификация Картана

Здесь мы приводим без доказательства полный список простых алгебр Ли, построенный в своем окончательном виде Э. Картаном [26]. Простые алгебры Ли будут представлены в “компактной” форме, т. е. с генераторами, имеющими вид конечномерных эрмитовых матриц. Алгебры Ли будут нумероваться индексом $n \geq 1$, обозначающим их “ранг” (напомним, что рангом называется число независимых коммутирующих линейных комбинаций генераторов).

A_n : это алгебра специальной унитарной группы $SU(n+1)$ — группы всех унитарных ($U^\dagger = U^{-1}$) унимодулярных ($\text{Det } U = 1$) матриц в $(n+1)$ -мерном пространстве. Любая матрица из этой алгебры отличается от единицы на инфинитезимальную величину и может быть представлена в виде

$$U = 1 + iH,$$

где H — бесконечно малая матрица, удовлетворяющая условиям

$$H^\dagger = H, \quad \text{Tr } H = 0,$$

так что A_n — алгебра Ли всех эрмитовых бесследовых матриц в $n+1$ измерении. Любой набор коммутирующих эрмитовых матриц может быть одновременно приведен к диагональному виду, а максимальное число независимых диагональных *бесследовых* матриц в $n+1$ измерении равно n . Это число совпадает с рангом алгебры A_n . Любая эрмитова матрица в $n+1$ измерении имеет $(n+1)^2$ независимых вещественных параметров ($n+1$ вещественных чисел на главной диагонали и $n(n+1)/2$ комплексных чисел над главной диагональю, равных комплексно сопряженным под ней), один из которых исключается условием бесследовости, так что размерность алгебры A_n равна

$$d(A_n) = (n+1)^2 - 1 = n(n+2).$$

Все A_n просты.

B_n : это алгебра унитарной ортогональной группы $O(2n+1)$, состоящей из всех унитарных ($\theta^\dagger = \theta^{-1}$) и ортогональных ($\theta^T = \theta^{-1}$), а следовательно, действительных матриц в $2n+1$ измерении (сужение на унитарные матрицы иногда обозначается в названии группы $UO(2n+1)$). Любая такая матрица θ , отличающаяся от единицы

на бесконечно малую величину, может быть представлена в виде

$$\mathcal{O} = 1 + iA,$$

где A — инфинитезимальная матрица, удовлетворяющая условию

$$A^* = -A = A^T$$

(если рассматривать лишь подгруппу $SO(2n+1)$, в которой на матрицу $\mathcal{O}$ накладывается дополнительное условие $\text{Det } \mathcal{O} = 1$, в нашем анализе ничего не изменится, поскольку для любой близкой к единице ортогональной матрицы $\text{Det } \mathcal{O} = 1$). Любой набор коммутирующих мнимых антисимметричных $(2n+1)$ -мерных матриц может быть приведен (общим ортогональным преобразованием) к форме суперматрицы

$$\begin{bmatrix} a_1\sigma_2 & & & 0 \\ & a_2\sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\sigma_2 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix},$$

где σ_2 — обычная (2×2) -матрица

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

а $a_1, \dots, a_n$ являются вещественными. Таким образом, ранг B_n , очевидно, равен n . Мнимая антисимметричная матрица полностью определяется мнимыми числами над вещественной диагональю, так что ее размерность равна

$$d(B_n) = \frac{(2n+1)(2n)}{2} = n(2n+1).$$

Все B_n являются простыми.

Существует альтернативное определение $O(N)$, которое поможет понять причину введения следующего большого класса простых алгебр Ли. Вместо определения $O(N)$ как группы N -мерных вещественных матриц, удовлетворяющих условию ортогональности $\mathcal{O}^T \mathcal{O} = 1$, она может быть определена как группа N -мерных вещественных матриц $\mathcal{M}$, которые удовлетворяют условию

$$\mathcal{M}^T \mathcal{P} \mathcal{M} = \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P}$ — произвольная положительно определенная симметричная матрица. Это справедливо, поскольку всегда можно представить любую такую матрицу $\mathcal{P}$ в виде $\mathcal{P} = \mathcal{R}^T \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ — некоторая вещественная несингулярная матрица. Таким образом, существует преобразование подобия, которое переводит любую матрицу $\mathcal{M}$, удовлетворяющую сформулированным условиям, в вещественную ортогональную матрицу $\mathcal{R} \mathcal{M} \mathcal{R}^{-1}$. Не меняя группы, можно считать,

что $\mathcal{P}$ — различные вещественные симметричные положительно определенные матрицы.

C_n : это алгебра унитарной симплектической группы $USp(2n)$ — группы унитарных матриц $\mathcal{M}$, оставляющих *антисимметричную* несингулярную матрицу $\mathcal{A}$ инвариантной:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^T \mathcal{A} \mathcal{M} &= \mathcal{A}, \\ \mathcal{A}^T &= -\mathcal{A}, \quad \text{Det } \mathcal{A} \neq 0.\end{aligned}$$

(Заметим, что в d измерениях $\text{Det } \mathcal{A} = \text{Det } \mathcal{A}^T = (-1)^d \text{Det } \mathcal{A}$, так что если d нечетно, то $\text{Det } \mathcal{A}$ с необходимостью обращается в нуль. В соответствии с этим не существует $USp(d)$, если d нечетно.) Любая такая антисимметричная несингулярная (и, вероятно, комплексная) матрица $\mathcal{A}$ может быть записана в стандартной форме

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}^T \mathcal{A}_0 \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ — унитарная матрица, а $\mathcal{A}_0$ — суперматрица:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Можно выбрать $\mathcal{A}_0$ в виде блочно-диагональной суперматрицы с σ_1 вдоль главной диагонали.) Таким образом, $USp(2n)$ может быть описана как группа унитарных матриц $\mathcal{S}$, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{S}^T \mathcal{A}_0 \mathcal{S} = \mathcal{A}_0,$$

так как унитарным преобразованием любая такая $\mathcal{S}$ может быть преобразована в унитарную матрицу $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{S} \mathcal{R}$, которая удовлетворяет предыдущему условию $\mathcal{M}^T \mathcal{A} \mathcal{M} = \mathcal{A}$. Любая матрица $\mathcal{S}$, отличающаяся от единичной матрицы на бесконечно малую, может быть представлена в виде

$$\mathcal{S} = 1 + i\mathcal{H},$$

где $\mathcal{H}$ — инфинитезимальная матрица, удовлетворяющая условиям

$$\mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}^T \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0 \mathcal{H} = 0.$$

Наиболее общая $2n$ -мерная матрица $\mathcal{H}$, удовлетворяющая этим условиям, может быть записана как суперматрица

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^* & -\mathcal{A}^* \end{bmatrix},$$

где n -мерные комплексные блоки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}, \quad \mathcal{B}^T = \mathcal{B}.$$

Максимальный набор коммутирующих генераторов имеет диагональные $\mathcal{A}$ и нулевые $\mathcal{B}$, т. е.

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_n & & & \\ & & & -a_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -a_n \end{bmatrix}$$

с вещественными $a_1, \dots, a_n$. Поэтому ранг C_n с очевидностью равен n . Размерность C_n совпадает с суммой числа n^2 независимых вещественных параметров в эрмитовой матрице $\mathcal{A}$ и числа $2n(n+1)/2$ независимых вещественных параметров в комплексной симметрической матрице $\mathcal{B}$:

$$d(C_n) = n^2 + 2 \times n(n+1)/2 = n(2n+1).$$

Все алгебры C_n являются простыми.

D_n : это алгебра унитарной ортогональной группы $O(2n)$, состоящей из всех унитарных ортогональных матриц в $2n$ измерениях. Анализ алгебры B_n может быть полностью перенесен на D_n , за исключением того что в данном случае любой набор коммутирующих генераторов может быть приведен к виду

$$\begin{bmatrix} a_1\sigma_2 & & & 0 \\ & a_2\sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\sigma_2 \end{bmatrix},$$

так что ранг по-прежнему равен n . Размерность совпадает с

$$d(D_n) = \frac{(2n)(2n-1)}{2} = n(2n-1).$$

Все D_n просты, за исключением D_1 , которая является абелевой алгеброй с одним генератором, и D_2 , которая представляет собой прямую сумму $B_1 + B_1$.

Исключительные алгебры Ли: в добавление к вышеназванным классическим алгебрам Ли существует пять особых случаев: алгебры G_2 ($d = 14$); F_4 ($d = 52$); E_6 ($d = 78$); E_7 ($d = 133$); E_8 ($d = 248$).

На самом деле не все классические алгебры Ли действительно различны. Существует в точности четыре изоморфизма

$$A_1 = B_1 = C_1, \quad C_2 = B_2, \quad A_3 = D_3.$$

Они отвечают изоморфизмам между группами Ли, алгебрами которых являются. Однако изоморфизмы типа $B_1 = A_1$, $B_2 = C_2$ и $D_3 = A_3$ не означают, что алгебра $SO(3)$ изоморфна $SU(2)$, алгебра

$SO(5)$ изоморфна $USp(4)$ или $SO(6)$ изоморфна $SU(4)$. Оказывается, что $SU(2)$, $USp(4)$ и $SU(4)$ являются односвязными *накрывающими группами* $SO(3)$, $SO(5)$ и $SO(6)$. (Свойства накрывающих групп обсуждаются в гл. 2). Тем не менее изоморфизмы между алгебрами Ли позволяют легко конструировать двузначные фундаментальные спинорные представления $SO(3)$, $SO(5)$ и $SO(6)$; они аналогичны определяющим представлениям $SU(2)$, $USp(4)$ и $SU(4)$ соответственно. Кроме того, поскольку $SO(4)$ изоморфна $SO(3) \times SO(3)$, ее двузначное спинорное представление совпадает с определяющим представлением $SU(2) \times SU(2)$. Для $d \geq 7$ двузначные спинорные представления $SO(d)$ должны рассматриваться иначе, например, с помощью алгебр Клиффорда, обсуждавшихся в § 5.4.

Задачи

1. Выведите тождество Бьянки

$$D_\mu F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda F_{\alpha\mu\nu} = 0.$$

2. Предположим, что мы рассматриваем неабелеву калибровочную теорию, причем используем обобщенную кулоновскую калибровку, выбрав в качестве функции, фиксирующей калибровку, $f_\alpha = \nabla \cdot \mathbf{A}_\alpha$. Найдите вклад в лагранжиан, обусловленный духами. (Считайте, что $B[f] = \exp(-i \int d^4x f_\alpha f_\alpha / 2\xi)$.)

3. Предположим, что в качестве функции, фиксирующей калибровку в электродинамике, мы используем функцию

$$f = \partial_\mu A^\mu + c A_\mu A^\mu,$$

где c — произвольная константа. Найдите вклад в лагранжиан, обусловленный духами. (Считайте, что $B[f] = \exp(-i \int d^4x f_\alpha f_\alpha / 2\xi)$.) Чему равен пропагатор духов?

4. Покажите, что не существует простой алгебры Ли, у которой ровно четыре генератора.

5. Покажите, что если изменение поля $\psi_l(x)$, принадлежащего представлению калибровочной группы с генераторами — матрицами t_a , вдоль траектории $x^\mu = x^\mu(\tau)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = it_\alpha \psi(\tau) A_{\alpha\mu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau},$$

(где $\psi_l(x)$ и $A_{\alpha\mu}(x)$ — классические c -числовые поля), то изменение ψ при обходе по любому *маленькому* замкнутому контуру $\mathcal{P}$ вокруг точки X^μ пропорционально выражению

$$t_\alpha \psi(X) F_{\alpha\mu\nu}(X) \oint_{\mathcal{P}} x^\mu(\tau) \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Найдите константу пропорциональности. Используйте этот результат для доказательства того, что если $F_{\alpha\mu\nu}(x)$ всюду обращается в нуль, то существует такое калибровочное преобразование, что поле $A_{\alpha\mu}(x)$ обращается в нуль по крайней мере в некоторой конечной области. (Указание: повторите для случаев электродинамики и общей теории относительности рассуждения, аналогичные тем, что изложены в [6].)

6. Применяя методы функционального интегрирования к общей неабелевой калибровочной теории, вычислите пропагатор калибровочного поля $A_{\alpha\mu}(x)$. При этом функционал, фиксирующий калибровку, положите равным $f_\alpha = n_\mu A_\alpha^\mu$, где n_μ — произвольные константы. (Считайте, что $B[f] = \exp(-i \int d^4x f_\alpha f_\alpha / 2\xi)$.) Какой вид имеет лагранжиан духов? Чему равен пропагатор духов? Чему равна вершина взаимодействия духов?

7. Предположим, что вместо калибровочной инвариантности в качестве фундаментального физического принципа мы используем БРСТ-инвариантность. Выведите наиболее общее выражение для плотности лагранжиана, представив его в виде суммы произведений полей и их производных размерности (масса)^d, при $d \leq 4$, составленных из $A_{\alpha\mu}$, ω_α , ω_α^* , h_α и/или их производных. Это выражение должно быть инвариантным (с точностью до полных производных) относительно преобразований Лоренца, фазовых преобразований духового числа ($\omega_\alpha \rightarrow e^{i\theta} \omega_\alpha$, $\omega_\alpha^* \rightarrow e^{-i\theta} \omega_\alpha^*$), глобальных калибровочных преобразований (ϵ_α — константа). Кроме того, оно должно быть БРСТ-инвариантным.

8. Покажите, что антискобка удовлетворяет условию симметрии (15.9.15) и тождеству Якоби (15.9.21).

9. Покажите, что если функционал O удовлетворяет условию $(O, S) = i\Delta S$, а действие S удовлетворяет квантовому основному уравнению, то квантовое среднее $\langle O \rangle$ не зависит от функционала Ψ , фиксирующего калибровку.

Литература

1. *Yang C.N., Mills R.L.* // Phys. Rev. **96**, 191 (1954). О. Клейн был близок к тому, чтобы сформулировать теорию Янга–Миллса для случая $SU(2)$ в своем докладе на конференции 1938 г. в Варшаве, опубликованном в *New Theories in Physics* (International Institute of Intellectual Cooperation, Paris, 1939). Для ознакомления с критическими замечаниями в адрес теории Клейна см.: *Gross D.J.* // “Oscar Klein and Gauge Theory”, доклад на симпозиуме Оскара Клейна в 1994 г. в Стокгольме, Princeton preprint PUPT-1508.
2. *Utiyama R.* // Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
3. *Feynman R.P.* // Acta Phys. Polonica **24**, 697 (1963).

4. *Faddeev L.D., Popov V.N.* // Phys. Lett. **25B**, 29 (1967).
5. *De Witt B.S.* // Phys. Rev. **162**, 1195, 1239 (1967).
6. Доказательство легко переносится из стандартного доказательства соответствующего результата в общей теории относительности. Этот результат утверждает, что для существования координатного преобразования к плоской метрике в конечной односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы тензор кривизны Римана–Кристоффеля обращался в нуль. См., например: *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology (Wiley, N.Y., 1972): § 6.3 и 6.4.
7. Доказательство того, что **а** (где $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$) влечет за собой **б** и что **б** влечет за собой **в**, было представлено М. Гелл-Манном и Ш.Л. Глэшоу (*Gell-Mann M., Glashow S.L.* // Ann. Phys. (N.Y.) **15**, 437 (1961)).
8. См., например, § 7.6 указанной книги Вайнберга.
9. *Gribov V.* // Nucl. Phys. **139**, 1 (1978). Также см.: *Jackiw R., Muzinich I., Rebbi C.* // Phys. Rev. **D17**, 1576 (1978); *Jackiw R.* New Frontiers in High Energy Physics, eds. B. Kursunoglu, A. Perlmutter, L. Scott (Plenum, N.Y., 1978); *Christ N., Lee T.D.* // Phys. Rev. **D22**, 939 (1980); *Jackiw R.* Current Algebra and Anomalies (World Scientific, Singapore, 1985): сноска 50.
10. *Becchi C., Rouet A., Stora R.* // Comm. Math. Phys. **42**, 127 (1975); в Renormalization Theory, eds. G. Velo, A.S. Wightman (Reidel, Dordrecht, 1976); Ann. Phys. **98**, 287 (1976).
11. *Tyutin I.V.* // Lebedev Institute preprint N39 (1975).
- 11a. *Nakanishi N.* // Prog. Theor. Phys. **35**, 1111 (1966); *Lautrup B.* // Mat. Fys. Medd. Kon. Dan. Vid.-Sel. Medd. **35**, 29 (1967).
12. Оригинальный источник этого доказательства мне неизвестен. Я узнал о нем от Ж. Польчинского.
13. *Gupta S.N.* // Proc. Phys. Soc. **63**, 681 (1950); **64**, 850 (1951); *Bleuler K.* // Helv. Phys. Acta **3**, 567 (1950); *Bleuler K., Heitler W.* // Progr. Theor. Phys. **5**, 600 (1950).
- 13a. *Curci G., Ferrari R.* // Nuovo Cimento **35**, 273 (1976); *Kugo T., Ojima I.* // Prog. Theor. Phys. **60**, 1869 (1978); Prog. Theor. Phys. Suppl. **66**, 1 (1979). Также см. ссылку 11a для случая электродинамики.
14. *Thierry-Mieg J.* // J. Math. Phys. **21**, 2834 (1980); *Stora R.* Progress in Gauge Theories: Proceedings of a Symposium at Cargèse, 1983, eds. 't Hooft G., Jaffe A., Lehmann H., Mitter P.K., Singer I.M., Stora R. (Plenum, N.Y., 1984): p. 543; *Bonora L., Cotta-Ramusino P.* // Commun. Math. Phys. **87**, 589 (1983); *Mañes J., Stora R., Zumino B.* // Commun. Math. Phys. **102**, 157

- (1985); Schwarz A.S. // Commun. Math. Phys. **155**, 249 (1993); Lavrov P.M., Moshhin P.Yu., Reshetnyak A.A. // Tomsk preprint hep-th/9507104; Lavrov P.M. // Tomsk preprint hep-th/9507105.
15. Siegel W. // Phys. Lett. **93B**, 170 (1980); Kimura T. // Prog. Theor. Phys. **64**, 357 (1980); **65**, 338 (1981).
 16. Barnich G., Brandt F., Henneaux M. // Commun. Math. Phys. **174**, 57 (1995): Section 14.
 17. Curci G., Ferrari R. // Nuovo Cimento **32A**, 151 (1976); Ojima I. // Prog. Theor. Phys. Supp. **64**, 625 (1980); Baulieu L., Thierry-Mieg J. // Nucl. Phys. **B197**, 477 (1982).
 18. Анти-БРСТ-преобразование было обобщено на случай общих локальных симметрий в работе Alvarez-Gaumé L., Baulieu L. // Nucl. Phys. **B212**, 255 (1983). Это преобразование порождается следующим оператором:

$$\bar{s} = \omega^* A \delta_A \phi^r \frac{\delta_L}{\delta \phi^r} - \frac{1}{2} \omega^* B \omega^* C f_{BC}^A \frac{\delta_L}{\delta \omega^* A} - \omega^* B h^C f_{BC}^A \frac{\delta}{\delta h^A} + \\ + [-f_{BC}^A \omega^* B \omega^* C + h^A] \frac{\delta_L}{\delta \omega^* A}.$$

Нетрудно показать, что это преобразование нильпотентно:

$$\bar{s}^2 = 0.$$

БРСТ- и анти-БРСТ-преобразования антикоммутируют друг с другом. Более того, имеет место когомологическая теорема (не опубликована) для анти-БРСТ-преобразований, аналогичная соответствующей теореме для БРСТ-преобразований. А именно: функционал I от полей ϕ^r , ω^A , ω^{*A} и h^A наиболее общего вида, удовлетворяющий условию анти-БРСТ-инвариантности $\bar{s}I = 0$ и имеющий духовое число равное нулю, можно представить в виде

$$I[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + \bar{s}\bar{\Psi}[\phi, \omega, \omega^*, h].$$

(Надо всего лишь использовать оператор Ходжа $\bar{t} \equiv \omega^A \delta / \delta h^A$ вместо t .) Анти-БРСТ-симметрия может помочь при перечислении возможных слагаемых в лагранжианах и функциях Грина, однако мне не известно ни одного случая, когда без этого нельзя было бы обойтись.

19. Batalin I.A., Vilkovisky G.A. // Phys. Lett. **B102**, 27 (1981); Nucl. Phys. **B234**, 106 (1984); J. Math. Phys. **26**, 172 (1985). Также см.: Voronov L., Tyutin I.V. // Theor. Math. Phys. **50**, 218, 628 (1982). Доступное изложение см. в обзоре Gomis J., Paris J., Samuel S. // Phys. Rep. **259**, 1 (1995).
20. Fradkin E.S., Vilkovisky G.A. // Phys. Lett. **B55**, 224 (1975); CERN report TH2332 (1977); Batalin I.A., Vilkovisky G.A. // Phys. Lett. **B69**, 309 (1977); Fradkin I.S., Fradkina T.E. // Phys. Lett. **B72**, 334

- (1977). Также см.: *Henneaux M., Teitelboim C.* // Quantization of Gauge Systems (Princeton University Press, Princeton, 1992).
21. *Batalin I.A., Tyutin I.V.* // Phys. Lett. **B356**, 373 (1995).
 22. *Zinn-Justin J.* Trends in Elementary Particle Theory — International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974 (Springer-Verlag, Berlin, 1975): p. 2.
 23. *Freedman D.Z., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S.* // Phys. Rev., **D13**, 3214 (1976); *Kallosh R.E.* // Nucl. Phys. **B141**, 141 (1978); *de Wit B., van Holten J.W.* // Phys. Lett., **B79**, 389 (1979); *van Nieuwenhuizen P.* // Phys. Rep., **68**, 189 (1981).
 24. *Henneaux M., Teitelboim C.*, ссылка 20: § 18.1.4.
 25. *Wigner E.P.* // Group Theory (Academic Press, N.Y., 1959). С. 76–78.
 26. Оригинальная работа *Cartan E.* // Sur la Structure des Groupes de Transformation Finis et Continue (Paris, 1894; 2nd edn 1933). В качестве учебника можно использовать, например: *Gilmore R.* // Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications (Wiley, N.Y., 1974). Гл. 9.

МЕТОД ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

Часто оказывается полезным рассмотреть квантовую теорию поля при наличии классического внешнего поля. Одна из причин этого состоит в том, что во многих физических ситуациях внешнее поле действительно присутствует — им может быть, например, классическое электромагнитное или гравитационное поле, а также скалярное поле с ненулевым вакуумным средним. (Как мы увидим в гл. 19, такие скалярные поля могут играть важную роль в вопросах спонтанного нарушения симметрии лагранжиана.) Но даже в отсутствие реального внешнего поля многие вычисления можно существенно упростить, рассматривая физические амплитуды при наличии воображаемого внешнего поля. В этой главе мы покажем, что можно учесть все многопетлевые эффекты, просуммировав лишь древесные диаграммы, вершины и линии которых определяются *квантовым эффективным действием*, которое является не чем иным, как одночастично неприводимой связной амплитудой перехода вакуум–вакуум в присутствии внешнего поля. В следующей главе будет показано, что использование такого подхода позволяет с максимальным удобством завершить начатое в гл. 15 доказательство перенормируемости неабелевых калибровочных теорий и вычислить перенормировочные множители для заряда, необходимые для доказательства существования в квантовой хромодинамике важнейшего эффекта — асимптотической свободы.

§ 16.1. Квантовое эффективное действие

Рассмотрим квантовую теорию поля с действием $I[\phi]$. Предположим, что мы “включаем” классические токи $J_r(x)$, взаимодействующие с имеющимися в теории полями $\phi^r(x)$. Полная амплитуда перехода вакуум–вакуум в присутствии таких токов равна

$$Z[J] \equiv \langle \text{BAK, out} | \text{BAK, in} \rangle_J = \int \left[\prod_{s,y} d\phi^s(y) \right] \exp \left(iI[\phi] + i \int d^4x \phi^r(x) J_r(x) + \epsilon \text{ члены} \right). \quad (16.1.1)$$

(Поля $\phi^r(x)$ не обязаны быть скалярными. Они могут даже быть фермионными, хотя вплоть до § 16.4 мы не будем следить за возни-

кающими в этом случае знаками.) Фейнмановские правила для вычисления $Z[J]$ совпадают с правилами для вычисления $Z[0]$ в отсутствие внешних токов за исключением того, что теперь на фейнмановских диаграммах появляются вершины нового типа, в которые входит одна линия, соответствующая полю ϕ^r . Каждая такая вершина, помеченная координатой x , дает множитель $iJ_r(x)$ в подынтегральное выражение для амплитуды в координатно-временном представлении. Иначе говоря, в разложении величины $Z[J]$ по степеням J коэффициент при слагаемом, пропорциональном $iJ_r(x)iJ_s(y)\dots$, дается суммой диаграмм, внешние линии которых (включающие пропагаторы) соответствуют полям $\phi^r(x)$, $\phi^s(y)$ и т. д. В частности, первая производная $Z[J]$ выражается через вакуумный матричный элемент квантовомеханического оператора $\Phi^r(x)$, сопоставляемого полю $\phi^r(x)$:

$$\left[\frac{\delta}{\delta J_r(y)} Z[J] \right]_{J=0} = i \int \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \phi^r(y) \exp\{iI[\phi] + \epsilon \text{ члены}\} = \\ = i \langle \text{BAK, out} | \Phi^r(y) | \text{BAK, in} \rangle_{J=0}. \quad (16.1.2)$$

Иногда мы будем иметь дело с определенными согласно (16.1.1) функционалами $Z[J]$ в случае, когда поля $\phi^r(x)$ являются не элементарными (фигурирующими в лагранжиане) полями, а произведениями таких полей. Если поле $\phi^r(x)$ представляет собой произведение N элементарных полей, в возникающей в фейнмановских правилах новой вершине будут сходиться N линий. Некоторые из результатов настоящей главы (включая выражение (16.1.2)) остаются справедливыми и в этом случае; но везде, где речь будет идти о фейнмановских диаграммах, мы будем молчаливо предполагать, что поля $\phi^r(x)$ являются элементарными.

Итак, функционал $Z[J]$ дается суммой *всех* вакуумных диаграмм в присутствии внешнего тока J — как связанных, так и несвязных (однако при этом диаграммы, получающиеся друг из друга лишь перестановкой вершин, входящих в одну или несколько связанных поддиаграмм, не считаются различными). Произвольная диаграмма, содержащая N связанных компонент, дает в $Z[J]$ вклад, равный произведению вкладов этих компонент, деленному $N!$ — числу перестановок, лишь меняющих местами все вершины каждой из связанных компонент со всеми вершинами другой связанной компоненты¹⁾. Следовательно,

¹⁾ Вклад фейнмановской диаграммы с N связными компонентами, содержащими $n_1, n_2, \dots, n_N$ вершин, пропорционален возникающему в разложении Дайсона множителю $1/(n_1 + n_2 + \dots + n_N)!$ и числу $(n_1 + n_2 + \dots + n_N)!/N!$ перестановок вершин, различных при условии, что перестановки, лишь меняющие местами все вершины каждой из связанных компонент со всеми вершинами другой связанной компоненты, считаются одинаковыми.

сумма всех таких диаграмм равна

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (iW[J])^N = \exp(iW[J]), \quad (16.1.3)$$

где через $iW[J]$ обозначена сумма всех *связных* вакуумных диаграмм (в которой снова не считаются различными диаграммы, получающиеся друг из друга перестановкой вершин).

Во многих случаях оказывается полезным сделать еще один шаг и вместо величины $W[J]$ работать с суммой всех *одночастично неприводимых* диаграмм. (Одночастично неприводимой называется диаграмма, которая не может быть разрезана на две несвязные части по внутренней линии.) Формальное выражение для такой суммы можно получить следующим образом. Сначала определим $\phi_J^r(x)$ как вакуумное среднее оператора $\Phi^r(x)$ при наличии тока J :

$$\phi_J^r(x) \equiv \frac{\langle \text{BAK, out} | \Phi^r(x) | \text{BAK, in} \rangle_J}{\langle \text{BAK, out} | \text{BAK, in} \rangle_J} = -\frac{i}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J_r(x)} Z[J]. \quad (16.1.4)$$

В терминах суммы связных диаграмм получим

$$\phi_J^r(x) = \frac{\delta}{\delta J_r(x)} W[J]. \quad (16.1.5)$$

Эту формулу можно обратить. Определим $J_{\phi^r}(x)$ как ток, для которого среднее (16.1.4) равно наперед заданной величине $\phi^r(x)$:

$$\phi_J^r(x) = \phi^r(x), \quad \text{если} \quad J_r(x) = J_{\phi^r}(x).$$

Квантовое эффективное действие [1] $\Gamma[\phi]$ определяется (как функционал от ϕ , а не от J) через преобразование Лежандра:

$$\Gamma[\phi] \equiv - \int d^4x \phi^r(x) J_{\phi^r}(x) + W[J_{\phi}]. \quad (16.1.6)$$

Вскоре мы покажем, что $\Gamma[\phi]$ представляет собой сумму всех связных одночастично неприводимых диаграмм при наличии тока J_{ϕ} . Однако сначала рассмотрим другую интерпретацию физического смысла этой величины.

Заметим, что вариационная производная $\Gamma[\phi]$ равна

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi^s(y)} = - \int d^4x \phi^r(x) \frac{\delta J_{\phi^r}(x)}{\delta \phi^s(y)} - J_{\phi^s}(y) + \int d^4x \left[\frac{\delta W[J]}{\delta J_r(x)} \right]_{J=J_{\phi}} \frac{\delta J_{\phi^r}(x)}{\delta \phi^s(y)}.$$

Пользуясь соотношением (16.1.5), перепишем эту формулу в виде

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi^s(y)} = -J_{\phi^s}(y). \quad (16.1.7)$$

Таким образом, $\Gamma[\phi]$ является “эффективным действием” в том смысле, что возможные значения внешних полей $\phi^s(y)$ в *отсутствие* то-

ка J даются стационарными точками Γ :

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi^s(y)} = 0 \quad \text{при} \quad J = 0. \quad (16.1.8)$$

Уместно сравнить полученные формулы с классическими уравнениями поля, которые определяют условия стационарности исходного действия $I[\phi]$. Таким образом, равенство (16.1.8) можно рассматривать как уравнение движения для внешнего поля ϕ , учитывающее квантовые поправки.

Помимо того что эффективное действие $\Gamma[\phi]$ помогает выписать полевые уравнения с учетом квантовых поправок, оно также позволяет вычислить величину $iW[J]$ посредством суммирования всех связанных *древесных* вакуумных диаграмм, вершины которых определяются с использованием действия $\Gamma[\phi]$ вместо $I[\phi]$. (Под *древесной* диаграммой мы понимаем диаграмму, распадающуюся на две несвязные части после разрезания любой внутренней линии.) Все эффекты от диаграмм с петлями учитываются за счет замены $I[\phi]$ на $\Gamma[\phi]$.

Чтобы убедиться в этом [2], рассмотрим величину $W_\Gamma[J, g]$, которую мы получим вместо $W[J]$ при использовании действия $g^{-1}\Gamma[\phi]$ вместо $I[\phi]$:

$$\exp\{iW_\Gamma[J, g]\} \equiv \int \prod_{r,x} d\phi^r(x) \exp\left\{ig^{-1}\left[\Gamma[\phi] + \int d^4x \phi^r(x) J_r(x)\right] + \epsilon \text{ члены}\right\} \quad (16.1.9)$$

(g в этой формуле является параметром). Пропагатор получается обращением коэффициента при квадратичном по ϕ слагаемом в $g^{-1}\Gamma[\phi]$ и потому пропорционален g . Каждая вершина дает вклад, пропорциональный $1/g$, так что диаграмма с N вершинами (включая вершины от внешнего тока J) и I внутренними линиями (включая линии, входящие в вершины с током J) дает вклад, пропорциональный g^{I-V} . Любая связанная диаграмма содержит $L = I - V + 1$ петель, так что зависимость соответствующего диаграмме с L петлями слагаемого в $W_\Gamma[J, g]$ от g имеет вид

$$(W_\Gamma[J, g])_{L \text{ петель}} \propto g^{L-1}. \quad (16.1.10)$$

Эквивалентно можно (по крайней мере формально) записать

$$W_\Gamma[J, g] = \sum_{L=0}^{\infty} g^{L-1} W_\Gamma^{(L)}[J], \quad (16.1.11)$$

где (в этом несложно убедиться, положив $g = 1$) величина $W_\Gamma^{(L)}[J]$ есть вклад от диаграмм с L петлями в связанную вакуумную амплитуду $W_\Gamma[J, 1]$, вычисляемую с использованием $\Gamma[\phi]$ (без множителя g) вместо действия $I[\phi]$.

Для нас особый интерес представляет сумма *древесных* (не содержащих петель) диаграмм, при вычислении которых вершинам и пропагаторам ставятся в соответствие выражения, полученные на основе действия $\Gamma[\phi]$ (вместо $I[\phi]$) — в наших обозначениях это $W_\Gamma^{(0)}[J]$. Чтобы выделить в (16.1.11) слагаемое с $L = 0$, рассмотрим предел $g \rightarrow 0$. При этом главный вклад в функциональный интеграл (16.1.9) будет давать точка стационарной фазы:

$$\exp\{iW_\Gamma[J, g]\} \propto \exp\left\{ig^{-1}\left[\Gamma[\phi_J] + \int d^4x \phi_J^r(x) J_r(x)\right]\right\}, \quad (16.1.12)$$

где в силу своего определения (как поля, генерируемого током J) поле ϕ_J будет стационарной точкой показателя, т. е.

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^r(x)}\right|_{\phi=\phi_J} = -J_r(x). \quad (16.1.13)$$

Коэффициент пропорциональности в (16.1.12) является, вообще говоря, функционалом от J ; однако его разложение в ряд по степеням g начинается со слагаемого порядка g^0 . Поэтому после взятия логарифма от обеих частей равенства и выделения слагаемых порядка g^{-1} получим

$$W_\Gamma^{(0)}[J] = \Gamma[\phi_J] + \int d^4x \phi_J^r J_r(x). \quad (16.1.14)$$

Полагая в равенстве (16.1.6) $\phi = \phi_J$, убеждаемся, что правая часть (16.1.14) есть в точности $W[J]$:

$$W_\Gamma^{(0)}[J] = W[J]. \quad (16.1.15)$$

Последняя формула означает, что значение $W[J]$ можно найти, используя $\Gamma[\phi]$ вместо $I[\phi]$ (на что указывает индекс Γ) и учитывая только *древесные* (не содержащие петель) диаграммы:

$$iW[J] = \int_{\substack{\text{связные} \\ \text{древесные}}} \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \exp\left\{i\Gamma[\phi] + i \int \phi^r(x) J_r(x) d^4x\right\}. \quad (16.1.16)$$

Далее, любую связную диаграмму для $iW[J]$ можно рассматривать как дерево, вершинами которого являются одночастично неприводимые поддиаграммы. Поэтому для справедливости (16.1.16) необходимо, чтобы величина $i\Gamma[\phi]$ представляла собой сумму всех одночастично неприводимых связных диаграмм с произвольным числом внешних линий, каждой из которых ставится в соответствие множитель ϕ (а не пропагатор или волновая функция). Поэтому коэффициенты разложения $\Gamma[\phi]$ по степеням полей и их производных вблизи некоторого фиксированного поля ϕ_0 могут рассматриваться как *перенормированные* константы взаимодействия, где “точка” перенормировки определяется полем ϕ_0 , а не каким-либо набором импульсов.

Иными словами, величина $i\Gamma[\phi]$ при некотором фиксированном значении $\phi_0^r(x)$ может быть представлена как сумма одночастично неприводимых вакуумных диаграмм, вычисленных с использованием “смещенного” действия $I[\phi + \phi_0]$:

$$i\Gamma[\phi_0] = \int_{\substack{\text{одночастично} \\ \text{неприводимые,} \\ \text{связные}}} \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \exp\{iI[\phi + \phi_0]\}. \quad (16.1.17)$$

Корректность этого перехода объясняется тем, что всюду, где поле ϕ_0 появляется в вершине или пропагаторе на одночастично неприводимой диаграмме из (16.1.17), возможно также и присоединение соответствующей полю ϕ внешней линии. Ограничение одночастично неприводимыми диаграммами в (16.1.17) существенно: в противном случае мы могли бы произвести сдвиг переменной интегрирования, получив явно не зависящий от ϕ_0 интеграл. Вместо (16.1.17) часто оказывается более удобным писать

$$\exp[i\Gamma[\phi_0]] = \int_{\substack{\text{одночастично} \\ \text{неприводимые}}} \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \exp\{iI[\phi + \phi_0]\}, \quad (16.1.18)$$

где функциональный интеграл вычисляется с учетом всех диаграмм (как связанных, так и несвязных), у которых каждая из связанных компонент одночастично неприводима.

* * *

Изложенный формализм предоставляет в наше распоряжение простой метод суммирования древесных диаграмм. В качестве примера рассмотрим соотношение между полной двухточечной корреляционной функцией $\Delta^{rx,sy}$ и ее одночастично неприводимой частью $\Pi_{rx,sy}$. Из (16.1.5) и (16.1.7) находим

$$\Delta^{rx,sy} \equiv \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_r(x) \delta J_s(y)} = \frac{\delta \phi_J^r(x)}{\delta J_s(y)}, \quad (16.1.19)$$

$$\Pi_{rx,sy} \equiv \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi^r(x) \delta \phi^s(y)} = -\frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta \phi^s(y)}. \quad (16.1.20)$$

Отсюда сразу следует, что “матрицы” Δ и Π удовлетворяют соотношению

$$\Delta = -\Pi^{-1}. \quad (16.1.21)$$

Это аналог известного соотношения (10.3.15) между пропагатором и собственно энергетической частью, где лишнее слагаемое $q^2 + m^2$ в знаменателе (10.3.15) соответствует вкладу нулевого порядка в одночастично неприводимую двухточечную корреляционную функцию.

§ 16.2. Вычисление эффективного потенциала

Чтобы увидеть, как изложенный в предыдущем параграфе формализм применяется на практике, рассмотрим простой пример: перенормируемую теорию с одним действительным скалярным полем $\phi(x)$ и действием

$$I[\phi] = - \int d^4x \left[\lambda + \frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{24} g \phi^4 \right]. \quad (16.2.1)$$

(Мы включили в плотность лагранжиана “космологическую постоянную” $-\lambda$; причины этого вскоре станут ясны.) Предположим для простоты, что нам требуется вычислить $\Gamma[\phi_0]$ для пространственно-однородного поля $\phi_0(x) = \phi_0$. В этом случае каждое слагаемое в $\Gamma[\phi_0]$ будет содержать множитель

$$\mathcal{V}_4 = \int d^4x = \delta^4(p-p)(2\pi)^4, \quad (16.2.2)$$

равный объему пространства-времени — он возникает благодаря ответственному за сохранение 4-импульса дельта-функциям. Поэтому для постоянного ϕ_0 можно записать

$$\Gamma[\phi_0] = -\mathcal{V}_4 V(\phi_0), \quad (16.2.3)$$

где $V(\phi_0)$ — обычная функция, называемая *эффективным потенциалом*. В этом параграфе мы вычислим однопетлевые диаграммы для эффективного потенциала. Впервые это сделали Коулмен и Вайнберг [3] при рассмотрении спонтанного нарушения симметрии (которое будет предметом нашего внимания в главах 19 и 21). Они также использовали полученные результаты в одном из первых приложений метода ренормгруппы (этот метод мы обсудим в § 18.2).

После сдвига поля ϕ на величину ϕ_0 действие (16.1.18) принимает вид¹⁾

$$\begin{aligned} I[\phi + \phi_0] = & -\mathcal{V}_4 \left[\lambda + \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{24} g \phi_0^4 \right] - \\ & - \left[m^2 \phi_0 + \frac{1}{6} g \phi_0^3 \right] \int d^4x \phi - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \frac{1}{2} \mu^2(\phi_0) \phi^2 \right] - \\ & - \int d^4x \left[\frac{1}{6} g \phi_0 \phi^3 + \frac{1}{24} g \phi^4 \right], \end{aligned} \quad (16.2.4)$$

где μ^2 — зависящая от поля масса

$$\mu^2(\phi_0) = m^2 + \frac{1}{2} g \phi_0^2. \quad (16.2.5)$$

¹⁾ При $m^2 < 0$ область применимости теории возмущений ограничена. Мы рассмотрим этот вопрос в следующем параграфе.



Рис. 16.1. Фейнмановские диаграммы с числом петель не выше двух для эффективного действия в теории нейтрального скалярного поля ϕ со взаимодействием ϕ^4

Отметим, что помимо слагаемых ранее имевшихся типов в эффективном действии появляются члены, пропорциональные ϕ (несущественные для одночастично неприводимых диаграмм), и члены, пропорциональные ϕ^3 .

Фейнмановские диаграммы для $\Gamma[\phi_0]$ с числом петель не выше двух изображены на рис. 16.1. Не содержащая петель вакуумная диаграмма есть просто постоянное слагаемое в $I[\phi + \phi_0]$:

$$i\Gamma^{(0 \text{ loop})}[\phi_0] = -i\mathcal{Y}_4 \left(\lambda + \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{g}{24} \phi_0^4 \right). \quad (16.2.6)$$

Однопетлевой вклад равен

$$\begin{aligned} \exp(i\Gamma^{(1 \text{ loop})}[\phi_0]) = \\ = \int \prod_x d\phi(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \int d^4x [\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \mu^2(\phi_0) \phi^2] + \epsilon \text{ члены} \right\}. \end{aligned} \quad (16.2.7)$$

Мы научились вычислять подобные интегралы в гл. 9. Результат дается формулой (9.A.18):

$$i\Gamma^{(1 \text{ loop})}[\phi_0] = \ln \text{Det} \left(\frac{iK}{\pi} \right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{iK}{\pi} \right), \quad (16.2.8)$$

где

$$K_{x,y} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial y_\lambda} + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon \right] \delta^4(x - y). \quad (16.2.9)$$

Как обычно, для нахождения подобных следов удобно диагонализировать “матрицу” K посредством перехода к импульсному пространству:

$$K_{p,q} = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2} e^{-ip \cdot x} \frac{d^4y}{(2\pi)^2} e^{iq \cdot y} K_{x,y} = (p^2 + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon) \delta^4(p - q). \quad (16.2.10)$$

Логарифм такой диагональной матрицы есть диагональная матрица, составленная из логарифмов матричных элементов исходной:

$$\left[\ln \left(\frac{iK}{\pi} \right) \right]_{p,q} = \ln \left[\frac{i}{\pi} (p^2 + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon) \right] \delta^4(p - q), \quad (16.2.11)$$

а потому ее след равен

$$\begin{aligned} i\Gamma^{(1\text{ loop})}[\phi_0] &= -\frac{1}{2} \int d^4p \left[\ln\left(\frac{iK}{\pi}\right) \right]_{p,p} = \\ &= -\frac{\mathcal{V}_4}{2(2\pi)^4} \int d^4p \ln\left(\frac{i}{\pi} (p^2 + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon)\right). \end{aligned} \quad (16.2.12)$$

Объединяя формулы (16.2.6) и (16.2.12), получаем выражение для эффективного потенциала в однопетлевом приближении:

$$V(\phi_0) = \lambda + \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{g}{24} \phi_0^4 + \mathcal{J}(\mu^2(\phi_0)), \quad (16.2.13)$$

где

$$\mathcal{J}(\mu^2) \equiv \frac{-i}{2(2\pi)^4} \int d^4p \ln\left(\frac{i}{\pi} [p^2 + \mu^2 - i\epsilon]\right). \quad (16.2.14)$$

Совершенно очевидно, что выписанные для эффективного потенциала формулы содержат ультрафиолетовые расходимости. К счастью, эти расходимости благополучно поглощаются при переходе к перенормированным параметрам теории. Хотя интеграл (16.2.14) расходится, простой подсчет степеней показывает, что он становится сходящимся после трехкратного дифференцирования по μ^2 :

$$\mathcal{J}'''(\mu^2) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p (p^2 + \mu^2 - i\epsilon)^{-3}.$$

В очередной раз слагаемое $-i\epsilon$ указывает нам на то, что контур интегрирования по p^0 следует повернуть против часовой стрелки. Получаем $p^0 = ip_4$, где p_4 пробегает интервал от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\mathcal{J}'''(\mu^2) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{2\pi^2 k^3 dk}{(k^2 + \mu^2)^3} = \frac{1}{32\pi^2 \mu^2}.$$

После трехкратного интегрирования приходим к выражению

$$\mathcal{J}(\mu^2) = \frac{\mu^4 \ln \mu^2}{64\pi^2} + A + B\mu^2 + C\mu^4.$$

Прделанные выкладки не позволяют найти значения констант A , B и C . Впрочем, эти константы в любом случае бесконечны, так что в их определении нет большой необходимости. Можно исключить эти постоянные, вводя “перенормированные” значения λ , m^2 и g согласно

$$\begin{aligned} \lambda_R &\equiv \lambda + A + Bm^2 + Cm^4, \\ m_R^2 &\equiv m^2 + gB + 2gm^2C, \\ g_R &\equiv g + 6g^2C. \end{aligned}$$

Окончательный результат для эффективного потенциала в однопетлевом приближении имеет вид

$$V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2} m_R^2 \phi_0^2 + \frac{g_R}{24} \phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0) \ln \mu^2(\phi_0)}{64\pi^2}, \quad (16.2.15)$$

где $\mu(\phi_0)$ — зависящая от поля масса, которая с нужной нам точностью может быть получена подстановкой в (16.2.5) m_R и g_R вместо m и g :

$$\mu^2(\phi) = m_R^2 + \frac{1}{2} g_R \phi^2.$$

Аналогичные результаты справедливы и для теории комплексного фермионного поля $\psi(x)$ спина $1/2$, взаимодействующего со скалярным полем ϕ . Например, в случае когда плотность гамильтониана взаимодействия равна просто $G\phi\bar{\psi}\psi$, масса фермиона $M(\phi_0)$ при наличии постоянного скалярного фонового поля ϕ_0 имеет вид

$$M(\phi_0) = M(0) + G\phi_0.$$

Легко видеть, что при этом в потенциале (16.2.15) возникает дополнительный член

$$V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2} m_R^2 \phi_0^2 + \frac{g_R}{24} \phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0) \ln \mu^2(\phi_0)}{64\pi^2} - \frac{M^4(\phi_0) \ln M^2(\phi_0)}{16\pi^2}. \quad (16.2.16)$$

Числовой коэффициент при новом слагаемом в четыре раза больше по модулю, чем при слагаемом $\mu^4 \ln \mu^2$ в формуле (16.2.15), поскольку мы считаем фермион ψ и антифермион $\bar{\psi}$ различными (и каждый из них имеет два спиновых состояния). Знаки же этих слагаемых противоположны, поскольку (как было показано в гл. 9) фермионные гауссовы интегралы пропорциональны определителю матрицы, стоящей в показателе экспоненты, в то время как бозонные гауссовы интегралы обратно пропорциональны этому определителю.

§ 16.3. Энергетическая интерпретация

Эффективное действие $\Gamma[\phi]$ и потенциал $V[\phi]$ имеют важные интерпретации в терминах энергии и плотности энергии соответственно [4]. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующую физическую ситуацию. Предположим, что мы включаем ток $J^n(\mathbf{x}, t)$, медленно увеличивая его значение от нуля при $t = -\infty$ до некоторой конечной величины $\mathcal{J}^n(\mathbf{x})$, сохраняем это значение в течение длительного времени T , после чего плавно уменьшаем ток до нуля при $t = +\infty$. В результате наложения такого возмущения вакуумное состояние преобразуется в некоторое состояние с определенной энергией $E[\mathcal{J}]$ (являющейся функционалом от $\mathcal{J}^n(\mathbf{x})$), остается в этом состоянии в течение времени T , после чего снова переходит в вакуумное. Однако хотя конечный (*out*) вакуум физически эквивалентен исходному (*in*), соответствующие векторы состояния будут отличаться на фазовый множитель $\exp(-iE[\mathcal{J}]T)$, набираемый за время T :

$$\langle \text{BAK, out} | \text{BAK, in} \rangle_J = \exp(-iE[\mathcal{J}]T). \quad (16.3.1)$$

Сравнивая этот результат с (16.1.1) и (16.1.3), получаем

$$W[J] = -E[\mathcal{J}]T. \quad (16.3.2)$$

Чтобы увидеть связь между входящей в выписанные формулы энергией и эффективным действием, найдем состояние Ω_ϕ обладающее минимальным средним значением энергии

$$\langle H \rangle_\Omega = \frac{(\Omega, H\Omega)}{(\Omega, \Omega)}, \quad (16.3.3)$$

при условии, что квантовые поля $\Phi_n(\mathbf{x}, t)$ имеют независимые от времени средние, равные $\phi_n(\mathbf{x})$:

$$\frac{(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x}, t)\Omega)}{(\Omega, \Omega)} = \phi_n(\mathbf{x}). \quad (16.3.4)$$

Удобно также наложить условие на нормировку состояния Ω :

$$(\Omega, \Omega) = 1. \quad (16.3.5)$$

Чтобы найти минимум величины (16.3.3) при ограничениях (16.3.4) и (16.3.5), воспользуемся методом множителей Лагранжа и будем минимизировать величину

$$(\Omega, H\Omega) - \alpha(\Omega, \Omega) - \int d^3x \beta^n(\mathbf{x})(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x})\Omega), \quad (16.3.6)$$

не накладывая ограничений на Ω . Имеем

$$H\Omega = \alpha\Omega + \int d^3x \beta^n(\mathbf{x})\Phi_n(\mathbf{x})\Omega. \quad (16.3.7)$$

Здесь α и $\beta^n\mathbf{x}$ выбираются так, чтобы удовлетворялись условия (16.3.4) и (16.3.5), и потому являются функционалами от средних $\phi_n(x)$.

Из сказанного выше следует, что при наличии тока $\mathcal{J}^n(\mathbf{x})$ гамильтониан $H - \int d^3x \mathcal{J}^n(\mathbf{x})\Phi_n(\mathbf{x})$ имеет собственное значение $E[\mathcal{J}]$:

$$\left[H - \int d^3x \mathcal{J}^n(\mathbf{x})\Phi_n(\mathbf{x}) \right] \Psi_{\mathcal{J}} = E[\mathcal{J}]\Psi_{\mathcal{J}} \quad (16.3.8)$$

(здесь $\Psi_{\mathcal{J}}$ — нормированный собственный вектор). Более того, поскольку медленное включение тока переводит вакуум в это собственное состояние, можно утверждать, что $E[\mathcal{J}]$ представляет собой наименьшее собственное значение гамильтониана в присутствии тока $\mathcal{J}_n(\mathbf{x})$. Следовательно, равенства (16.3.4), (16.3.5) и (16.3.7) будут выполнены, если положить

$$\Omega = \Psi_{\phi}, \quad (16.3.9)$$

$$\alpha = E[\mathcal{J}_\phi], \quad (16.3.10)$$

$$\beta^n(\mathbf{x}) = \mathcal{J}_\phi^n(\mathbf{x}), \quad (16.3.11)$$

где через $\mathcal{J}_\phi(\mathbf{x})$ обозначен ток, для которого среднее значение $\Phi(\mathbf{x})$ в состоянии $\Psi_{\mathcal{J}}$ равно $\phi(\mathbf{x})$.

Положим в формуле (16.3.8) $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\phi$ и скалярно умножим обе части на $\Psi_{\mathcal{J}_\phi}$. В результате получим, что наименьшая возможная энергия состояния, в котором поля Φ_n имеют средние значения ϕ_n , равна

$$\langle H \rangle_\Omega = E[\mathcal{J}_\phi] + \int d^3x \mathcal{J}_\phi^n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}). \quad (16.3.12)$$

Учитывая постулированную нами временную зависимость $J(x)$ и равенство (16.3.2), перепишем эту формулу в виде

$$\langle H \rangle_\Omega = \frac{1}{T} \left[-W[J_\phi] + \int d^4x J_\phi^n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) \right] = -\frac{1}{T} \Gamma[\phi]. \quad (16.3.13)$$

Как мы отметили в предыдущем параграфе, если поле $\phi(x)$ постоянно и равно ϕ в большом пространственно-временном объеме $\mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_3 T$, то эффективное действие может быть выражено через эффективный потенциал $V(\phi)$ согласно

$$\Gamma[\phi] = -\mathcal{V}_3 T V(\phi). \quad (16.3.14)$$

В этом случае из (16.3.13) следует, что плотность энергии равна

$$\langle H \rangle_\Omega / \mathcal{V}_3 = V(\phi). \quad (16.3.15)$$

Мы получили основной результат этого параграфа: *эффективный потенциал $V(\phi)$ равен минимуму среднего значения плотности энергии, взятому по состояниям, в которых скалярные поля Φ_n обладают средними ϕ_n* . Одним из следствий этого утверждения является то, что в отсутствие внешних токов вакуум будет переходить в состояние, соответствующее не просто стационарной точке потенциала $V(\phi)$ (как это следует из уравнения (16.1.8)), а обязательно *минимуму* этого потенциала.

Теперь мы можем преодолеть следующую трудность в интерпретации квантового эффективного потенциала. Из евклидова варианта формализма функционального интеграла (изложенного в приложении А к гл. 23) с очевидностью следует, что двухточечная корреляционная функция Δ положительно определена (в матричном смысле). Согласно (16.1.2), то же верно и для $-\Pi = \Delta^{-1}$. Используя (16.2.3), получаем, что в теории с одним скалярным полем ϕ вторая производная эффективного потенциала $V(\phi)$ по ϕ должна быть неотрицательной. В более общих терминах, эффективный потенциал должен быть *выпуклым* [5]:

$$V(\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2) \leq \lambda V(\phi_1) + (1-\lambda)V(\phi_2) \quad \text{при} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Но анализ формулы (16.2.13) показывает, что при $m^2 < 0$ и $g > 0$ эффективный потенциал в теории скалярного поля с действием (16.2.1) в древесном приближении имеет *отрицательно определенную* вторую

производную, если ϕ лежит между двумя точками минимума эффективного потенциала (которые расположены в точках $\pm\sqrt{6|m^2|/g}$). Возникающее противоречие связано с тем, что при выводе теории возмущений неявно предполагается существование стабильного вакуума; однако при $V''(\phi) < 0$ поле ϕ принимает значение $\tilde{\phi}$, для которого $V(\tilde{\phi}) - J_\phi\tilde{\phi}$ имеет максимум, а не минимум — т. е. вакуумное состояние в присутствии тока J_ϕ нестабильно.

Чему же равно истинное значение эффективного потенциала для такой теории скалярного поля в случае, когда $m^2 < 0$, а ϕ лежит между двумя минимумами потенциала? Согласно результатам этого параграфа, нам следует найти состояние с наименьшей энергией, в котором среднее значение оператора Φ равно ϕ . Поскольку ϕ лежит между точками минимума потенциала $\phi \simeq \pm\sqrt{6|m^2|/g}$, мы можем добиться нужного среднего значения для Φ , взяв подходящую линейную комбинацию состояний с ϕ в точках минимума. Так как энергия этих состояний равна наименьшей возможной, мы тем самым правильно решаем задачу ее минимизации (интерференционные слагаемые обращаются в нуль в пределе бесконечного объема системы по причинам, которые будут изложены в § 19.1). Следовательно, эффективный потенциал в интервале между двумя минимумами постоянен, в соответствии с требованием неотрицательности второй производной. Аналогичные рассуждения показывают, что в более общих теориях, где потенциал обладает двумя локальными минимумами с различными значениями энергии, в интервале между ними эффективный потенциал представляет собой линейную функцию [6].

§ 16.4. Симметрии эффективного действия

Часто (но не всегда) симметрии действия $I[\phi]$ автоматически являются симметриями эффективного действия $\Gamma[\phi]$. Например, рассмотренное в § 16.2 действие (16.2.1) инвариантно относительно дискретного преобразования $\phi \rightarrow -\phi$. Тогда непосредственно из определений $Z[J]$ и $W[J]$ следует, что эти величины четны относительно отражения $J \rightarrow -J$. Из равенства (16.1.5) следует, что $\phi_{-J} = -\phi_J$ и потому $J_{-\phi} = -J_\phi$. Используя (16.1.6), получаем, что эффективное действие $\Gamma[\phi]$ четно относительно замены $\phi \rightarrow -\phi$. Это подтверждается и однопетлевым результатом (16.2.15). Вклад фермионной петли в (16.2.16) также обладает симметрией относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$ в случае $M(0) = 0$, поскольку в этом случае действие инвариантно относительно одновременной замены $\phi \rightarrow -\phi$, $\psi \rightarrow \gamma_5\psi$.

Чтобы не испытывать трудностей при доказательстве перенормируемости теории, нужно показать, что все симметрии действия

сохраняются и для эффективного действия. Действительно, пусть в рассмотренном выше примере четность по ϕ имеет место для $I[\phi]$, но не для $\Gamma[\phi]$. Тогда коэффициенты при слагаемых в Γ , пропорциональных $\int d^4x \phi$ и $\int d^4x \phi^3$, расходятся, в то время как уничтожающие эти расходимости контрчлены запрещены из соображений симметрии действия.

Рассмотрим в свете вышесказанного важный класс симметрий, порожденных инфинитезимальными преобразованиями

$$\chi^n(x) \rightarrow \chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi], \quad (16.4.1)$$

где F^n — функция x^μ , являющаяся функционалом от χ^n . (Например, $F^n(x, \chi)$ может представлять собой обычную функцию, зависящую от значений χ^n и ее производных в точке x .) Для обозначения полей мы используем символ χ^n , а не ϕ^r , чтобы подчеркнуть, что в их число могут входить не только обычные калибровочные поля и поля материи (которые в следующей главе мы и будем обозначать через $\phi^r(x)$), но и любые другие поля, входящие в действие после фиксации калибровки, в частности поля духов. Повторим еще раз, что поля $\chi^n(x)$ могут быть произвольного типа и не обязательно являются скалярами.

Предположим, что и действие, и мера интегрирования инвариантны относительно преобразования симметрии (16.4.1):

$$I[\chi + \epsilon F] = I[\chi], \quad (16.4.2)$$

$$\prod_{n,x} d(\chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi]) = \prod_{n,x} d\chi^n(x). \quad (16.4.3)$$

(Фактически необходима лишь инвариантность произведения

$$\left(\prod_{n,x} d\chi^n(x) \right) \exp(iI),$$

но в большинстве случаев при этом имеют место также и равенства (16.4.2) и (16.4.3).) Переходя в (16.1.1) к переменной интегрирования $\chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi]$, получаем

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \left[\prod_{n,x} d(\chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi]) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left\{ iI[\chi + \epsilon F] + i \int d^4x (\chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi]) J_n(x) \right\} = \\ &= \int \left[\prod_{n,x} d\chi^n(x) \right] \exp \left\{ iI[\chi] + i \int d^4x (\chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi]) J_n(x) \right\} = \\ &= Z[J] + i\epsilon \int \left(\prod_{n,x} d\chi^n(x) \right) \int F^n[y; \chi] J_n(y) d^4y \times \\ &\quad \times \exp \left\{ iI[\chi] + i \int d^4x \chi^n(x) J_n(x) \right\}, \end{aligned}$$

и потому

$$\int d^4y \langle F^n(y) \rangle_J J_n(y) = 0, \quad (16.4.4)$$

где посредством $\langle \dots \rangle_J$ обозначено квантовое среднее в присутствии тока $J_n(x)$:

$$Z[J] \langle F^n(y) \rangle_J \equiv \int \left(\prod_{n,x} d\chi^n(x) \right) F^n[y; \chi] \times \\ \times \exp \left\{ iI[\chi] + i \int d^4x \chi^n(x) J_n(x) \right\}, \quad (16.4.5)$$

нормированное согласно $\langle 1 \rangle_J = 1$. Вспомним, что $J_n(y)$ выражается через эффективное действие $\Gamma[\chi]$ согласно (16.1.7):

$$J_{n,\chi}(y) = - \frac{\delta \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)}.$$

Поэтому (16.4.4) можно переписать в виде

$$0 = \int d^4y \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)}. \quad (16.4.6)$$

Иначе говоря, эффективное действие $\Gamma[\chi]$ инвариантно относительно инфинитезимального преобразования

$$\chi^n(y) \rightarrow \chi^n(y) + \epsilon \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi}. \quad (16.4.7)$$

Подобные условия симметрии известны как *тождества Славнова-Тейлора* [7].

Совпадает ли это преобразование симметрии с исходным? Совпадение имеет место для очень важного класса *линейных* инфинитезимальных преобразований. Для таких симметрий F

$$F^n[x; \chi] = s^n(x) + \int t_m^n(x, y) \chi^m(y) d^4y. \quad (16.4.8)$$

(Чаще всего функция $s^n(x)$ постоянна и равна нулю, а $t_m^n(x, y)$ есть некоторая постоянная матрица, умноженная на $\delta^4(x - y)$.) Для любого линейного F имеем

$$\langle F^n(x) \rangle_J = s^n(x) + \int t_m^n(x, y) \langle \chi^m(y) \rangle_J d^4y.$$

Но для любого χ величина J_χ определяется как значение тока J , в присутствии которого среднее $\langle \chi^m(y) \rangle_J$ равно $\chi^m(y)$, так что

$$\langle F^n(x) \rangle_{J_\chi} = s^n(x) + \int t_m^n(x, y) \chi^m(y) d^4y = F^n[x; \chi]. \quad (16.4.9)$$

Поэтому из (16.4.6) следует, что действие $\Gamma[\chi]$ инвариантно относительно всех функциональных линейных преобразований $\chi^n \rightarrow \chi^n + \epsilon F^n$, оставляющих $I[\chi]$ и меру интегрирования неизменными.

Иногда приходится иметь дело с нелинейными преобразованиями симметрии (одним из важных примеров является БРСТ-преобразование, рассмотренное в § 15.7). При этом преобразование (16.4.7), относительно которого инвариантно эффективное действие, будет, вообще говоря, отлично от преобразования (16.4.1), сохраняющего исходное действие: среднее значение нелинейного функционала полей в общем случае отлично от значения функционала, вычисленного в соответствующей средним значениям полей точке. В самом деле, вид $\langle F \rangle_{J_\chi}$ как функционала от χ определяется динамикой системы и обычно содержит нелокальные зависимости. В следующей главе мы справимся с этими трудностями при помощи метода антискобок.

* * *

До сих пор мы молчаливо предполагали, что поля χ^n , функции F^n и токи J_n являются бозонными. В дальнейшем нам потребуются учитывать знаковые множители, когда некоторые из этих величин подчиняются статистике Ферми. Например, в случае суперсимметрии или преобразований БРСТ величина ϵ подчиняется статистике Ферми, а статистики χ^n и F^n противоположны. Располагая токи справа от полей (как в (16.1.1) и (16.4.5)), вместо (16.1.5) и (16.1.7) записываем

$$\frac{\delta_R W[J]}{\delta J_m(y)} = \chi_J^m(y), \quad (16.4.10)$$

$$\frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)} = -J_{\chi, n}(y), \quad (16.4.11)$$

где индексы R и L указывают на то, что дифференцирование действует справа или слева. Следовательно, тождество Славнова–Тейлора (16.4.6) следует переписать в виде

$$0 = \int d^4y \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)}. \quad (16.4.12)$$

Задачи

1. Рассмотрим теорию, содержащую действительное псевдоскалярное поле $\phi(x)$ с массой m и комплексное дираковское поле $\psi(x)$ с массой M . Пусть взаимодействие дается слагаемым $g\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$ в плотности лагранжиана. Вычислите в однопетлевом приближении эффективный потенциал в случае $\phi = \text{const}$, $\psi = 0$.

2. Выразите в общем виде

$$\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J_n(x) \delta J_m(y) \delta J_l(z)}$$

и

$$\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J_n(x) \delta J_m(y) \delta J_l(z) \delta J_k(w)}$$

через вариационные производные $\Gamma[\phi]$ по ϕ . Нарисуйте фейнмановские диаграммы, соответствующие каждому слагаемому в полученных формулах.

3. Вычислите в однопетлевом приближении эффективный потенциал для теории нейтрального скалярного поля ϕ со взаимодействием $g\phi^3/6$ в шестимерном пространстве-времени.

4. Предположим, что действие $I[\phi]$ инвариантно относительно задаваемого *конечной* матрицей преобразования

$$\phi_n(x) \rightarrow \sum_m M_{nm} \phi_m(x).$$

Относительно какого преобразования токов будет в этом случае инвариантна величина $W[J]$? Используйте полученный результат для определения симметричных свойств $\Gamma[\phi]$.

Литература

1. Эффективное действие $\Gamma[\phi]$ было введено в работе *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.* // *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962), где оно было определено пертурбативно как сумма одночастично неприводимых связанных диаграмм. Непертурбативное определение (16.1.6) было дано независимо в работах *De Witt B.* // in *Relativity, Groups and Topology — Lectures Delivered at Les Houches during the 1963 Session of the Summer School of Theoretical Physics*, C. De Witt, B. De Witt, eds. (Gordon and Breach, N.Y., 1964); *Jona-Lasinio G.* // *Nuovo Cimento* **34**, 1790 (1964).
2. *Coleman S.* // *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985). С. 135–136.
3. *Coleman S., Weinberg E.* // *Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973).
4. *Symanzik K.* // *Comm. Math. Phys.* **16**, 48 (1970); *Coleman S.* // *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985). С. 139–142.
5. *Symanzik K.*, ссылка 4; *Iliopoulos J., Itzykson C., Martin A.* // *Rev. Mod. Phys.* **47**, 165 (1975).
6. *Fujimoto Y., O’Raifeartaigh L., Parravicini G.* // *Nucl. Phys.* **B212**, 268 (1983); *Haymaker R.W., Perez-Mercader J.* // *Phys. Rev.* **D27**, 1948 (1983); *Bender C.M., Cooper F.* // *Nucl. Phys.* **B224**, 403 (1983); *Hindmarsh M., Johnston D.* // *J. Math. Phys.* **A19**, 141 (1986); *Branichina V., Castorina P., Zappalà D.* // *Phys. Rev.* **D41**, 1948 (1990); *Calhill K.* // *Phys. Rev.* **D52**, 4704 (1995).
7. *Slavnov A.A.* // *Theor. Math. Phys.* **10**, 152 (1972) [Английский перевод: *Theor. Math. Phys.* **10**, 99 (1972)]; *Taylor J.C.* // *Nucl. Phys.* **B33**, 436 (1971).

ПЕРЕНОРМИРОВКИ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

Теперь мы переходим к калибровочным теориям. При помощи развитого в предыдущей главе формализма внешнего поля мы исследуем вопрос об их перенормируемости и проведем некоторые важные вычисления.

§ 17.1. Уравнение Зинн-Жюстена

Мы воспользуемся описанной в § 15.7 симметрией БРСТ, чтобы продемонстрировать важное свойство квантового эффективного действия, впервые доказанное Зинн-Жюстеном [1]. В соответствии с изложенным в § 16.4 общим правилом, наличие БРСТ-симметрии у действия $I[\chi]$ накладывает на эффективное действие условие

$$\int d^4x \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(x)} = 0, \quad (17.1.1)$$

где поля $\chi^n(x)$ при преобразовании БРСТ с инфинитезимальным фермионным параметром θ изменяются согласно

$$\delta_\theta \chi^n(x) = \theta \Delta^n(x), \quad (17.1.2)$$

а через $\langle \dots \rangle$ обозначено вакуумное среднее при наличии тока J_χ , для которого вакуумные средние полей $X^n(x)$ даются c -числовыми функциями $\chi^n(x)$. Подразумеваемая сумма по n включает все поля, фигурирующие в формализме БРСТ, т.е. ω_α , ω_α^* и h_α , а также все калибровочные поля и поля материи, для которых в § 15.7 использовалось обозначение ϕ^r . Поскольку величина $\Delta^n(x)$ содержит вторые степени полей, когда χ^n является калибровочным полем, полем материи или полем ω_α , равенство (17.1.1), вообще говоря, *не означает*, что эффективное действие инвариантно относительно тех же преобразований БРСТ, что и исходное.

Чтобы справиться с этой трудностью, мы воспользуемся приемом, полезным при работе с любым нильпотентным преобразованием симметрии. Сначала мы введем набор c -числовых внешних полей $K_n(x)$ и определим новое эффективное действие согласно

$$\Gamma[\chi, K] \equiv W[J_{\chi, K}, K] - \int d^4x \chi^n(x) J_{\chi, K_n}(x), \quad (17.1.3)$$

где связная амплитуда перехода вакуум–вакуум W вычисляется с использованием действия в фиксированной калибровке¹⁾ $I + \int d^4x \times \Delta^n K_n$,

$$e^{iW[J,K]} \equiv \int \left[\prod_{n,x} d\chi^n(x) \right] \exp \left(iI + i \int d^4x \Delta^n K_n + i \int d^4x \chi^n J_n \right), \quad (17.1.4)$$

а токи $J_{\chi,K}$ таковы, что вакуумные средние в присутствии внешних полей K равны χ :

$$\left. \frac{\delta_R W[J,K]}{\delta J_n(x)} \right|_{J=J_{\chi,K}} \equiv \chi^n(x). \quad (17.1.5)$$

Статистика поля K_n (фермионная или бозонная) должна совпадать со статистикой поля Δ^n , которая противоположна статистике χ^n . Поскольку преобразование БРСТ нильпотентно, величины $\Delta^n(x)$ БРСТ-инвариантны. Поэтому при помощи аргументов, аналогичных приведенным в § 16.4, мы можем показать, что новое эффективное действие $\Gamma[\chi, K]$ удовлетворяет условию БРСТ-инвариантности:

$$\int d^4x \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_{\chi,K}} \frac{\delta_L \Gamma[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)} = 0, \quad (17.1.6)$$

где $\langle \dots \rangle_{J,K}$ означает вакуумное среднее, вычисленное в присутствии токов J и внешних полей K :

$$\langle \mathcal{O}[\chi] \rangle_{J,K} = \frac{\int \left[\prod_{n,x} d\chi^n(x) \right] \mathcal{O}[\chi] \exp \left(iI + i \int d^4x \Delta^n K_n + i \int d^4x \chi^n J_n \right)}{\int \left[\prod_{n,x} d\chi^n(x) \right] \exp \left(iI + i \int d^4x \Delta^n K_n + i \int d^4x \chi^n J_n \right)}. \quad (17.1.7)$$

Удобно выразить среднее значение Δ_n в виде некоторой вариационной производной эффективного действия. Взяв правую вариационную производную равенства (17.1.3) по K , получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} &= \left. \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta K_n(x)} \right|_{J=J_{\chi,K}} + \int d^4y \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta J_m(y)} \bigg|_{J=J_{\chi,K}} \frac{\delta_R J_{\chi, K_m}(y)}{\delta K_n(x)} - \\ &\quad - \int d^4y \chi^m(y) \frac{\delta_R J_{\chi, K_m}(y)}{\delta K_n(x)}. \end{aligned}$$

Из (17.1.5) следует, что последние два слагаемых взаимно уничтожаются. Используя определения (17.1.4) и (17.1.7), приходим к искомому соотношению

$$\frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} = \left. \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta K_n(x)} \right|_{J=J_{\chi,K}} = \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_{\chi,K}}. \quad (17.1.8)$$

¹⁾ Здесь I представляет собой модифицированное согласно § 15.7 действие $I_{\text{нов}}$, зависящее от полей духов ω_α и антидухов ω_α^* , а также вспомогательного поля h_α , причем индекс “нов” здесь и в дальнейшем опущен.

Условие БРСТ-инвариантности можно теперь переписать в очень простой форме, содержащей только эффективное действие:

$$\int d^4x \frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} \frac{\delta_L \Gamma[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)} = 0. \quad (17.1.9)$$

Это уравнение называется *уравнением Зинн-Жюстена*. Как было отмечено при анализе формулы (15.9.13), перестановка полей и антиполей (в нашем случае — χ^n и K_n) приведет лишь к смене знака левой части равенства (17.1.9); следовательно, это равенство можно переписать в виде

$$(\Gamma, \Gamma) = 0, \quad (17.1.10)$$

где при вычислении антискобки в качестве антиполя χ_n берется поле K_n :

$$(F, G) \equiv \int d^4x \frac{\delta_R F[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)} \frac{\delta_L G[\chi, K]}{\delta K_n(x)} - \int d^4x \frac{\delta_R F[\chi, K]}{\delta K_n(x)} \frac{\delta_L G[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)}. \quad (17.1.11)$$

Наше соотношение формально совпадает с “главным уравнением” формализма Баталина–Вильковскового, обсуждавшимся в § 15.9, но оно записано в виде условия на квантовое эффективное действие $\Gamma[\chi, K]$, а не на основное действие $S[\chi, \chi^\dagger]$. Мы будем использовать уравнение Зинн-Жюстена (17.1.10) в следующих двух параграфах при рассмотрении перенормировок калибровочных теорий и в § 22.6 при изучении аномалий в этих теориях.

§ 17.2. Перенормировка: прямой анализ

Простейшие неабелевы калибровочные теории перенормируемы в “дайсоновском” смысле, т. е. все входящие в плотность лагранжиана операторы имеют массовую размерность не выше 4. Как мы видели в гл. 12, в такой ситуации расходимости в квантовом эффективном действии могут появляться только в виде слагаемых, которые уничтожаются при помощи контрчленов для взаимодействий размерности не выше 4. Однако этим вопрос о перенормируемости не исчерпывается. Калибровочная инвариантность и другие симметрии накладывают ограничения на плотность лагранжиана. Для перенормируемости теории необходимо, чтобы расходимости в квантовом эффективном действии также удовлетворяли этим ограничениям (с точностью до перенормировки полей) [2].

Эффективное действие $\Gamma[\chi, K]$ представляет собой сложный функционал полей χ и K ; условие симметрии (17.1.9) накладывает на него довольно сложные ограничения. К счастью, при рассмотрении лишь расходящихся слагаемых в Γ ситуация значительно упрощается. Мы будем записывать действие $S[\chi, K] \equiv I[\chi] + \int d^4x \Delta^n K_n$ в виде суммы слагаемого $S_R[\chi, K]$, в котором массы и константы взаимодействий

положены равными своим перенормированным значениям, и добавочного слагаемого $S_\infty[\chi, K]$, содержащего контрчлены, с помощью которых мы намереваемся уничтожить расходимости в диаграммах с петлями. И S_R , и S_∞ должны обладать симметриями исходного действия $S[\chi, K]$. Следует выяснить, обладают ли расходящиеся части вкладов высших порядков в Γ теми же симметриями (если это так, то расходимости могут быть уничтожены при помощи контрчленов в S_∞).

Мы можем представить Γ в виде суммы ряда:

$$\Gamma[\chi, K] = \sum_{N=0}^{\infty} \Gamma_N[\chi, K], \quad (17.2.1)$$

где Γ_N содержит вклады диаграмм с N петлями и диаграмм с $N - M$ петлями ($1 \leq M \leq N$), включающих те контрчлены из S_∞ , которые используются для уничтожения расходимостей в диаграммах с полным числом петель M . Условие симметрии (17.1.10) примет тогда следующий вид¹⁾ для всех N :

$$\sum_{N'=0}^N (\Gamma_{N'}, \Gamma_{N-N'}) = 0. \quad (17.2.2)$$

В сумме (17.2.1) ведущее слагаемое есть просто $\Gamma_0[\chi, K] = S_R[\chi, K]$; оно, разумеется, не содержит расходимостей. Предположим, что для всех $N \leq M - 1$ все возникающие в диаграммах с M петлями расходимости уничтожаются контрчленами из S_∞ . Тогда в левой части (17.2.2) бесконечности могут возникнуть только в слагаемых, соответствующих $N' = 0$ и $N' = N$, которые равны между собой. Выделяя расходящуюся часть этого соотношения, получаем, что расходящаяся часть $\Gamma_{N,\infty}$ слагаемого Γ_N удовлетворяет условию

$$(S_R, \Gamma_{N,\infty}) = 0. \quad (17.2.3)$$

Это условие симметрии, порождаемое S_R ; оно аналогично равенствам (15.9.16) и (15.9.17). Отметим, что преобразование $X \rightarrow (S_R, X)$ действует как на поля χ_n , так и на внешние поля K_n .

¹⁾ Подобное соотношение для произвольного порядка можно формально получить, многократно повторяя рассуждение из §16.1. При замене действия S_R на $g^{-1}S_R$ вклад связной диаграммы с L петлями, I внешними линиями и V вершинами приобретает дополнительный множитель $g^{V-I} = g^{L-1}$. Если контрчлены в S_∞ , отвечающие N -петлевым диаграммам, также снабдить множителями g^N , то Γ_L будет значением при $g = 1$ слагаемого в Γ , содержащего g^{L-1} . Соотношение (17.2.2) получается, если потребовать, чтобы равенство (17.1.10) было выполнено во всех порядках по g . В системе единиц СГС действие имеет ту же размерность, что и $\hbar$, и потому входит в функциональный интеграл с множителем $1/\hbar$; следовательно, в качестве подсчитывающего число петель параметра вместо g можно использовать $\hbar$.

До сих пор мы не использовали никаких специфичных свойств перенормируемой теории Янга–Миллса. Однако из общих правил подсчета степеней в теории перенормировок следует, что после уничтожения всех расходимостей в поддиаграммах Γ_N бесконечная часть $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ величины $\Gamma[\chi, K]$ может быть лишь суммой произведений полей (включая поля K) и их производных, где каждое слагаемое имеет массовую размерность не выше 4. Далее, согласно результатам § 16.4, действие $\Gamma[\chi, K]$ — а следовательно, и его часть $\Gamma_{N,\infty}$ — инвариантны относительно всех *линейных* преобразований симметрии, являющихся симметриями действия. (Как будет показано ниже, к этому типу относятся преобразования Лоренца, *глобальные* калибровочные преобразования, трансляции антидухов, а также фазовые преобразования духов, связанные с сохранением их числа. Разумеется, вспомогательным полям K_n необходимо приписать подходящие трансформационные свойства относительно этих преобразований.) Этих замечаний в совокупности с условием (17.2.3) нам будет достаточно, чтобы узнать все необходимое о структуре $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$.

Чтобы воспользоваться перечисленными условиями, нам нужно знать размерности внешних полей K_n . Если массовая размерность поля χ_n равна d_n , то размерность поля Δ^n равна $d_n + 1$ (это можно увидеть из определяющих преобразование БРСТ формул (15.7.7)–(15.7.11)). Из условия безразмерности величины $\int d^4x K_n \Delta^n$ получаем, что размерность K_n равна $3 - d_n$. Поля $A^{\alpha\mu}$, ω^α и $\omega^{\alpha*}$ имеют размерность $d_n = +1$, так что соответствующие им поля K_n имеют размерность $+2$. (Мы не вводим никакого внешнего поля, соответствующего полю h^α , поскольку последнее БРСТ-инвариантно). Все поля материи ψ_l спина $1/2$ обладают размерностью $3/2$, и потому соответствующие им поля K_n также имеют размерность $3/2$. Таким образом, величина с массовой размерностью 4, в частности $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$, не более чем квадратична по любому из полей K_n . Более того, члены второго порядка по K_n не содержат никаких других полей (исключения составляют слагаемые, квадратичные по полям K_n , поставленным в соответствие полям материи со спином $1/2$ — такие слагаемые могут содержать не более одного дополнительного поля размерности $+1$).

Теперь мы воспользуемся сохранением числа духов и покажем, что на самом деле сумма для $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ не содержит квадратичных по полям K_n слагаемых. Для этой цели нам необходимо найти духовые квантовые числа полей K_n . Если духовое квантовое число поля χ^n равно γ_n , то духовое квантовое число поля Δ^n равно $\gamma_n + 1$; следовательно, полю K_n должно быть приписано духовое квантовое число $-\gamma_n - 1$. Поля $A^{\alpha,\mu}$, ψ^l , ω^α и $\omega^{\alpha*}$ обладают духовыми квантовыми числами 0 , 0 , $+1$ и -1 соответственно, так что поставленные им в соответствие поля K_n имеют духовые квантовые числа -1 , -1 , -2 и 0 . Из этого сразу следует, что $\Gamma_{N,\infty}$ не содержит квадратичных по K_n слагаемых — за возможным исключением членов второй степени по

полям K_α^* , ассоциированным с полями $\omega^{\alpha*}$ (и не содержащих других полей). Однако последний тип слагаемых также оказывается запрещенным, хотя и по иной причине. Под действием БРСТ-симметрии поля $\omega^{\alpha*}$ преобразуются линейно с

$$\Delta^{\alpha*} = -h^\alpha, \quad (17.2.4)$$

где

$$\frac{\delta_L \Gamma_{N,\infty}[\chi, K]}{\delta K_\alpha^*} = \langle \Delta^{\alpha*} \rangle_{J_\chi, K} = -h^\alpha$$

не зависит от K_α^* . Из этого следует, что величина $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ линейна по $K^{\alpha*}$, причем вся зависимость от $K^{\alpha*}$ определяется слагаемым $-\int d^4x K_\alpha^* h^\alpha$. (Поскольку и K_α^* , и h^α — бозонные поля, их порядок несуществен.) В частности, при $N > 0$ величина $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ не зависит от $K^{\alpha*}$.

Мы показали, что $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ не более чем линейна по всем полям K_n . Будем записывать это условие в виде

$$\Gamma_{N,\infty}[\chi, K] = \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0] + \int d^4x \mathcal{D}_N^n[\chi; x] K_n(x). \quad (17.2.5)$$

Величина S_R также зависит от K :

$$S_R[\chi, K] = S_R[\chi] + \int d^4x \Delta^n[\chi; x] K_n(x).$$

Выделив в правой части соотношения (17.2.3) слагаемые нулевого и первого порядков по K , получим соответственно ²⁾

$$\int d^4x \left[\Delta^n(\chi; x) \frac{\delta_L \Gamma_{N,\infty}(\chi, 0)}{\delta \chi^n(x)} + \mathcal{D}_N^n(\chi; x) \frac{\delta_L S_R[\chi]}{\delta \chi^n(x)} \right] = 0 \quad (17.2.6)$$

и

$$\int d^4x \left[\Delta^n(\chi; x) \frac{\delta_L \mathcal{D}_N^m(\chi; y)}{\delta \chi^n(x)} + \mathcal{D}_N^n(\chi; x) \frac{\delta_L \Delta^m(\chi; y)}{\delta \chi^n(x)} \right] = 0. \quad (17.2.7)$$

Смысл этих равенств становится более прозрачным, если ввести величины

$$\Gamma_N^{(\epsilon)}[\chi] \equiv S_R[\chi] + \epsilon \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0] \quad (17.2.8)$$

и

$$\Delta_N^{(\epsilon)n}(x) \equiv \Delta^n(x) + \epsilon \mathcal{D}_N^n(x), \quad (17.2.9)$$

где ϵ — инфинитезимальный параметр. Тогда соотношение (17.2.6)

²⁾ Вторые слагаемые в правых частях (17.2.6) и (17.2.7) выписаны с учетом того, что поля χ^n и K_n имеют противоположные статистики, а потому для любых бозонных функционалов A и B

$$\frac{\delta_R A}{\delta \chi^n} \frac{\delta_L B}{\delta K_n} = - \frac{\delta_L A}{\delta \chi^n} \frac{\delta_R B}{\delta K_n} = - \frac{\delta_R B}{\delta K_n} \frac{\delta_L A}{\delta \chi^n}.$$

(вместе с условием БРСТ-инвариантности S_R) означает, что величина $\Gamma_N^{(\epsilon)}[\chi]$ инвариантна относительно преобразования

$$\chi^n(x) \rightarrow \chi^n(x) + \theta \Delta_N^{(\epsilon)n}(x), \quad (17.2.10)$$

в то время как равенство (17.2.7) (вместе с условием нильпотентности исходного преобразования БРСТ) означает, что это преобразование *нильпотентно*.

Выясним теперь, какой вид может иметь это нильпотентное преобразование. Как уже отмечалось выше, $\Gamma_{N,\infty}$ содержит лишь слабые с массовой размерностью не выше 4; следовательно, размерность $\mathcal{Q}_N^n$ (а потому и $\Delta_N^{(\epsilon)n}$) не выше размерности функции $\Delta^n(x)$, определенной по исходному преобразованию БРСТ. Кроме того, $\mathcal{Q}_N^n$ (а потому и $\Delta_N^{(\epsilon)n}$) должны обладать теми же трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца и теми же духовыми квантовыми числами, что и $\Delta^n(x)$. Следовательно, наиболее общий вид преобразования (17.2.10) есть

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi + i\theta\omega^\alpha T_\alpha\psi, \\ A_{\alpha\mu} &\rightarrow A_{\alpha\mu} + \theta[B_{\alpha\beta}\partial_\mu\omega_\beta + D_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma], \\ \omega_\alpha &\rightarrow \omega_\alpha - \frac{1}{2}\theta E_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma, \end{aligned}$$

где T_α — некоторая матрица, действующая на спинорные поля, а $B_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta\gamma}$ и $E_{\alpha\beta\gamma}$ — константы, причем $E_{\alpha\beta\gamma}$ антисимметрична по индексам β и γ . Далее, преобразования ω_α^* и h_α линейны, и потому остаются неизменными:

$$\omega_\alpha^* \rightarrow \omega_\alpha^* - \theta h_\alpha, \quad h_\alpha \rightarrow h_\alpha.$$

Наложим теперь условие нильпотентности. Основное требование состоит в инвариантности величины $E_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma$. Из него следует, что сумма $E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon}\omega_\delta\omega_\epsilon\omega_\gamma$ равна нулю, т. е. полностью антисимметричная по индексам δ, ϵ, γ часть величины $E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon}$ должна обращаться в нуль:

$$E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon} + E_{\alpha\beta\epsilon}E_{\beta\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\delta}E_{\beta\epsilon\gamma} = 0.$$

Последнее равенство означает, что $E_{\alpha\beta\gamma}$ являются структурными константами некоторой алгебры Ли $\mathcal{E}$. Поскольку при $\epsilon \rightarrow 0$ коэффициенты $E_{\alpha\beta\gamma}$ переходят в структурные константы $C_{\alpha\beta\gamma}$ исходной калибровочной алгебры Ли $\mathcal{A}$, алгебры $\mathcal{E}$ и $\mathcal{A}$ совпадают, а структурные константы $E_{\alpha\beta\gamma}$ могут отличаться от структурных констант $C_{\alpha\beta\gamma}$ лишь общим множителем³⁾:

$$E_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{Z}C_{\alpha\beta\gamma}.$$

³⁾ Нетривиальные преобразования эквивалентности между $E_{\alpha\beta\gamma}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}$ невозможны ввиду условия глобальной калибровочной инвариантности.

(В таком виде формула справедлива для простых калибровочных групп. В общем случае каждой простой подгруппе соответствует свой множитель $\mathcal{Z}$.)

Перейдем теперь к условию нильпотентности действия преобразования (17.2.10) на калибровочные поля. Инвариантность $B_{\alpha\beta}\partial_\mu\omega_\beta + D_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma$ означает, что

$$D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta\delta\epsilon} - D_{\alpha\beta\epsilon}D_{\beta\delta\gamma} = E_{\beta\epsilon\gamma}D_{\alpha\delta\beta} = \mathcal{Z}C_{\beta\epsilon\gamma}D_{\alpha\delta\beta}$$

и

$$B_{\alpha\beta}E_{\beta\gamma\delta} = D_{\alpha\beta\delta}B_{\beta\gamma}.$$

Первое равенство оставляет единственную возможность ⁴⁾

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{Z}C_{\alpha\beta\gamma}.$$

Согласно второму равенству матрица $B_{\alpha\beta}$ коммутирует со всеми матрицами из присоединенного представления калибровочной группы, и потому (мы выбрали структурные константы полностью антисимметричными) пропорциональна единичной. Обозначая коэффициент пропорциональности через $\mathcal{Z}\mathcal{N}$, записываем

$$B_{\alpha\beta} = \mathcal{Z}\mathcal{N}\delta_{\alpha\beta}.$$

Наконец, из условия нильпотентности действия преобразования (17.2.10) на фермионные поля (если они присутствуют) следует инвариантность величины $\omega^\alpha T_\alpha\psi$. Получаем, что

$$[T_\beta, T_\gamma] = iE_{\alpha\beta\gamma}T_\alpha,$$

и T_α отличается от входящего в исходный лагранжиан генератора t_α лишь множителем $\mathcal{Z}$:

$$T_\alpha = \mathcal{Z}t_\alpha.$$

Мы видим, что с точностью до появления новых констант $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{N}$ преобразование (17.2.10) совпадает с исходным преобразованием БРСТ:

$$\psi \rightarrow \psi + i\mathcal{Z}\theta\omega^\alpha t_\alpha\psi, \quad (17.2.11)$$

$$A_{\alpha\mu} \rightarrow A_{\alpha\mu} + \mathcal{Z}\theta[\mathcal{N}\partial_\mu\omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma], \quad (17.2.12)$$

$$\omega_\alpha \rightarrow \omega_\alpha - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\theta C_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma, \quad (17.2.13)$$

$$\omega_\alpha^* \rightarrow \omega_\alpha^* - \theta h_\alpha, \quad (17.2.14)$$

$$h_\alpha \rightarrow h_\alpha. \quad (17.2.15)$$

⁴⁾ Матрица $(D_\gamma)_{\alpha\beta} \equiv D_{\gamma\alpha\beta}/\mathcal{Z}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям калибровочной алгебры Ли: $[D_\gamma, D_\epsilon] = C_{\beta\epsilon\gamma}D_\beta$. Но единственное представление простой алгебры Ли с такими же размерностью и трансформационными свойствами относительно $\mathcal{A}$, что и присоединенное представление, — это само присоединенное представление.

Теперь нам следует воспользоваться найденной симметрией, чтобы получить ограничения на структуру скорректированного действия (17.2.8). Поскольку оно содержит лишь перенормированное исходное действие и расходящуюся часть вклада диаграмм с N -петлями, его можно представить в виде интеграла от плотности лагранжиана

$$\Gamma_N^{(\epsilon)} = \int d^4x \mathcal{L}_N^{(\epsilon)}, \quad (17.2.16)$$

где $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ есть локальная функция полей и их производных, имеющих массовую размерность не выше 4. Кроме того, как мы видели в § 16.4, величина $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ должна обладать всеми симметриями исходного лагранжиана, действие которых на поля *линейно*. Чтобы найти эти симметрии, вспомним, что в обобщенной ξ -калибровке “новая” плотность лагранжиана из (15.7.6) получается посредством замены в (15.6.16) слагаемого $-(\partial_\mu A_\alpha^\mu)(\partial_\nu A_\alpha^\nu)/2\xi$ на $h_\alpha f_\alpha + \xi h_\alpha h_\alpha/2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{нов}} = \mathcal{L}_M - \frac{1}{4} F_\alpha^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} - \partial_\mu \omega_\alpha^* \partial^\mu \omega_\alpha + \\ + C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\alpha^*) A_\gamma^\mu \omega_\beta + h_\alpha \partial_\mu A_\alpha^\mu + \frac{1}{2} \xi h_\alpha h_\alpha. \end{aligned} \quad (17.2.17)$$

Анализируя эту формулу, находим следующие линейные симметрии.

1) **Лоренц-инвариантность.**

2) **Глобальную калибровочную инвариантность**, а именно инвариантность относительно преобразований

$$\delta\psi_l(x) = i\epsilon^\alpha (t_\alpha)_l^m \psi_m(x), \quad (17.2.18)$$

$$\delta A_\mu^\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha} \epsilon^\alpha A_\mu^\gamma(x), \quad (17.2.19)$$

$$\delta\omega_\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha} \epsilon^\alpha \omega_\gamma(x), \quad (17.2.20)$$

$$\delta\omega_\beta^*(x) = C_{\beta\gamma\alpha} \epsilon^\alpha \omega_\gamma^*(x), \quad (17.2.21)$$

$$\delta h_\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha} \epsilon^\alpha h_\gamma(x) \quad (17.2.22)$$

с инфинитезимальными числовыми параметрами ϵ^α .

3) **Инвариантность относительно трансляции антидухов**, а именно относительно преобразования

$$\omega_\alpha^*(x) \rightarrow \omega_\alpha^*(x) + c_\alpha, \quad (17.2.23)$$

с произвольными числовыми параметрами c_α .

4) **Сохранение числа духов**, т.е. сохранение духового квантового числа, равного +1 для полей ω_α , -1 для полей ω_α^* и 0 для всех остальных полей.

Теперь мы переходим к выяснению наиболее общего вида плотности лагранжиана, обладающей свойством перенормируемости (т.е. содержащей лишь слагаемые с массовой размерностью не выше 4) и инвариантной относительно всех перечисленных выше линейных

преобразований симметрии, а также относительно модифицированного преобразования БРСТ (17.2.11)–(17.2.15).

Из формулы (17.2.17) видно, что поля A_α^μ , ω_α , ω_α^* и h_α имеют массовую размерность +1, +1, +1 и +2 соответственно. Из требования сохранения числа духов следует, что поля ω и ω^* должны появляться обязательно парами, в то время как из инвариантности относительно трансляции антидухов получаем, что поля ω^* могут входить в плотность лагранжиана лишь в виде производных. Каждая пара полей ω и $\partial_\mu \omega^*$ увеличивает массовую размерность на 3, так что перенормируемость исключает слагаемые с более чем одной такой парой. При наличии одной пары допустимо еще вхождение как максимум одного дополнительного оператора дифференцирования или одного дополнительного калибровочного поля, причем из лоренц-инвариантности следует, что одна из этих возможностей должна быть реализована. Таким образом, возможными перенормируемыми взаимодействиями, содержащими духи, являются линейные комбинации членов вида $\partial_\mu \omega_\alpha^* \partial^\mu \omega_\beta$ и $\partial_\mu \omega_\alpha^* A_\gamma^\mu \omega_\beta$.

Далее, рассмотрим слагаемые, содержащие поле h_α , но не содержащие полей ω или ω^* . Поскольку размерность этого поля равна +2, условия перенормируемости и лоренц-инвариантности допускают его вхождение лишь в виде произведения либо на другое поле h_β , либо на $\partial_\mu A_\beta^\mu$, либо на $A_\beta^\mu A_{\mu\gamma}^5$.

Наконец, в лагранжиан могут входить перенормируемые слагаемые, содержащие лишь поля материи и калибровочные поля. Сумму всех таких членов мы обозначим через $\mathcal{L}_{\psi A}$. Сводя полученные результаты воедино и используя глобальную калибровочную инвариантность, мы можем записать наиболее общее перенормируемое взаимодействие, обладающее всеми предполагаемыми симметриями (помимо БРСТ-инвариантности), в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N^{(\epsilon)} = \mathcal{L}_{\psi A} + \frac{1}{2} \xi' h_\alpha h_\alpha + c h_\alpha \partial_\mu A_\alpha^\mu - e_{\alpha\beta\gamma} h_\alpha A_\beta^\mu A_{\gamma\mu} - \\ - Z_\omega (\partial_\mu \omega_\alpha^*) (\partial_\mu \omega_\alpha) - d_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\alpha^*) \omega_\beta A_\gamma^\mu, \quad (17.2.24) \end{aligned}$$

где ξ' , Z_ω , c , $d_{\alpha\beta\gamma}$ и $e_{\alpha\beta\gamma}$ — произвольные константы, на которые не накладывается никаких ограничений, кроме очевидных соотношений симметрии типа глобальной калибровочной инвариантности и $e_{\alpha\beta\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta}$. (Как отмечалось выше, мы предполагаем, что калибровочная группа является простой. Обобщение на случай прямой суммы простых калибровочных групп и групп $U(1)$ тривиально; например, вместо одного слагаемого, пропорционального $h_\alpha h_\alpha$, возникнет сумма

⁵⁾ Если в теории присутствуют скалярные поля, возможны также перенормируемые члены, в которых h_α умножается на одно или два скалярных поля. Такие слагаемые не причиняют неудобств, но ради краткости изложения рассматриваться не будут.

таких слагаемых, по одному на каждую простую подгруппу калибровочной группы.)

Наложим теперь условие БРСТ-инвариантности. Взаимное уничтожение в $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ слагаемых, пропорциональных $\theta\partial_\mu h_\alpha\partial^\mu\omega_\alpha$, влечет выполнение равенства

$$c = Z_\omega/\mathcal{Z}\mathcal{N}. \quad (17.2.25)$$

Взаимное уничтожение в $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ слагаемых, пропорциональных $\theta\partial_\mu h_\alpha\omega_\beta A_\gamma^\mu$ (или $\theta\partial_\mu\omega_\alpha^*\omega_\beta\partial^\mu\omega_\gamma$) имеет место только при

$$d_{\alpha\beta\gamma} = -(Z_\omega/\mathcal{N})C_{\alpha\beta\gamma}. \quad (17.2.26)$$

Слагаемые в $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$, пропорциональные $\theta\partial_\mu\omega_\alpha^*\omega_\beta\omega_\gamma A_\delta^\mu$, взаимно уничтожаются автоматически благодаря тождеству Якоби для структурных констант. Из условия взаимного уничтожения слагаемых, пропорциональных $\theta h_\alpha\partial_\mu\omega_\beta A_\gamma^\mu$ (или $\theta h_\alpha A_\beta^\mu A_{\gamma\mu}\omega_\delta$), получаем

$$e_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (17.2.27)$$

Наконец, действие инфинитезимального преобразования (17.2.10) на калибровочные поля и поля материи совпадает с действием локального калибровочного преобразования с калибровочными параметрами $\epsilon_\alpha = \mathcal{Z}\mathcal{N}\theta\omega_\alpha$ и калибровочными взаимодействиями, перенормированными на множитель $1/\mathcal{N}$ (т.е. с t_α и $C_{\alpha\beta\gamma}$, замененными на $\tilde{t}_\alpha \equiv t_\alpha/\mathcal{N}$ и $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv C_{\alpha\beta\gamma}/\mathcal{N}$). Поэтому взаимное уничтожение в $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ слагаемых, содержащих лишь один множитель ω_α и не содержащих h_α и ω_α^* , означает просто, что лагранжиан $\mathcal{L}_{\psi,A}$ для этих полей *калибровочно-инвариантен* с перенормированной константой калибровочного взаимодействия. Мы приходим к выводу, что наиболее общая перенормируемая плотность лагранжиана, разрешенная всеми предполагаемыми нами симметриями, есть

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N^{(\epsilon)} = & -\frac{1}{4}Z_A\tilde{F}_\alpha^{\mu\nu}\tilde{F}_{\alpha\mu\nu} - Z_\psi\bar{\psi}\gamma^\mu[\partial_\mu - i\tilde{t}_\alpha A_{\alpha\mu}]\psi - \\ & - \bar{\psi}m_\psi\psi + \frac{1}{2}\xi'h_\alpha h_\alpha + (Z_\omega/\mathcal{N}\mathcal{Z})h_\alpha\partial_\mu A_\alpha^\mu - Z_\omega(\partial_\mu\omega_\alpha^*)(\partial^\mu\omega_\alpha) + \\ & + Z_\omega\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\omega_\alpha^*)\omega_\beta A_\gamma^\mu, \end{aligned} \quad (17.2.28)$$

где тильда над $\tilde{F}_\alpha^{\mu\nu}$ указывает на то, что величина поля вычисляется с использованием перенормированных структурных констант $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv C_{\alpha\beta\gamma}/\mathcal{N}$. Но с точностью до возникновения нескольких новых постоянных коэффициентов это выражение задает наш исходный лагранжиан. Новые константы в этом лагранжиане могут быть легко переопределены посредством модификации слагаемых N -го порядка в соответствующих константах исходного перенормированного лагранжиана. В частности, мы можем переопределить эти слагаемые так,

чтобы выполнялось равенство $\Gamma_N^{(\epsilon)} = S_R$; при этом $\Gamma_{N,\infty} = 0$, что и требовалось.

* * *

В приведенном выше доказательстве оказалось существенным использование случайной инвариантности лагранжиана (17.2.17) с фиксированной калибровкой относительно преобразования трансляции антидухов (17.2.23). Такая симметрия не будет иметь места для фиксирующих калибровку функций, отличных от $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$ (не являющихся производными по пространственно-временным координатам). Один такой часто встречающийся вариант выбора, сохраняющий лоренц-инвариантность и глобальную калибровочную инвариантность, — это $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu + a_{\alpha\beta\gamma} A_\beta^\mu A_{\gamma\mu}$, где $a_{\alpha\beta\gamma}$ — постоянная матрица, симметричная по индексам β и γ , преобразующаяся как тензор под действием глобальных калибровочных преобразований. (Такие постоянные тензоры существуют для всех групп $SU(N)$ с $n \geq 3$.) Более важный пример дается определяемым в § 17.4 функционалом, фиксирующим калибровку фонового поля.

В отсутствие инвариантности относительно трансляции антидухов наши аргументы в пользу того, что величина $\mathcal{L}_N^\epsilon$ представляет собой локальную функцию полей и их производных массовой размерности не выше 4, инвариантную относительно преобразований Лоренца, глобальных калибровочных преобразований и перенормированного преобразования БРСТ (17.2.11)–(17.2.15), сохраняют свою силу. Однако при этом в $\mathcal{L}_N^\epsilon$ появляются новые члены, удовлетворяющие всем перечисленным условиям. Поскольку преобразование (17.2.11)–(17.2.15) нильпотентно, такие члены можно искать в виде $s'F$, где преобразование (17.2.11)–(17.2.15) действует согласно $\chi^n \rightarrow \chi^n + \theta s' \chi^n$, а F — произвольное лоренц-инвариантное и глобально калибровочно инвариантное поле с духовым квантовым числом -1 . Одним из таких слагаемых является

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta\gamma} s'(\omega_\alpha^* A_{\beta\mu} A_\gamma^\mu) = \\ = -a_{\alpha\beta\gamma} [h_\alpha A_{\beta\mu} A_\gamma^\mu + 2\mathcal{Z} \omega_\alpha^* (\mathcal{N} \partial_\mu \omega_\beta + C_{\beta\delta\epsilon} A_{\delta\mu} \omega_\delta) A_\gamma^\mu]. \end{aligned}$$

Оно не причиняет неудобств, поскольку является просто перенормированным вариантом суммы обычных духовых и фиксирующих калибровку слагаемых, возникающих благодаря членам вида $a_{\alpha\beta\gamma} A_\beta^\mu A_{\gamma\mu}$ в фиксирующих калибровку функциях f_α . Но возможно также и слагаемое

$$b_{\alpha\beta\gamma} s'(\omega_\alpha^* \omega_\beta^* \omega_\gamma) = -b_{\alpha\beta\gamma} \left[2h_\alpha \omega_\beta^* \omega_\gamma + \frac{1}{2} \mathcal{Z} C_{\gamma\delta\epsilon} \omega_\alpha^* \omega_\beta^* \omega_\delta \omega_\epsilon \right],$$

где $b_{\alpha\beta\gamma}$ — антисимметричная по индексам α и β постоянная величина, преобразующаяся как тензор относительно глобальных калибровочных преобразований. (Такие тензоры существуют для любой алгебры

Ли: например, можно взять $b_{\alpha\beta\gamma}$ пропорциональным $C_{\alpha\beta\gamma}$.) Однако в методе Фаддеева–Попова–де Витта в лагранжиане не могут возникнуть взаимодействия четырех духов, так что в нашем распоряжении не будет контрчленов, способных уничтожить ультрафиолетовые расходимости в этом слагаемом. Это не просто техническая трудность в доказательстве перенормируемости; если фиксирующие калибровку функции имеют вид $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu + a_{\alpha\beta\gamma} A_\beta^\mu A_{\gamma\mu}$, в однопетлевых диаграммах действительно возникают расходимости для вершин с четырьмя духами, не уничтожаемые контрчленами из лагранжиана Фаддеева–Попова–де Витта.

Помимо использования фиксирующих калибровку функций вида $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$, можно, по-видимому, предложить лишь одно решение этой проблемы, упомянутое в § 15.7. Следует отказаться от подхода Фаддеева–Попова–де Витта и с самого начала предположить, что действие представляет собой наиболее общий перенормируемый функционал калибровочных полей, полей материи, духов и вспомогательных полей, инвариантный относительно преобразования БРСТ и других имеющихся в теории симметрий. Согласно результатам § 15.8 действие можно записать в виде $I_0 + s\Psi$, где I_0 не содержит духов, а S -матрица не зависит от Ψ ; поэтому можно убедиться в справедливости результатов, проквантовав калибровочную теорию в аксиальной калибровке, где взаимодействие духов исчезает, а затем выбрать Ψ произвольным образом. В частности, в действие можно включить слагаемые вида $s(\omega^* \omega^* \omega)$, которые будут давать контрчлены для расходимостей в вершинах с четырьмя духами.

§ 17.3. Перенормировка: общие калибровочные теории¹⁾

Изложенное в предыдущем параграфе доказательство перенормируемости неабелевых калибровочных теорий было основано на прямом переборе всех возможных слагаемых в действии, обладающих массовой размерностью не выше 4. Но в гл. 12 мы видели, что это ограничение на размерность входящих в действие членов в лучшем случае является хорошим приближением. Можно быть почти уверенным, что перенормируемые квантовые теории поля, удачно описывающие сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия, являются эффективными теориями поля, содержащими также и слагаемые размерности $d > 4$; последние не наблюдаются в обычных условиях, поскольку они подавлены отрицательными (равными $4 - d$) степенями некоторой большой массы, предположительно имеющей порядок

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

10^{16} – 10^{18} ГэВ. Гравитация также может быть описана эффективной теорией поля, в которой плотность лагранжиана содержит не только член Эйнштейна–Гильберта $-\sqrt{g}R/16\pi G$, но и все скаляры, построенные из четырех и более производных гравитационного поля. Мы должны показать, что калибровочные теории такого типа, не являющиеся перенормируемыми в смысле подсчета степеней, тем не менее перенормируемы в современном понимании (т. е. что условия, которые калибровочная симметрия накладывает на структуру ультрафиолетовых расходимостей, обеспечивают существование контрчлена для каждой из них) [3].

Для этого обратимся вновь к введенному в § 15.9 действию $S[\chi, \chi^\dagger]$, рассматриваемому как функция независимых полей χ^n (включающих калибровочные поля и поля материи ϕ^r , духи ω^A и поля ω^{A*} и h^A), а также их антиполей $\chi_n^\dagger$. В теориях типа квантовой гравитации или теорий Янга–Миллса, основанных на замкнутой калибровочной алгебре со структурными константами f_{AB}^C , предполагается, что действие имеет вид

$$S = I[\phi] + \omega^A f_A^r[\phi] \phi_r^\dagger + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B f_{AB}^C[\phi] \omega_C^\dagger - h^A \omega_A^{*\dagger}, \quad (17.3.1)$$

где $I[\phi]$ инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований $\phi^r \rightarrow \phi^r + \epsilon^A f_A^r[\phi]$. (Как и в § 15.9, индексы r , A и т. д. включают также и пространственно-временные координаты, по которым в суммах по этим индексам подразумевается интегрирование.)

Мы не будем ограничиваться рассмотрением лишь таких действий, однако будем предполагать, что из локальных симметрий теории следуют некоторые “структурные ограничения” на вид зависимости действия от антиполей (а правая часть (17.3.1) является одним из возможных вариантов). Структурные ограничения будем считать линейными: если они удовлетворены для $S + \mathcal{S}_1$ и $S + \mathcal{S}_2$, то для любых постоянных α_1 и α_2 они будут удовлетворены и для $S + \alpha_1 \mathcal{S}_1 + \alpha_2 \mathcal{S}_2$. Мы также будем использовать квантовое главное уравнение (15.9.35)

$$(S, S) - 2i\hbar \Delta S = 0, \quad (17.3.2)$$

где ΔS определено согласно (15.9.34), а множитель $\hbar$ выписан явно как подсчитывающий число петель параметр (см. сноску в предыдущем параграфе).

Действие можно разложить в ряд по степеням $\hbar$:

$$S = S_R + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots, \quad (17.3.3)$$

где S_R имеет тот же вид, что и S , но с заменой всех констант взаимодействий на их конечные перенормированные значения, а S_N — набор бесконечных контрчленов. Предполагается, что действие удовлетворяет квантовому главному уравнению (17.3.2), так что S_R должно

удовлетворять классическому главному уравнению

$$(S_R, S_R) = 0, \quad (17.3.4)$$

а для контрчленов должны выполняться соотношения

$$(S_R, S_N) = -\frac{1}{2} \sum_{M=1}^{N-1} (S_M, S_{N-M}) + i\Delta S_{N-1}. \quad (17.3.5)$$

Одних только контрчленов недостаточно для уничтожения ультрафиолетовых расходимостей в диаграммах с петлями. Обобщая обычную процедуру перенормировки полей, мы должны ввести перенормированные поля и антиполя, связанные с исходными полями и антиполями посредством некоторого антиканонического преобразования. Инфинитезимальное антиканоническое преобразование можно задать инфинитезимальным производящим функционалом δF по формуле (15.9.26); при этом последовательности антиканонических преобразований $G(t) \rightarrow G(t + \delta t) = G(t) + (F(t)\delta t, G(t))$ (где $G(t)$ — произвольный функционал полей и антиполей, $F(t)$ — производящий функционал) соответствует конечное каноническое преобразование $G \rightarrow \tilde{G} \equiv G(1)$ с

$$\frac{d}{dt} G(t) = (F(t), G(t)), \quad G(0) = G. \quad (17.3.6)$$

Если $F(t)$ представляет собой сумму ряда

$$F(t) = \hbar F_1 + \frac{1}{2} \hbar^2 t F_2 + \dots, \quad (17.3.7)$$

то из формул (17.3.3), (17.3.6) и (17.3.7) для преобразованного действия следует выражение

$$\begin{aligned} \tilde{S} = S_R + \hbar[S_1 + (F_1, S_R)] + \hbar^2[S_2 + (F_1, S_1) + (F_2, S_R) + \\ + \frac{1}{2}(F_1, (F_1, S_R))] + \dots \end{aligned} \quad (17.3.8)$$

Требуется выяснить, достаточен ли произвол в определении F_N и S_N для уничтожения всех расходимостей, возникающих в диаграммах с петлями.

Как уже отмечалось ранее, первое слагаемое S_R в правой части (17.3.3) заведомо конечно. Предположим, что за счет уничтожения расходимостей посредством выбора S_M и F_M с $M < N$ оказалось возможным избавиться от всех бесконечностей в слагаемых Γ_M порядка $\hbar^M$ в квантовом эффективном действии, для которых $M < N$. В предыдущем параграфе мы видели, что из уравнения Зинн-Жюстена (которое получается, если положить $\chi_n^\dagger = K_n + \delta\Psi/\delta\chi^n$) тогда следует, что бесконечная часть $\Gamma_{N,\infty}$ слагаемого порядка $\hbar^N$ в квантовом эффективном действии удовлетворяет соотношению

$$(S_R, \Gamma_{N,\infty}) = 0. \quad (17.3.9)$$

Полевые и антиполевые переменные χ^n и $\chi_n^\dagger$ связаны с переменными χ^n и K_n антиканоническим преобразованием, сохраняющим все антискобки, так что антискобку в (17.3.9) можно вычислять с использованием χ^n и $\chi_n^\dagger$ вместо χ^n и K_n .

Выполнение условия (17.3.5) для контрчлена S_N не эквивалентно выполнению условия (17.3.9) для $\Gamma_{N,\infty}$. Однако по любому набору S_N^0 , удовлетворяющему соотношениям (17.3.5), можно построить класс решений

$$S_N = S_N^0 + S'_N, \quad (17.3.10)$$

где S'_N произвольны при условии что $S_R + S'_N$ (как и $S_R + S_N^0$) обладает всеми симметриями S_R и что

$$(S_R, S'_N) = 0, \quad (17.3.11)$$

т. е. равенство (17.3.5) осталось справедливым. Бесконечная часть слагаемого N -го порядка в квантовом эффективном действии тогда может быть записана в виде

$$\Gamma_{N,\infty} = S'_{N,\infty} + (F_{n,\infty}, S_R) + X_{N,\infty}, \quad (17.3.12)$$

где X_N включает вклады диаграмм с петлями, слагаемое S_N^0 и различные члены в Γ , содержащие S_M и F_M с $M < N$. Например, для $N = 2$ из (17.3.8) получаем

$$\begin{aligned} X_2 = S_2^0 &+ 2(F_1, S_1) + (F_1, (F_1, S_R)) + \\ &+ \text{двухпетлевые члены, включающие только } S_R + \\ &+ \text{однопетлевые члены, включающие } S_R, S_1 \text{ и } F_1. \end{aligned}$$

Для наших целей достаточно знать о величине X_N , что она не зависит от S'_N и F_N и инвариантна относительно любого линейно реализованного глобального преобразования симметрии S_R .

Так как $(S_R, S_R) = 0$, преобразование $F \rightarrow (S_R, F)$ нильпотентно: для любого F

$$(S_R, (S_R, F)) = 0. \quad (17.3.13)$$

Но тогда из (17.3.9) и (17.3.11–17.3.13) получаем

$$(S_R, X_{N,\infty}) = 0. \quad (17.3.14)$$

Любое слагаемое в $X_{N,\infty}$, имеющее вид (S_R, Y) , можно уничтожить в (17.3.12), положив $F_{N,\infty}$ равным Y . Следовательно, можно считать, что пространство подлежащих уничтожению за счет контрчлена $S'_{N,\infty}$ расходящихся слагаемых в $X_{N,\infty}$ состоит из функционалов X , таких что $(S_R, X) = 0$ (в этом пространстве функционалы, отличающиеся лишь на величину вида (S_R, Y) , считаются одинаковыми). Иначе говоря, расходимости в Γ_N , которые должны быть уничтожены за счет контрчленов S'_N , принадлежат *когомологии* отображения $X \rightarrow (S_R, X)$.

Возможный вид контрчленов S'_N не вполне произволен: сумма $S_R + S'_N$ должна удовлетворять всем структурным ограничениям, наложенным на действие S . Доказательство перенормируемости будет закончено, если нам удастся показать, что когомология отображения $X \rightarrow (S_R, X)$ состоит лишь из функционалов, удовлетворяющих этим структурным ограничениям.

В случае квантовой гравитации, взаимодействующей с полем Янга–Миллса полупростой калибровочной симметрии, имеющиеся в теории симметрии учитываются посредством наложения структурного ограничения (17.3.1). В этом случае имеется теорема [4], согласно которой когомология отображения $X \rightarrow (S_R, X)$ (на пространстве локальных функционалов, а не только пространственно-временных функций, с нулевым духовым квантовым числом) состоит ²⁾ из функционалов $A[\phi]$, инвариантных относительно калибровочного преобразования $\phi^r \rightarrow \phi^r + \epsilon^A f_A^r[\phi]$ со структурными константами f_{AB}^C . Любая имеющая такой вид расходимость N -го порядка может быть уничтожена за счет контрчлена S'_N того же вида; следовательно, хотя такие теории и не перенормируемы в обычном смысле подсчета степеней, они перенормируемы в том смысле, что все возникающие в них расходимости могут быть устранены за счет выбора параметров исходного голого действия $I[\phi]$ и подходящей перенормировки полей и антиполей.

В других теориях когомология отображения $X \rightarrow (S_R, X)$ содержит дополнительные слагаемые. Это не обязательно влечет ослабление структурных ограничений, поскольку дополнительные члены в когомологии могут не соответствовать фактическим ультрафиолетовым расходимостям. Например, в калибровочных теориях с факторами, изоморфными $U(1)$, когомология содержит слагаемые [4], соответствующие переопределению действия калибровочной $U(1)$ -симметрии на различные имеющиеся в теории поля; если эти слагаемые бесконечны, мы будем вынуждены ослабить структурные ограничения, оставив произвольной нормировку функций $f_A^r[\phi]$ в (17.3.1). Но такие расходимости запрещены в соответствии с теми же теоремами о мягких фотонах, согласно которым отношения констант $U(1)$ -взаимодействий с различными полями (например, отношения различных лептонных зарядов в квантовой электродинамике) не получают радиационных поправок. (См. § 10.4.) Если дополнительные члены в когомологии действительно содержат ультрафиолетовые расходимости, необходимо ослабить наложенные на S структурные

²⁾ Строго говоря, для справедливости этого утверждения нужно потребовать, чтобы входящие в S постоянные коэффициенты не принимали некоторых специальных значений, для которых S оказывается инвариантной относительно более широкого класса локальных симметрий. В частности, этим исключается случай $S = 0$.

ограничения так, чтобы для каждой возможной ультрафиолетовой расходимости имелся соответствующий контрчлен. Неизвестно, всегда ли это возможно; в случае отрицательного ответа от некоторых теорий придется отказаться ввиду наличия в них неустраняемых ультрафиолетовых расходимостей.

§ 17.4. Калибровка фонового поля

В этом параграфе мы изложим метод вычислений, в явном виде сохраняющий некоторый аналог калибровочной инвариантности, и потому технически очень удобный (особенно для однопетлевых вычислений). Будем рассматривать эффективное действие $\Gamma[A, \psi, \omega, \omega^*]$ как функционал¹⁾ классических внешних калибровочных полей, полей материи, духов и антидухов: $A_{\alpha\mu}(x), \psi_l(x), \omega_\alpha(x), \omega_\alpha^*(x)$. Несмотря на то что духи и антидухи никогда не появляются в начальном или конечном состояниях, мы вводим фоновые духи и антидухи наряду с фоновыми калибровочными полями и фоновыми полями материи, чтобы иметь возможность работать с поддиаграммами, содержащими соответствующие духам или антидухам внешние линии.

Согласно сказанному в § 16.1, эффективное действие $\Gamma[A, \psi, \omega, \omega^*]$ представляет собой сумму связанных одночастично неприводимых вакуумных диаграмм, вычисляемых таким образом, что поля $A', \psi', \omega', \omega'^*$, по которым проводится интегрирование, заменяются на поля $A + A', \psi + \psi', \omega + \omega', \omega^* + \omega'^*$ (функциональный интеграл берется по штрихованным полям при фиксированных значениях нештрихованных). Мы имеем полную свободу в выборе фиксирующих калибровку функций $f_\alpha(x)$; вместо использованных ранее функций $f_\alpha = \partial_\mu A'^\mu_\alpha$ (или $\partial_\mu[A'^\mu_\alpha + A^\mu_\alpha]$) возьмем теперь [5]

$$f_\alpha = \partial_\mu A'^\mu_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A'^\mu_\gamma. \quad (17.4.1)$$

Такой выбор объясняется тем, что он делает фиксирующее калибровку слагаемое $f_\alpha f_\alpha$ инвариантным относительно формального преобразования, при котором фоновое поле A^μ_α преобразуется как калибровочное поле, а квантовое поле A'^μ_α преобразуется однородно, как обычное принадлежащее присоединенному представлению калибровочной группы поле материи:

$$\delta A^\mu_\alpha = \partial^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A^\mu_\gamma, \quad (17.4.2)$$

$$\delta A'^\mu_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A'^\mu_\gamma. \quad (17.4.3)$$

¹⁾ Здесь мы возвращаемся к выбору гауссова фиксирующего калибровку функционала $B[f]$ (15.7.4) и интегрируем по вспомогательному полю h_α , так что фиксирующий калибровку член в модифицированном лагранжиане есть просто $-f_\alpha f_\alpha / 2\xi$.

Трансформационные свойства функций f_α проще всего получить, записав эти функции в виде новой ковариантной производной

$$f_\alpha \equiv \bar{D}_\mu A'^\mu_\alpha, \quad (17.4.4)$$

где для произвольного поля ϕ_α , преобразующегося по присоединенному представлению,

$$\bar{D}_\mu \phi_\alpha \equiv \partial_\mu \phi_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \phi_\gamma. \quad (17.4.5)$$

Получаем, что под действием преобразования (17.4.2), (17.4.3) функции (17.4.1) преобразуются аналогично A'_α :

$$\delta f_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta f_\gamma, \quad (17.4.6)$$

так что слагаемое $f_\alpha f_\alpha$ в модифицированном лагранжиане оказывается инвариантным,

$$\delta(f_\alpha f_\alpha) = -2C_{\alpha\beta\gamma} f_\alpha \epsilon_\beta f_\gamma = 0. \quad (17.4.7)$$

Далее, исходная плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ зависит от полей A и A' только посредством суммы $A + A'$, которая под действием преобразования (17.4.2)–(17.4.3) изменяется как при обычном калибровочном преобразовании:

$$\delta(A^\mu_\alpha + A'^\mu_\alpha) = \partial^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta (A^\mu_\gamma + A'^\mu_\gamma). \quad (17.4.8)$$

Если определить правила преобразования фонового и квантового полей материи согласно

$$\delta\psi = it_\alpha \epsilon_\alpha \psi, \quad (17.4.9)$$

$$\delta\psi' = it_\alpha \epsilon_\alpha \psi', \quad (17.4.10)$$

то получим также

$$\delta(\psi + \psi') = it_\alpha \epsilon_\alpha (\psi + \psi'). \quad (17.4.11)$$

Исходный лагранжиан $\mathcal{L}$ инвариантен относительно калибровочного преобразования (17.4.8), (17.4.11) и зависит лишь от $A + A'$ и $\psi + \psi'$, так что он инвариантен и относительно нового формального преобразования (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10).

Удобно сделать это свойство инвариантности более явным, записав $\mathcal{L}$ через фоновую ковариантную производную $\bar{D}_\mu$. В общем случае имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu [A_{\alpha\nu} + A'_{\alpha\nu}] - \partial_\nu [A_{\alpha\mu} + A'_{\alpha\mu}] + \\ & + C_{\alpha\beta\gamma} [A_{\beta\mu} + A'_{\beta\mu}] [A_{\gamma\nu} + A'_{\gamma\nu}])^2 + \\ & + \mathcal{L}_M(\psi + \psi', \partial_\mu(\psi + \psi') - it_\alpha (A_{\alpha\mu} + A'_{\alpha\mu})(\psi + \psi')) = \\ = & -\frac{1}{4} (F_{\alpha\mu\nu} + \bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu})^2 + \\ & + \mathcal{L}_M(\psi + \psi', \bar{D}_\mu(\psi + \psi') - it_\alpha A'_{\alpha\mu}(\psi + \psi')), \end{aligned} \quad (17.4.12)$$

где, как и в формуле (17.4.5),

$$\bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} \equiv \partial_\mu A'_{\alpha\nu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu}, \quad (17.4.13)$$

$$\bar{D}_\mu \psi \equiv \partial_\mu \psi - it_\alpha A_{\alpha\mu} \psi, \quad (17.4.14)$$

а $F_{\alpha\mu\nu}$ — напряженность внешнего поля,

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}. \quad (17.4.15)$$

(При возведении первого слагаемого в $\mathcal{L}$ в квадрат подразумеваются очевидные свертки по индексам.) Инвариантность $\mathcal{L}$ относительно нового преобразования (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10) теперь следует из того, что $\mathcal{L}$ зависит от $A_{\alpha\mu}$ только посредством зависимости от напряженности поля $F_{\alpha\mu\nu}$ и ковариантных производных $\bar{D}_\mu$ полей “материи” $A'_{\alpha\mu}$, ψ' и ψ .

Следует специально отметить, что новое преобразование не является настоящим калибровочным преобразованием. Последнее не может оказывать влияния на поля A и ψ , которые представляют собой заданные внешние классические поля, и должно индуцировать обычное калибровочное преобразование полей $A + A'$ и $\psi + \psi'$:

$$\delta_{\text{наст}} A'_\alpha = 0, \quad (17.4.16)$$

$$\delta_{\text{наст}} A'^{\mu}_{\alpha} = \partial^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta (A^\mu_\gamma + A'^{\mu}_{\gamma}) = \bar{D}_\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A'^{\mu}_{\gamma} \quad (17.4.17)$$

и

$$\delta_{\text{наст}} \psi = 0, \quad (17.4.18)$$

$$\delta_{\text{наст}} \psi' = it_\alpha \epsilon_\alpha (\psi + \psi'). \quad (17.4.19)$$

По своему действию на $A + A'$ и $\psi + \psi'$ это преобразование не отличается от формальных правил (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10) и потому также оставляет лагранжиан $\mathcal{L}$ инвариантным. Однако для нашей новой функции f_α (17.4.1) слагаемое $f_\alpha f_\alpha$ не является функцией лишь от $A + A'$ и ввиду этого не инвариантно относительно преобразования (17.4.16)–(17.4.17). Фактически имеем

$$\delta_{\text{наст}} f_\alpha = \bar{D}_\mu (\bar{D}^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A'^{\mu}_{\gamma}) \quad (17.4.20)$$

где $\bar{D}_\mu$ дается выражением (17.4.5).

Наконец, рассмотрим лагранжиан духов в новой калибровке. Величина (15.7.3) в действии для духов получается в общем случае посредством замены ϵ_α в $\delta_{\text{наст}} f_\alpha$ на $\omega_\alpha + \omega'_\alpha$:

$$\Delta_\alpha = \bar{D}_\mu [\bar{D}^\mu (\omega_\alpha + \omega'_\alpha) - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_\beta + \omega'_\beta) A'^{\mu}_{\gamma}]. \quad (17.4.21)$$

Лагранжиан духов из (15.6.2) тогда есть

$$\mathcal{L}_{\text{ГН}} = (\omega_\alpha^* + \omega'^*_\alpha) \bar{D}_\mu [\bar{D}^\mu (\omega_\alpha + \omega'_\alpha) - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_\beta + \omega'_\beta) A'^{\mu}_{\gamma}] \quad (17.4.22)$$

или, после интегрирования по частям,

$$\mathcal{L}_{\text{ГН}} = -(\bar{D}_\mu (\omega_\alpha^* + \omega'^*_\alpha)) (\bar{D}^\mu (\omega_\alpha + \omega'_\alpha) - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_\beta + \omega'_\beta) A'^{\mu}_{\gamma}). \quad (17.4.23)$$

Это выражение явно инвариантно относительно объединенных преобразований (17.4.2), (17.4.3), дополненных правилами преобразования ω и ω' :

$$\delta\omega_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta\gamma}\omega_\gamma, \quad (17.4.24)$$

$$\delta\omega'_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta\gamma}\omega'_\gamma, \quad (17.4.25)$$

и аналогично

$$\delta\omega_\alpha^* = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta\gamma}\omega_\gamma^*, \quad (17.4.26)$$

$$\delta\omega'^*_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta\gamma}\omega'^*_\gamma. \quad (17.4.27)$$

Мы видим, что формальное комбинированное преобразование (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10), (17.4.24)–(17.4.27) оставляет неизменным полный лагранжиан, входящий в модифицированное действие (15.6.4):

$$\mathcal{L}_{\text{мод}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha + \mathcal{L}_{\text{ГН}}. \quad (17.4.28)$$

Мера интегрирования по полям A' , ψ' , ω' , ω'^* предполагается инвариантной относительно обычных матричных преобразований (17.4.3), (17.4.10), (17.4.25) и (17.4.27), так что эффективное действие $\Gamma[A, \psi, \omega, \omega^*]$ инвариантно относительно оставшихся преобразований (17.4.2), (17.4.9), (17.4.24) и (17.4.26). Иначе говоря, оно калибровочно инвариантно в том же смысле, что и исходное действие $I[A, \psi, \omega, \omega^*]$.

Формальная калибровочная инвариантность накладывает сильные ограничения на расходимости, которые могут возникнуть в эффективном действии. Ультрафиолетовые расходимости в Γ появляются в коэффициентах при членах с массовой размерностью $d \leq 4$; однако эти члены инвариантны относительно фоновых калибровочных преобразований (17.4.2), (17.4.9), (17.4.24) и (17.4.26). Например, в калибровочной теории с простой калибровочной группой и фермионами спина 1/2, принадлежащими неприводимому представлению этой группы, единственные члены такого вида — это

$$\Gamma_\infty = \int d^4x \mathcal{L}_\infty, \quad (17.4.29)$$

$$\mathcal{L}_\infty = -\frac{1}{4} L_A F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu} - L_\psi \bar{\psi} \gamma^\mu \bar{D}_\mu \psi - m L_m \bar{\psi} \psi - L_\omega (\bar{D}_\mu \omega_\alpha^*) (\bar{D}^\mu \omega_\alpha), \quad (17.4.30)$$

где $F_{\alpha\mu\nu}$, $\bar{D}_\mu \psi$, $\bar{D}_\mu \omega_\alpha$ и $\bar{D}_\mu \omega_\alpha^*$ состоят исключительно из фоновых полей²⁾:

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}, \quad (17.4.31)$$

²⁾ Условие простоты калибровочной группы гарантирует, что для полей A и ω имеется по одному кинетическому члену, пропорциональному $F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu}$ и $\bar{D}_\mu \omega_\alpha^* \bar{D}^\mu \omega_\alpha$ соответственно; условие того, что ψ преобразуется неприводимо, гарантирует, что для поля ψ имеется лишь один кинетический член и один массовый член. Нетрудно рассмотреть и более общий случай (ценой некоторых усложнений в обозначениях). Мы также неявно используем сохранение числа духов.

$$\bar{D}_\mu \psi \equiv \partial_\mu \psi - it_\alpha A_{\alpha\mu} \psi, \quad (17.4.32)$$

$$\bar{D}_\mu \omega_\alpha \equiv \partial_\mu \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma, \quad (17.4.33)$$

$$\bar{D}_\mu \omega_\alpha^* \equiv \partial_\mu \omega_\alpha^* + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma^*. \quad (17.4.34)$$

В соответствии с размерным анализом следует ожидать логарифмических расходимостей в коэффициентах L_A , L_ψ , L_m и L_ω .

Чтобы разобраться с этими расходимостями, заметим, что лагранжиан (17.4.12) содержит чисто классическую часть

$$\mathcal{L}_{\text{класс}} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu \bar{D}_\mu + m)\psi - (\bar{D}_\mu \omega_\alpha^*)(\bar{D}^\mu \omega_\alpha), \quad (17.4.35)$$

получаемую при удалении из $\mathcal{L}_{\text{мод}}$ всех членов, содержащих квантовые поля A' , ψ' , ω' , ω'^* . Определим перенормированные поля:

$$A_{\alpha\mu}^R \equiv \sqrt{1 + L_A} A_{\alpha\mu}, \quad (17.4.36)$$

$$\psi_l^R \equiv \sqrt{1 + L_\psi} \psi_l, \quad (17.4.37)$$

$$\omega_\alpha^R \equiv \sqrt{1 + L_\omega} \omega_\alpha, \quad (17.4.38)$$

$$\omega_\alpha^{R*} \equiv \sqrt{1 + L_\omega} \omega_\alpha^*. \quad (17.4.39)$$

Сумма (17.4.30) и (17.4.35) примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{класс}} + \mathcal{L}_\infty = & -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu}^R F_\alpha^{R\mu\nu} - \bar{\psi}^R \gamma^\mu D_\mu^R \psi^R - \\ & - m^R \bar{\psi}^R \psi^R - (D_\mu^R \omega_\alpha^{*R})(D^{\mu R} \omega_\alpha^R), \end{aligned} \quad (17.4.40)$$

где m^R — перенормированная масса

$$m^R \equiv m \frac{1 + L_m}{1 + L_\psi} \quad (17.4.41)$$

и

$$F_{\alpha\mu\nu}^R \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu}^R - \partial_\nu A_{\alpha\mu}^R + C_{\alpha\beta\gamma}^R A_{\beta\mu}^R A_{\gamma\nu}^R, \quad (17.4.42)$$

$$D_\mu^R \psi^R \equiv \partial_\mu \psi^R - it_\alpha^R A_{\alpha\mu}^R \psi^R, \quad (17.4.43)$$

$$D_\mu^R \omega_\alpha^R \equiv \partial_\mu \omega_\alpha^R + C_{\alpha\beta\gamma}^R A_{\beta\mu}^R \omega_\gamma^R, \quad (17.4.44)$$

$$D_\mu^R \omega_\alpha^{*R} \equiv \partial_\mu \omega_\alpha^{*R} + C_{\alpha\beta\gamma}^R A_{\beta\mu}^R \omega_\gamma^{*R}. \quad (17.4.45)$$

Перенормированные структурные константы и генераторы группы суть просто

$$C_{\alpha\beta\gamma}^R \equiv (1 + L_A)^{-1/2} C_{\alpha\beta\gamma}, \quad (17.4.46)$$

$$t_\alpha^R \equiv (1 + L_A)^{-1/2} t_\alpha, \quad (17.4.47)$$

Поскольку мы предполагали простоту алгебры Ли, структурные константы $C_{\alpha\beta\gamma}$ и генераторы t_α определяются структурой группы с точностью до общего множителя — неперенормированной калибровочной константы взаимодействия g . Равенства (17.4.46) и (17.4.47) означают

просто, что калибровочная константа взаимодействия g^R в C^R и t^R перенормируется согласно равенству

$$g^R = g(1 + L_A)^{-1/2}. \quad (17.4.48).$$

Этот результат явно демонстрирует преимущества калибровки фонового поля. В случае произвольной калибровки мы получим независимые перенормировочные множители для калибровочного поля и калибровочной константы взаимодействия и для их определения должны будем вычислить две различные амплитуды (например, поляризацию вакуума и вершинную функцию для трех калибровочных полей). В калибровке фонового поля благодаря фоновой калибровочной инвариантности эти два перенормировочных множителя оказываются связанными тем условием, что бесконечные члены в эффективном лагранжиане содержат напряженность поля в исходном виде (17.4.31). Следовательно, мы можем определить множитель для перенормировки заряда, вычислив лишь одну амплитуду.

§ 17.5. Однопетлевое вычисление в калибровке фонового поля

В качестве упражнения вычислим однопетлевый перенормировочный множитель для калибровочной константы взаимодействия в общей неабелевой калибровочной теории. Как мы увидим в следующей главе, этот результат поставяет основные исходные данные для так называемых ренормгрупповых вычислений при высоких энергиях; позднее мы воспользуемся им, чтобы продемонстрировать явление асимптотической свободы в неабелевых калибровочных теориях.

Метод, которым мы воспользуемся, несколько нестандартен. Обычно рассматривают эффективное действие при наличии переменного в пространстве–времени фонового калибровочного поля, находят квадратичные по этому полю слагаемые в действии, выделяют множитель

$$(q_\mu A_{\alpha\nu} - q_\nu A_{\alpha\mu})^2$$

(где q — 4-импульс калибровочного поля) и лишь после этого выделяют логарифмическую расходимость в коэффициенте при этом множителе, полагая $q = 0$. Вместо этого мы с самого начала предположим, что калибровочное поле постоянно в пространстве–времени, чем сильно упростим необходимые вычисления. При таком подходе в эффективном действии не возникнет членов второй и третьей степеней по калибровочному полю, однако останется ультрафиолетово расходящийся член четвертой степени, который можно будет использовать для определения перенормировочного множителя для константы взаимодействия $(1 + L_A)^{-1/2}$. Все однопетлевое вычисление сводится при этом к простой матричной алгебре. Отметим, что такой прием

работает только в калибровке фонового поля: в противном случае эффективное действие содержало бы независимые логарифмические расходимости в членах третьей и четвертой степеней по внешнему калибровочному полю.

Имея это в виду найдем однопетлевое эффективное действие при наличии фонового поля, для которого $A_{\alpha\mu}$ постоянно и $\psi = \omega = \omega^* = 0$. Для такого фонового поля полный модифицированный лагранжиан равен ¹⁾

$$\mathcal{L}_{\text{мод}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{\text{ГН}}, \quad (17.5.1)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\alpha\mu\nu} + \bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu})^2 - \bar{\psi}'(\bar{\mathcal{D}} - it_\alpha A'_\alpha + m)\psi', \quad (17.5.2)$$

$$\mathcal{L}_f \equiv -\frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha = -\frac{1}{2\xi} (\bar{D}_\mu A'^\mu_\alpha)^2, \quad (17.5.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ГН}} = -(\bar{D}_\mu \omega'^*_\alpha)(\bar{D}^\mu \omega'_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \omega'_\beta A'^\mu_\gamma). \quad (17.5.4)$$

Однопетлевые вакуумные диаграммы вычисляются с использованием части действия, квадратичной по квантовым полям A' , ψ' , ω' , ω'^* , по которым проводится интегрирование. Оставляя только квадратичные слагаемые, имеем

$$\mathcal{L}_{\text{квад}} = -\frac{1}{4}(\bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu})^2 - \frac{1}{2} F_\alpha^{\mu\nu} C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu} - \bar{\psi}'(\bar{\mathcal{D}} + m)\psi' - \frac{1}{2\xi} (\bar{D}_\mu A'^\mu_\alpha)^2 - (\bar{D}_\mu \omega'^*_\alpha)(\bar{D}^\mu \omega'_\alpha). \quad (17.5.5)$$

Соответствующее действие можно записать как квадратичный функционал общего вида

$$I_{\text{квад}} \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{\text{квад}} = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y A'^\mu_\alpha(x) A'^\nu_\beta(y) \mathcal{D}_{x\alpha\mu, y\beta\nu}^A - \int d^4x d^4y \bar{\psi}'_k(x) \bar{\psi}'_l(y) \mathcal{D}_{xk, yl}^\psi - \int d^4x d^4y \omega'^*_\alpha(x) \omega'_\beta(y) \mathcal{D}_{x\alpha, y\beta}^\omega, \quad (17.5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{x\alpha\mu, y\beta\nu}^A &\equiv \\ &\equiv \eta_{\mu\nu} \left(-\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + C_{\gamma\delta\alpha} A_\delta^\lambda(x) \right) \left(-\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\lambda}(y) \right) \delta^4(x-y) - \\ &- \left(-\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + C_{\gamma\delta\alpha} A_{\delta\nu}(x) \right) \left(-\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\mu} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\mu}(y) \right) \delta^4(x-y) + \end{aligned}$$

¹⁾ См. формулы (17.4.12), (17.4.4) и (17.4.23). Мы рассматриваем случай, когда поля материи образуют мультиплет фермионов спина 1/2; при возведении в квадрат в $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_f$ подразумевается очевидная свертка по индексам.

$$+ F_{\gamma\mu\nu}(x)C_{\gamma\alpha\beta}\delta^4(x-y) + \\ + \frac{1}{\xi}\left(-\delta_{\gamma\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\gamma\delta\alpha}A_{\delta\mu}(x)\right)\left(-\delta_{\gamma\beta}\frac{\partial}{\partial y^\nu} + C_{\gamma\epsilon\beta}A_{\epsilon\nu}(y)\right)\delta^4(x-y), \quad (17.5.7)$$

$$\mathcal{D}_{xk,yl}^\psi \equiv \left(-\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\gamma_\mu} - it_\alpha A_\alpha(y) + m\right)_{kl}\delta^4(x-y), \quad (17.5.8)$$

$$\mathcal{D}_{x\alpha,y\beta}^\omega = \left(-\delta_{\gamma\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + C_{\gamma\delta\alpha}A_{\delta\lambda}(x)\right)\left(-\delta_{\gamma\beta}\frac{\partial}{\partial y_\lambda} + C_{\gamma\epsilon\beta}A_\epsilon^\lambda(y)\right)\delta^4(x-y). \quad (17.5.9)$$

(Знаки “—” перед $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$ исчезают после интегрирования по частям.)

Однопетлевой вклад в эффективное действие равен (см. § 16.2)

$$\exp(i\Gamma^{\text{1 loop}}[A]) \propto \\ \propto \int_{\substack{\text{одночастично} \\ \text{неприводимые}}} (\prod dA') (\prod d\psi') (\prod d\bar{\psi}') (\prod d\omega') (\prod d\omega'^*) \times \\ \times \exp(iI_{\text{квад}}[A', \psi', \bar{\psi}', \omega', \omega'^*; A]) \propto (\text{Det } \mathcal{D}^A)^{-1/2} (\text{Det } \mathcal{D}^\psi)^{+1} (\text{Det } \mathcal{D}^\omega)^{+1}. \quad (17.5.10)$$

(Показатели $-1/2$ и $+1$ возникают вследствие того, что A' — действительное бозонное поле, а ψ' , $\bar{\psi}'$, ω' и ω'^* — различные фермионные поля.) Вообще говоря, нахождение таких определителей представляет собой непростую задачу. Однако в случае постоянных внешних полей, когда при переходе к импульсному представлению операторы $\mathcal{D}$ становятся диагональными, вычисления значительно упрощаются.

Рассмотрим поэтому случай постоянного фонового поля $A_{\alpha\mu}$. В неабелевой калибровочной теории такое поле *не может* быть устранено посредством калибровочного преобразования, что следует из наличия ненулевых калибровочно ковариантных полей

$$F_{\alpha\mu\nu} = C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu}, \quad (17.5.11)$$

$$D_\lambda F_{\delta\mu\nu} = C_{\delta\epsilon\alpha}C_{\alpha\beta\gamma}A_{\epsilon\lambda}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu} \quad (17.5.12)$$

и других, аналогичных выписанным. Вследствие лоренц-инвариантности и калибровочной инвариантности мы можем представить часть действия $\Gamma[A]$, имеющую заданную размерность, в виде интеграла от конечного числа локальных функций полей $F_{\alpha\mu\nu}$, $D_\lambda F_{\alpha\mu\nu}$ и т.д.; коэффициенты при слагаемых в таком выражении можно будет определить, сравнивая их вклад в случае постоянного фонового поля $A_{\alpha\mu}$ с результатами разложения по теории возмущений.

Мы преобразуем каждую из “матриц” $\mathcal{D}^A$, $\mathcal{D}^\psi$ и $\mathcal{D}^\omega$ к импульсному базису при помощи обычного нормированного преобразования

Фурье

$$\mathcal{D}_{q\dots p\dots} = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^2} e^{-iq \cdot x} \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^2} e^{ip \cdot y} \mathcal{D}_{x\dots y\dots} \quad (17.5.13)$$

Для постоянного A получаем

$$\mathcal{D}_{q\dots p\dots} = \delta^4(p - q) \mathcal{M}_{\dots\dots}(q), \quad (17.5.14)$$

где многоточие означает набор дискретных индексов, $\mathcal{M}$ — конечно-мерные, зависящие от q матрицы

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\mu,\beta\nu}^A(q) = & \eta_{\mu\nu}(-iq_\lambda \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\lambda} C_{\gamma\delta\alpha})(iq^\lambda \delta_{\gamma\beta} + A_\epsilon^\lambda C_{\gamma\epsilon\beta}) - \\ & - (-iq_\nu \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\nu} C_{\gamma\delta\alpha})(iq_\mu \delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon\mu} C_{\gamma\epsilon\beta}) + F_{\gamma\mu\nu} C_{\gamma\alpha\beta} + \\ & + (-iq_\mu \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\mu} C_{\gamma\delta\alpha})(iq_\nu \delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon\nu} C_{\gamma\epsilon\beta})/\xi + \epsilon \text{ члены}, \end{aligned} \quad (17.5.15)$$

$$\mathcal{M}_{kl}^\psi(q) = (i\not{q} - it_\alpha \not{A}_\alpha + m)_{kl} + \epsilon \text{ члены}, \quad (17.5.16)$$

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^\omega(q) = (-iq_\lambda \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\lambda} C_{\gamma\delta\alpha})(iq^\lambda \delta_{\gamma\beta} + A_\epsilon^\lambda C_{\gamma\epsilon\beta}) + \epsilon \text{ члены}, \quad (17.5.17)$$

а $F_{\gamma\mu\nu}$ дается выражением (17.5.11). Из (17.5.10) тогда следует

$$\begin{aligned} i\Gamma^{(1 \text{ loop})}[A] = & -\frac{1}{2} \ln \text{Det } \mathcal{D}^A + \ln \text{Det } \mathcal{D}^\psi + \ln \text{Det } \mathcal{D}^\omega = \\ = & -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{D}^A + \text{Tr} \ln \mathcal{D}^\psi + \text{Tr} \ln \mathcal{D}^\omega = \\ = & \delta^4(p - p) \int d^4 q \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \ln \mathcal{M}^A(q) + \text{tr} \ln \mathcal{M}^\psi(q) + \text{tr} \ln \mathcal{M}^\omega(q) \right]. \end{aligned} \quad (17.5.18)$$

В последней строке (17.5.18) и везде ниже в этом параграфе мы обозначаем операцию взятия следа через tr вместо Tr , чтобы подчеркнуть, что имеется в виду обычный след конечномерной матрицы, а не след интегрального оператора.

Поскольку наша цель — найти бесконечный множитель L_A , стоящий перед слагаемыми вида FF в эффективном действии, выделим в (17.5.18) член четвертой степени по фоновому полю A . Для этого удобно представить каждую матрицу $\mathcal{M}$ в виде суммы слагаемых $\mathcal{M}_n$, содержащих $n = 0, 1$ или 2 множителей A соответственно:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2. \quad (17.5.19)$$

После этого несложно посредством элементарных алгебраических преобразований показать, что слагаемое четвертого порядка по $A_{\mu\nu}$ в (17.5.18) равно

$$[\text{tr} \ln \mathcal{M}]_{A^4} = \text{tr} \left\{ -\frac{1}{2} [\mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_2]^2 + [\mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_1]^2 \mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_2 - \frac{1}{4} [\mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_1]^4 \right\}. \quad (17.5.20)$$

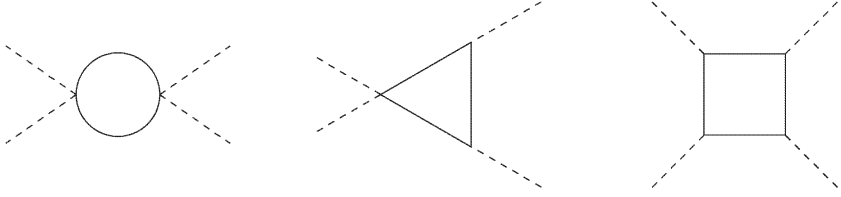


Рис. 17.1. Однопетлевые фейнмановские диаграммы для слагаемых в квантовом эффективном действии, имеющих четвертую степень по постоянно-му фоновому калибровочному полю A_α^μ . Сплошные линии соответствуют внутренним калибровочным полям, полям материи и духам; пунктирные линии — множителям A_α^μ . Три диаграммы представляют три слагаемых в (17.5.20)

(Для этого удобно умножить $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ в разложении (17.5.19) на ϵ и ϵ^2 соответственно, четыре раза продифференцировать $\text{tr} \ln \mathcal{M}$ по ϵ , разделить результат на $4!$ и положить $\epsilon = 0$.) Множители $\mathcal{M}_0^{-1}$ представляют собой обычные пропагаторы; для $\xi = 1$ они равны

$$[\mathcal{M}_0^A(q)]_{\alpha\mu,\beta\nu}^{-1} = \delta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} (q^2 - i\epsilon)^{-1}, \quad (17.5.21)$$

$$[\mathcal{M}_0^\psi(q)]_{kl}^{-1} = [i\not{q} + m]_{kl}^{-1}, \quad (17.5.22)$$

$$[\mathcal{M}_0^\omega(q)]_{\alpha,\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta} (q^2 - i\epsilon)^{-1}. \quad (17.5.23)$$

Действительно, три члена в сумме (17.5.20) соответствуют трем фейнмановским диаграммам, показанным на рис. 17.1; наш метод вычислений позволяет не заботиться о знаках и комбинаторных множителях.

Для A -петли из (17.5.15) при $\xi = 1$ получим

$$[\mathcal{M}_1^A(q)]_{\alpha\mu,\beta\nu} = -2\eta_{\mu\nu} q^\lambda [\mathcal{A}_\lambda]_{\alpha\beta},$$

$$[\mathcal{M}_2^A(q)]_{\alpha\mu,\beta\nu} = +[\eta_{\mu\nu} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\lambda - \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu]_{\alpha\beta} + F_{\gamma\mu\nu} C_{\gamma\alpha\beta},$$

где $\mathcal{A}_\lambda$ — матрица,

$$[\mathcal{A}_\lambda]_{\alpha\beta} \equiv -iC_{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma\lambda},$$

для которой

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_\rho]_{\alpha\beta} &= -C_{\alpha\delta\gamma} C_{\delta\beta\epsilon} (A_{\gamma\lambda} A_{\epsilon\rho} - A_{\gamma\rho} A_{\epsilon\lambda}) = \\ &= -(C_{\alpha\beta\gamma} C_{\delta\beta\epsilon} + C_{\alpha\delta\epsilon} C_{\delta\beta\gamma}) A_{\gamma\lambda} A_{\epsilon\rho} = +C_{\alpha\delta\beta} C_{\delta\epsilon\gamma} A_{\gamma\lambda} A_{\epsilon\rho} = C_{\alpha\delta\beta} F_{\delta\rho\lambda}. \end{aligned}$$

Интегралы имеют вид

$$\begin{aligned} \int d^4 q q^\mu q^\nu f(q^2) &= \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \int d^4 q q^2 f(q^2), \\ \int d^4 q q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma f(q^2) &= \frac{1}{24} [\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}] \int d^4 q (q^2)^2 f(q^2). \end{aligned}$$

Для $\xi = 1$ находим:

$$\begin{aligned} \int d^4 q \operatorname{tr}\{[\mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \mathcal{M}_2^A(q)]^2\} &= 4\mathcal{I} \operatorname{tr}[\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta] + \\ &\quad + 4\mathcal{I} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}, \\ \int d^4 q \operatorname{tr}\{[\mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \mathcal{M}_1^A(q)]^2 \mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \mathcal{M}_2^A(q)\} &= 4\mathcal{I} \operatorname{tr}[\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta], \\ \int d^4 q \operatorname{tr}\{[\mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \mathcal{M}_1^A(q)]^4\} &= \frac{8}{3} \mathcal{I} \operatorname{tr}[2\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta + \mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\eta], \end{aligned}$$

где $\mathcal{I}$ — расходящийся интеграл,

$$\mathcal{I} \equiv \int d^4 q [q^2 - i\epsilon]^2, \quad (17.5.24)$$

важность которого будет обсуждаться ниже. Подставляя полученные выражения в (17.5.20), имеем

$$\begin{aligned} \int d^4 q [\operatorname{tr} \ln \mathcal{M}^A(q)]_{A^4} &= \frac{2}{3} \mathcal{I} \operatorname{tr}[2\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\eta] - \\ &\quad - 2\mathcal{I} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Фактически оба члена имеют одинаковый вид и совместно дают

$$\int d^4 q [\operatorname{tr} \ln \mathcal{M}^A(q)]_{A^4} = -\frac{5}{3} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}. \quad (17.5.25)$$

Переходя к петле из духов, согласно (17.5.17) получаем

$$[\mathcal{M}_1^\omega(q)]_{\alpha\beta} = -2[\mathcal{A}^\lambda]_{\alpha\beta} q_\lambda, \quad (17.5.26)$$

$$[\mathcal{M}_2^\omega(q)]_{\alpha\beta} = [\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda]_{\alpha\beta}. \quad (17.5.27)$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \int d^4 q \operatorname{tr}\{[\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_2^\omega(q)]^2\} &= \mathcal{I} \operatorname{tr}[\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta], \\ \int d^4 q \operatorname{tr}\{[\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_1^\omega(q)]^2 \mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_2^\omega(q)\} &= \mathcal{I} \operatorname{tr}[\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta], \\ \int d^4 q \operatorname{tr}\{[\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_1^\omega(q)]^4\} &= \frac{2}{3} \mathcal{I} \operatorname{tr}[2\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta + \mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\eta]. \end{aligned}$$

Следовательно, для петли из духов интеграл от величины (17.5.20) равен

$$\begin{aligned} \int d^4 q [\operatorname{tr} \ln \mathcal{M}^\omega(q)]_{A^4} &= \frac{1}{6} \mathcal{I} \operatorname{tr}[\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\eta] = \\ &= \frac{1}{12} \mathcal{I} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (17.5.28)$$

Наконец, вершины в петле из полей материи равны

$$[\mathcal{M}_1^\psi(q)]_{kl} = -i(t_\alpha A_\alpha)_{kl}, \quad [\mathcal{M}_2^\psi(q)]_{kl} = 0,$$

и в (17.5.20) имеется лишь одно слагаемое

$$\int d^4 q [\text{tr} \ln \mathcal{M}^\psi(q)]_{A^4} = -\frac{1}{4} \int d^4 q \text{tr} \{[(i\not{q} + m)^{-1} t_\alpha A_\alpha]^4\}.$$

Нас интересует ультрафиолетово расходящаяся часть этого интеграла, поэтому мы можем пренебречь массой (которая мала по сравнению с большим импульсом q_μ) и записать

$$\begin{aligned} \int d^4 q [\text{tr} \ln \mathcal{M}^\psi(q)]_{A^4} &= \\ &= -\frac{1}{4} \text{tr}\{t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta\} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_{\gamma\rho} A_{\delta\sigma} \int d^4 q \frac{\text{tr}\{\not{q}^\mu \not{q}^\nu \not{q}^\rho \not{q}^\sigma\}}{(q^2 - i\epsilon)^4} = \\ &= -\frac{\mathcal{I}}{96} \text{tr}\{t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta\} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_{\gamma\rho} A_{\delta\sigma} \times \\ &\quad \times \text{tr}\{2\gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma_\eta \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma + \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma_\eta \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma\}, \end{aligned} \quad (17.5.29)$$

где $\mathcal{I}$ — тот же расходящийся интеграл, что и в (17.5.24). Чтобы вычислить следы дираковских матриц, воспользуемся их антикоммутационными соотношениями и запишем

$$\begin{aligned} \text{tr}\{2\gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma_\eta \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma + \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma_\eta \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma\} &= \\ &= 8 \text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} - 4 \text{tr}\{\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} - 4 \text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma\} = \\ &= -64\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + 32\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + 32\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}. \end{aligned}$$

Тогда (17.5.29) переходит в

$$\begin{aligned} \int d^4 q [\text{tr} \ln \mathcal{M}^\psi(q)]_{A^4} &= \frac{1}{3} \mathcal{I} \text{tr}\{[t_\alpha, t_\beta][t_\gamma, t_\delta]\} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_\gamma^\mu A_\delta^\nu = \\ &= -\frac{1}{3} \mathcal{I} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu} \text{tr}\{t_\gamma, t_\delta\}. \end{aligned} \quad (17.5.30)$$

Наконец, подставляя формулы (17.5.25), (17.5.28) и (17.5.30) в (17.5.18), получаем

$$\Gamma_{A^4}^{(1 \text{ loop})} = \frac{-i\mathcal{I}}{(2\pi)^4} \int d^4 x F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu} \left[\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{12} \right) C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} - \frac{1}{3} \text{tr}\{t_\gamma t_\delta\} \right], \quad (17.5.31)$$

где мы представили дельта-функцию в импульсном пространстве из (17.5.14) в виде интеграла

$$\delta^4(p - p) = (2\pi)^{-4} \int d^4 x 1. \quad (17.5.32)$$

Существенно, что результат зависит от $A_{\alpha\mu}$ только через напряженность поля (17.5.11), как того требует фоновая калибровочная инвариантность.

Теперь (впервые в этом параграфе) воспользуемся предполагаемой простотой калибровочной группы и неприводимостью мультиплета полей материи. В этом случае

$$C_{\gamma\alpha\beta}C_{\delta\alpha\beta} = g^2 C_1 \delta_{\gamma\delta}, \quad (17.5.33)$$

$$\text{tr}\{t_\gamma t_\delta\} = g^2 C_2 \delta_{\gamma\delta}, \quad (17.5.34)$$

где g — обычная калибровочная константа взаимодействия, мультипликативно входящая в $C_{\alpha\beta\gamma}$ и t_γ , а C_1 и C_2 — числовые константы, характеризующие калибровочную группу и ее представление, даваемое мультиплетом полей материи. Например, в оригинальном варианте теории Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ (или, эквивалентно, $SO(3)$) структурные константы равны

$$C_{\gamma\alpha\beta} = g\epsilon_{\alpha\beta\gamma},$$

где α, β, γ принимают значения 1, 2, 3. Сравнивая с выражением (17.5.33), видим, что

$$C_1 = 2.$$

Кроме того, в этой теории поля материи образуют дублет и $t_\alpha = (g/2)\sigma_\alpha$ (здесь σ_α — обычные матрицы Паули), откуда

$$C_2 = 1/2.$$

С несколько большей общностью, в случае группы $SU(N)$ с n_f фермионами в определяющем представлении и стандартным выбором нормировки генераторов будем иметь ²⁾

$$C_1 = N, \quad C_2 = n_f/2. \quad (17.5.35)$$

Возвращаясь к общему случаю, из (17.5.33) и (17.5.34) получаем

$$\Gamma_{A^4}^{(1 \text{ loop})} = \frac{-ig^2 \mathcal{J}}{(2\pi)^4} \int d^4x F_{\gamma\mu\nu} F_\gamma^{\mu\nu} \left[\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right]. \quad (17.5.36)$$

Следовательно, бесконечная постоянная L_A в (17.4.30) равна

$$L_A = \frac{4ig^2 \mathcal{J}}{(2\pi)^4} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right). \quad (17.5.37)$$

Нужно еще сказать несколько слов об интерпретации расходящегося интеграла $\mathcal{J}$. Прежде чем проводить интегрирование по 3-импульсу $\mathbf{q}$, мы можем повернуть контур интегрирования по q^0 в (17.5.24) до совмещения с мнимой осью; как обычно, слагаемое $-i\epsilon$ в знаменателе означает, что поворот должен осуществляться против часовой стрелки, так что $q^0 = iq^4$, где q^4 изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Интеграл при

²⁾ Для группы $SU(3)$ полагаем t_α равными $(g/2)\lambda_\alpha$, где λ_α — определенные в § 19.7 матрицы Гелл-Манна; при этом $C_{\alpha\beta\gamma} = (g/2)f_{\alpha\beta\gamma}$.

этом принимает вид

$$\mathcal{J} = i \int_0^\infty \frac{2\pi^2 q^3 dq}{q^4}, \quad (17.5.38)$$

где q — модуль евклидова 4-вектора (q^1, q^2, q^3, q^4) . Чтобы двигаться дальше, нам необходим некоторый метод регуляризации интеграла. Проще всего избавиться от ультрафиолетовых расхождений, обрезав интеграл по q на масштабах порядка Λ . Однако нам необходимо также ввести и нижний предел интегрирования по импульсу, чтобы устранить инфракрасные расхождимости. Последний определяется физикой процесса. Если импульс четырехвекторных частиц μ не равен нулю, то он проходит по внутренним линиям диаграмм, обеспечивая инфракрасное обрезание на масштабах порядка μ . Аналогично, если мы вычислим четвертую вариационную производную $\Gamma[A]$ по A не при $A = 0$, а при некотором конечном значении A , то соответствующие внутренним линиям пропагаторы не будут обращаться в бесконечность при нулевом импульсе и мы получим инфракрасное обрезание на масштабах порядка $\mu \sim gA$. В любом случае для $\mathcal{J}$ имеем

$$\mathcal{J} = 2\pi^2 i \int_\mu^\Lambda \frac{dq}{q} = 2\pi^2 i \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right), \quad (17.5.39)$$

и потому

$$L_A = -\frac{g^2}{2\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + O(g^4). \quad (17.5.40)$$

Из (17.4.48) для перенормированной константы взаимодействия получим

$$g_R = g \left[1 + \frac{g^2}{4\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^4) \right]. \quad (17.5.41)$$

Заметим, что в отличие от квантовой электродинамики, где радиационные поправки уменьшают значение физической константы взаимодействия g_R по сравнению с ее голым значением g (см. § 11.2), в неабелевых калибровочных теориях они *увеличивают* величину физической константы взаимодействия по сравнению с ее голым значением, если фермионный мультиплет достаточно мал: $C_2 < 11C_1/4$. Это важное утверждение будет использовано в гл. 18.

Для анализа ультрафиолетовых расхождений можно воспользоваться альтернативным подходом, основанным на обсуждавшемся в § 11.2 методе размерной регуляризации. При этом вместо (17.5.39) получим

$$\mathcal{J} = i \int_0^\infty \frac{2\pi^2 q^{d-1} dq}{(q^2 + \mu^2)^2}, \quad (17.5.42)$$

где d — комплексная размерность, которую мы устремим к 4 в конце вычислений, а μ — импульс инфракрасного обрезания, который мы

снова полагаем по порядку величины равным внешним импульсам (или произведению g на внешние поля). Для комплексных d с $\text{Re } d < 0$ и $\mu^2 > 0$ интеграл имеет конечное значение

$$\mathcal{J} = -i\pi^2 \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \mu^{d-4} \pi / \sin \left[\left(\frac{d}{2} - 2 \right) \pi \right].$$

Аналитически продолжая до $d \rightarrow 4$, имеем

$$\mathcal{J} \rightarrow -2i\pi^2 \left[\frac{1}{d-4} + \ln \mu + \dots \right], \quad (17.5.43)$$

где многоточием обозначены конечные не зависящие от μ члены. Следовательно,

$$L_A = \frac{g^2}{2\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) \left(\frac{1}{d-4} + \ln \mu + \dots \right) + O(g^4)$$

и

$$g_R = g \left[1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) \left(\frac{1}{d-4} + \ln \mu + \dots \right) + O(g^4) \right]. \quad (17.5.44)$$

Заметим, что ультрафиолетовые расходимости приняли иной вид, но зависимость от параметра инфракрасного обрезания μ осталась прежней. Выражение (17.5.44) послужит важной отправной точкой для обсуждения асимптотической свободы в § 18.7.

Задачи

1. Проведите доказательство перенормируемости из § 17.2, включив в лагранжиан элементарные скалярные поля.
2. Проведите квантование неабелевой калибровочной теории в калибровке фонового поля, используя обсуждавшийся в конце § 17.2 метод квантования БРСТ.
3. Выведите соотношение (17.5.4) между перенормированной и неперенормированной константами взаимодействия, вычислив квадратичные по переменному в пространстве-времени калибровочному полю слагаемые в $\Gamma^{(1 \text{ loop})}$.
4. Получите однопетлевое соотношение между перенормированной и неперенормированной константами взаимодействия в калибровочной теории, содержащей элементарные скалярные поля.

Литература

1. Zinn-Justin J. // Trends in Elementary Particle Theory — International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974 (Springer-Verlag, Berlin, 1975).
2. До открытия симметрии БРСТ доказательства перенормируемости неабелевых калибровочных теорий основывались непосредственно

- на тождествах Славнова–Тейлора для калибровочных преобразований; см.: *Lee B.W., Zinn-Justin J.* // *Phys. Rev.* **D5**, 3121, 3137 (1972); *Phys. Rev.* **D7**, 1049 (1972); *'t Hooft G., Weltman M.* // *Nucl. Phys.* **B50**, 318 (1972); *Lee B.W.* // *Phys. Rev.* **D9**, 933 (1974). Первое доказательство перенормируемости, основанное на БРСТ-симметрии, см. в работе *Becchi C., Rouet A., Stora R.* // *Commun. Math. Phys.* **42**, 127 (1975), а также в *Renormalization Theory — Proceedings of the International School of Mathematical Physics at Erice, August 1975*, eds. G. Velo, A.S. Wightman (D. Reidel, Dordrecht, 1976). С. 269–297, 299–343. Наше доказательство в основном следует работам *Zinn-Justin J.*, ссылка 1; *Lee B.W.* // *Methods in Field Theory*, eds. R. Balian, J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1976). С. 79–139.
3. Мы придерживаемся точки зрения, изложенной в работе *Gomis J., Weinberg S.* // *Nucl. Phys.* B469, 475 (1996). Более ранние приложения описанных методов см. в работах: *Voronov B.L., Tyutin I.V.* // *Theor. Math. Phys.* **50**, 218 (1982); **52**, 628 (1982); *Voronov B.L., Lavrov P.L., Tyutin I.V.* // *Sov. J. Nucl. Phys.* **36**, 292 (1982); *Lavrov P.M., Tyutin I.V.* // *Sov. J. Nucl. Phys.* **41**, 1049 (1985); *Anselmi D.* // *Class. and Quant. Grav.* **11**, 2181 (1994); **12**, 319 (1995); *Harada M., Hugo T., Yamawaki K.* // *Progr. Theor. Phys.* **91**, 801 (1994).
 4. *Barnich G., Henneaux M.* // *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1588 (1994); *Barnich G., Brandt F., Henneaux M.* // *Phys. Rev.* **51**, R143 (1995); *Commun. Math. Phys.* **174**, 57, 93, (1995); *Nucl. Phys.* **B455**, 357 (1995).
 5. Калибровка фонового поля была введена в работе *De Witt B.S.* // *Phys. Rev.* **162**, 1195, 1239 (1967). Рассмотрение многопетлевых эффектов см.: *'t Hooft G.* // *Functional and Probabilistic Methods in Quantum Field Theory: Proceedings of the 12th Karpacz Winter School of Theoretical Physics (Acta Universitatis Wratislavenensis № 38, 1975)*; *De Witt B.S.* // *Quantum Gravity II*, eds. C. Isham, R. Penrose, D. Sciama (Oxford University Press, Oxford, 1982); *Abbott L.F.* // *Nucl. Phys.* **B185**, 189 (1981).

МЕТОД РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ

Метод ренормализационной группы был первоначально предложен Гелл-Манном и Лоу [1] как способ преодоления трудностей, связанных с неприменимостью теории возмущений в квантовой электродинамике при очень больших энергиях. Поскольку n -петлевой вклад в амплитуду процесса с характерным импульсом q (например, в поляризацию вакуума $\Pi_{\mu\nu}(q)$) может содержать помимо α^n еще до n множителей вида

$$\ln(q^2/m_e^2),$$

теория возмущений оказывается несостоятельной при больших значениях

$$\alpha \ln(q^2/m_e^2),$$

несмотря на малость постоянной тонкой структуры α . Даже в безмассовой теории типа теории неабелевого калибровочного поля мы должны ввести некоторый массовый масштаб μ , чтобы определить точку, в которой задаются значения перенормированных констант взаимодействия; в этом случае возникают логарифмы вида $\ln(E/\mu)$, и условие применимости теории возмущений нарушается при $E \gg \mu$ и при $E \ll \mu$ даже для малой по величине константы взаимодействия.

К счастью, существует модифицированный вариант теории возмущений, использование которого в подобных случаях часто все же оказывается возможным. Его ключевая идея состоит во введении констант взаимодействия g_μ , определенных на плавающем перенормировочном масштабе μ , не связанном каким-либо образом с массами частиц. Полагая μ по порядку величины равным характерной энергии процесса E , мы можем сделать вклад логарифмов вида $\ln(E/\mu)$ небольшим; применение теории возмущений будет оправдано, пока величина g_μ будет оставаться малой. В частности, зная константы взаимодействия, определенные на масштабе μ , мы можем при помощи теории возмущений вычислить амплитуды физических процессов для масштаба $\mu + d\mu$ и с их помощью найти соответствующую перенормировочному масштабу $\mu + d\mu$ константу взаимодействия. Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, можно найти связь между значением константы связи на интересующем нас масштабе и константой связи, определенной обычным образом. Возникновение термина “ренормализационная группа” (часто для краткости просто “ренормгруппа”) связано с тем, что в рамках описанного подхода мы интересуемся уравнениями, описывающими эволюцию теории при

изменении перенормированных констант связи; прямого отношения к теории групп этот метод не имеет. Метод ренормгруппы часто позволяет сделать качественные выводы об асимптотическом поведении теории при очень больших или (в безмассовом случае) очень малых энергиях, даже когда значения констант взаимодействия на интересующих нас масштабах становятся слишком большими для того, чтобы применение теории возмущений было оправдано.

Хотя метод ренормгруппы исходно возник в связи с изменениями правил определения перенормированных констант связи, впоследствии он приобрел более широкий смысл. При замене голых констант взаимодействия и полей их перенормированными значениями, определенными через матричные элементы для процессов с характерной энергией μ , интегралы по виртуальным импульсам эффективно оказываются обрезанными на масштабах порядка μ . Следовательно, изменение μ соответствует изменению набора степеней свободы, которые мы принимаем в расчет при вычислениях. В рамках метода ренормгруппы для исключения больших логарифмов следует положить μ по порядку величины равным характерной энергии E рассматриваемого процесса. Такая схема представляет собой частный случай общего принципа, согласно которому для вычислений на некотором масштабе энергий необходимо сначала избавиться от степеней свободы, соответствующих много большим энергиям.

Существуют и другие способы достижения цели. Как упоминалось в § 12.4, предложенный Вильсоном [2] подход к методу ренормгруппы предполагает введение явного *конечного* обрезания по импульсу в сочетании с модификацией параметров теории, необходимой для независимости наблюдаемых физических величин от величины импульса обрезания. В рамках такого метода необходимо введение бесконечного числа типов взаимодействий (всех типов, совместимых с симметриями теории), что делает его не очень удобным при работе с перенормируемыми теориями типа квантовой электродинамики. (Хотя, как было отмечено в § 12.3, сегодня квантовая электродинамика считается лишь очень хорошим приближением к перенормируемой теории, в которой взаимодействия высших размерностей подавлены отрицательными степенями некоторой очень большой массы.) В случае, когда обрезание достигается за счет проведения квантования калибровочной теории на конечной пространственно-временной решетке, подход Вильсона обладает тем преимуществом, что все вычисления могут быть проведены с явным сохранением калибровочной инвариантности (объем калибровочной группы равен произведению объема группы глобальной симметрии на число узлов решетки), но при этом нет явного сохранения лоренц-инвариантности и инвариантности относительно вращений. Как бы то ни было, сам по себе метод ренормгруппы остается неизменным вне зависимости от подхода, используемого для исключения высокоэнергетичных степеней свободы.

§ 18.1. Как возникают большие логарифмы?

Выясним сначала, каков механизм возникновения больших логарифмов при вычислениях на больших энергиях. Рассмотрим физическую амплитуду, сечение рассеяния или распада либо другую аналогичную величину $\Gamma(E, x, g, m)$, зависящую от общего масштаба энергий E , совокупности углов и отношений энергий, обозначаемых как x , совокупности безразмерных констант связи, обозначаемых как g и совокупности масс, обозначаемых как m . Если Γ имеет размерность [масса] ^{D} (например, для сечения рассеяния $D = -2$), то из простого размерного анализа следует, что

$$\Gamma(E, x, g, m) = E^D \Gamma(1, x, g, m/E). \quad (18.1.1)$$

Естественно предположить, что при $E \rightarrow \infty$ такая амплитуда будет иметь степенное поведение:

$$\Gamma(E, x, g, m) \rightarrow E^D \Gamma(1, x, g, 0).$$

Однако на практике дело обстоит иначе. При вычислениях по теории возмущений помимо множителя E^D возникают также различные степени $\ln(E/m)$, разрушающие простое степенное поведение.

Очевидно, что степени $\ln(E/m)$ могут возникнуть при $E \rightarrow \infty$ и фиксированном m только в случае, когда амплитуда Γ сингулярна при фиксированном значении энергии E и $m \rightarrow 0$. Существует два типа подобных особенностей. В одном случае трудности можно преодолеть, правильно определив вычисляемую амплитуду или сечение; в другом необходимо внести изменения в нашу схему перенормировок.

Сингулярности первого типа связаны с попаданием полюсов пропагаторов на массовые оболочки соответствующих частиц. Пусть, например, на фейнмановской диаграмме имеется внешняя линия, несущая полный 4-импульс p^μ , подсоединенная к вершине, из которой выходят внутренние линии с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$. Согласно результатам гл. 10, в этом случае рассматриваемая амплитуда имеет разрез на плоскости переменной p^2 вдоль отрицательной действительной полуоси, начинающийся в точке $p^2 = -(m_1 + \dots + m_n)^2$ и простирающийся до $-\infty$. Если внешняя линия соответствует стабильной частице с массой $M < m_1 + \dots + m_n$, то сингулярности не возникают поскольку в этом случае точка $p^2 = -M^2$ не попадает на разрез. Однако при стремлении масс $M, m_1, \dots, m_n$ к нулю и значение $-p^2$ на массовой оболочке, и лежащая на конце разреза точка ветвления одновременно стремятся к $p^2 = 0$, что приводит к возникновению сингулярности.

Из сказанного выше следует, что мы можем избежать появления инфракрасных расходимостей при $m = 0$, если не будем рассматривать лежащие на массовой оболочке импульсы. Например, можно устремить значения p^2 на внешних линиях к $+\infty$ одновременно с общим масштабом энергии, а затем применить дисперсионные

соотношения (или какую-либо другую технику аналитического продолжения), чтобы воспользоваться результатами для поведения фейнмановских амплитуд в этом пределе для получения информации об интересующих нас элементах S -матрицы. Часто процедура аналитического продолжения оказывается ненужной, поскольку нам требуются не значения элементов S -матрицы в лежащих на массовых оболочках точках, а матричные элементы для токов, несущих никак не связанные с какими-либо массами импульсы q . Например, введенная в § 10.5 амплитуда поляризации вакуума $\pi(q^2)$ свободна от инфракрасных сингулярностей первого типа, если $q^2 \geq 0$.

Другой способ исключения расходимостей первого типа связан с тем, что инфракрасные расходимости обычно появляются в ситуации, когда вычисляемое сечение становится неизмеримым в пределе $m \rightarrow 0$. Например, в квантовой электродинамике сечение любого процесса с участием определенного числа электронов и фотонов становится расходящимся в пределе $m_e \rightarrow 0$. Расходимость сохраняется и после суммирования по всем числам мягких фотонов в конечном состоянии, поскольку в пределе $m_e \rightarrow 0$ нет возможности отличить электрон от струи с полным зарядом $-e$, состоящий из движущихся в одном направлении с одинаковой скоростью электронов, позитронов и фотонов. Как было показано в гл. 13, такие инфракрасные расходимости взаимно уничтожаются, если рассматривать соответствующим образом проинтегрированные сечения, которые *остаются измеримыми* в пределе нулевой массы электрона. Например, вместо вычисления сечения определенного процесса комптоновского рассеяния следует вычислять сечение процесса рассеяния одной струи (с полным зарядом $-e$) на другой (с нулевым полным зарядом), в конечном состоянии которой имеются две аналогичные струи и некоторое число мягких фотонов. Подобные сечения, остающиеся конечными в пределе нулевых масс, называются “инфракрасно безопасными”.

Однако мы еще не решили всех проблем. Даже после того как мы избавились от инфракрасных расходимостей за счет рассмотрения подходящим образом проинтегрированных сечений или не лежащих на массовой оболочке амплитуд, в полученных выражениях остаются сингулярности второго типа, связанные с множителями вида $\ln(E/m)$, где E — характерный масштаб энергии процесса. Такие особенности делают некорректным наше первоначальное предположение о степенном поведении амплитуды, основанное на размерных соображениях. Причину их возникновения можно найти в том, что перенормированные константы взаимодействия обычно определяются через амплитуды, которые становятся инфракрасно расходящимися в пределе нулевых масс. Рассмотрим, в частности, теорию действительного скалярного поля с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{24} g \phi^4. \quad (18.1.2)$$

В однопетлевом приближении инвариантная амплитуда упругого рассеяния для процесса, в начальном состоянии которого имеются частицы с импульсами p_1 и p_2 , а в конечном — частицы с импульсами p'_1 и p'_2 , дается формулой (12.2.24) и равна

$$A = g - \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)} \right) - 3 \right\} + O(g^3), \quad (18.1.3)$$

где s , t и u — переменные Мандельштама

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_1 - p'_1)^2, \quad u = -(p_1 - p'_2)^2,$$

а Λ — параметр ультрафиолетового обрезания. Она не содержит особенностей в пределе нулевой массы, если s , t и u не попадают на положительную действительную полуось (например, если все эти величины стремятся к $-\infty$). Последнее условие нарушает верное на массовой оболочке соотношение $s + t + u = 4m^2$. Разумеется, амплитуда зависит не только от m , но и от Λ , так что, несмотря на отсутствие инфракрасных расходимостей, мы не получаем ожидаемого на основании наивных размерных соображений поведения $A \rightarrow \text{const}$ при стремлении s , t и u к $-\infty$. Зависимость от параметра обрезания можно исключить за счет перенормировки: заменим голую константу взаимодействия g на перенормированную g_R , определенную как значение A в некоторой удобной для нас точке. Например, можно положить

$$g_R \equiv A(s = t = u = 0) = g - \frac{3g^2}{32\pi^2} \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right\} + O(g^3). \quad (18.1.4)$$

В этом случае (18.1.3) переходит в

$$A = g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(1 - \frac{sx(1-x)}{m^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{tx(1-x)}{m^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{ux(1-x)}{m^2} \right) \right\} + O(g_R^3). \quad (18.1.5)$$

(Во втором слагаемом мы можем свободно заменять g^2 на g_R^2 , поскольку эти величины различаются лишь на величину порядка g^3 .) Ультрафиолетовые расходимости исчезли, однако осталась особенность при $m = 0$, сохраняющаяся даже в случае отрицательных s , t , u . В пределе s , t , $u \rightarrow -\infty$ получаем асимптотическое поведение:

$$A \rightarrow g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{-s}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{-t}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{-u}{m^2} \right) - 6 \right\}, \quad (18.1.6)$$

по-прежнему противоречащее наивным скейлинговым предсказаниям. (Существенных изменений не происходит и при любом другом “естественном” выборе точки перенормировки. Например, если опре-

делить g_R как значение A в симметричной точке массовой оболочки $s = t = u = 4m^2/3$, то мы получим асимптотическое поведение (18.1.6) с точностью до замены постоянной -6 на некоторое другое число.) Ясно, что соответствующая нулевому значению массы сингулярность в величине A , представленной в виде функции g_R , возникает исключительно из-за слагаемого $\ln m^2$ в формуле (18.1.4), выражающей перенормированную константу взаимодействия g_R через голую константу связи g .

В пределе нулевой массы имеются также другие типы сингулярностей, возникающие при вычислении матричных элементов операторов (таких, как не лежащие на массовой оболочке фейнмановские амплитуды), а не интегралов от сечений. Последние связаны с тем, что такие операторы должны быть перенормированы аналогично константам связи. Пусть, например, мы хотим вычислить в скалярной теории поля с лагранжианом (18.1.2) некоторый матричный элемент $\langle \beta | \mathcal{O}(p) | \alpha \rangle$ оператора

$$\mathcal{O}(p) \equiv \int d^4x e^{-ip \cdot x} \phi^2(x). \quad (18.1.7)$$

В терминах фейнмановских диаграмм ему соответствует вставка вершины, в которой сходятся две внутренние линии поля ϕ и через которую в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ протекает полный 4-импульс p (см. рис. 18.1).

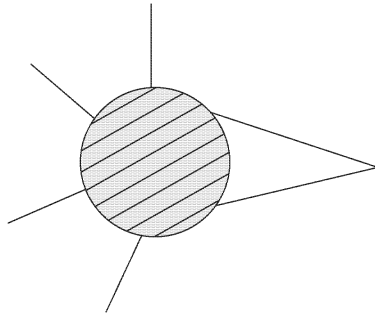


Рис. 18.1. Фейнмановские диаграммы в импульсном представлении для матричного элемента оператора $\int d^4x \exp(-ip \cdot x) \phi^2(x)$ в теории элементарного скалярного поля $\phi(x)$. Заштрихованный круг представляет собой сумму всех диаграмм с изображенным на рисунке набором внешних линий, которые (за исключением двух линий, выходящих из ϕ^2 -вершины) соответствуют частицам в начальном и конечном состояниях процесса $\alpha \rightarrow \beta$

Диаграммы, на которых вершина такого типа является частью поддиаграммы, соединенной с остальной диаграммой лишь двумя ϕ -линиями, содержат ультрафиолетовые расходимости (см. рис. 18.2). Из анализа размерностей следует, что поддиаграмма, соединенная с остальной частью диаграммы более чем двумя линиями поля ϕ , должна быть сходящейся. Действительно, взаимодействие ϕ^2 имеет

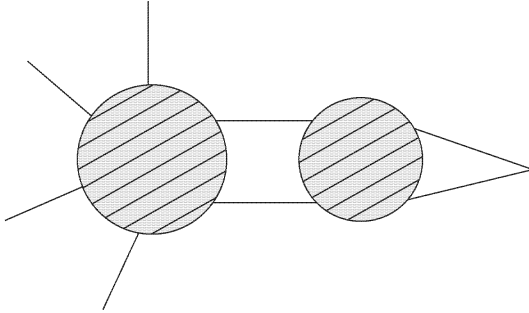


Рис. 18.2. Класс ультрафиолетово расходящихся диаграмм для матричного элемента оператора $\int d^4x \exp(-ip \cdot x) \phi^2(x)$. Обозначения те же, что и на рис. 18.2

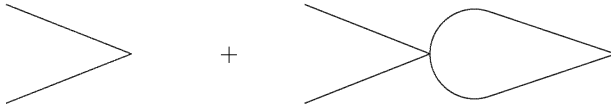


Рис. 18.3. Расходящаяся часть диаграммы рис. 18.2 в однопетлевом приближении

размерность $+2$, так что размерность поддиаграммы с $n > 2$ внешними линиями равна $4 - 2 - n < 0$. Расходящаяся часть такой поддиаграммы представляет собой лишь логарифмически расходящуюся постоянную, поэтому матричный элемент оператора ϕ^2 можно сделать конечным¹⁾ за счет умножения ϕ^2 на соответствующую бесконечную константу Z_{ϕ^2} . Поддиаграммы, существенные в порядке g^2 , приведены на рис. 18.3. Их (расходящийся) вклад в матричный элемент оператора ϕ^2 — множитель

$$F(p) = 1 + \frac{1}{2} [-i(2\pi)^4 g]^2 \int \frac{d^4k}{[k^2 + m^2 - i\epsilon][(p-k)^2 + m^2 - i\epsilon]}. \quad (18.1.8)$$

После преобразования знаменателя, поворота контура интегрирования по переменной k^0 и введения ультрафиолетового обрезания Λ получаем в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$

$$F(p) = 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + p^2 x(1-x)} \right) - 1 \right] + O(g^2). \quad (18.1.9)$$

Это выражение не имеет сингулярности при нулевой величине массы (для положительных значений p^2), но оно содержит явную зависимость от параметра обрезания. Логарифмическая расходимость

¹⁾ Мы предполагаем, что расходимости, связанные с содержащими ϕ^2 -вершину “подподдиаграммами” с ровно двумя внешними линиями, исключены аналогичным образом.

может быть устранена за счет введения перенормированного ϕ^2 -оператора

$$(\phi^2)_R = N^{(\phi^2)} \phi^2, \quad (18.1.10)$$

где постоянная $N^{(\phi^2)}$ выбирается так, чтобы величина $N^{(\phi^2)} F(p)$ принимала определенное конечное значение в некоторой наперед заданной точке перенормировки. Например, перенормированный оператор можно определить в соответствии с условием

$$N^{(\phi^2)} F(0) = 1. \quad (18.1.11)$$

В этом случае

$$N^{(\phi^2)} = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right) + O(g^2). \quad (18.1.12)$$

Матричные элементы перенормированного оператора $(\phi^2)_R$ будут при этом включать множитель

$$F_R(p) \equiv N^{\phi^2} F(p) = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(1 + \frac{p^2 x(1-x)}{m^2} \right) + O(g^2). \quad (18.1.13)$$

Он конечен при $p^2 > 0$ и $m^2 > 0$, но содержит инфракрасную расходимость при $m \rightarrow 0$, соответствующую большому логарифму в асимптотике $p^2 \rightarrow +\infty$. Разумеется, при вычислениях в высших порядках теории возмущений для исключения зависимости от параметра обрезания Λ мы должны будем ввести не только перенормированный оператор, но и перенормированную константу взаимодействия. Обе эти перенормировки приведут к появлению логарифмов.

Аналогичные перенормировочные множители необходимы для регуляризации любого оператора (случай оператора ϕ^2 типичен). В частности, матричный элемент оператора, соответствующего элементарному полю теории ψ , содержит ультрафиолетовые расходимости, обусловленные радиационными поправками к пропагатору этого поля. Как было показано в гл. 12, такие расходимости могут быть устранены посредством введения перенормированного поля ψ_R :

$$\psi_R = N^{(\psi)} \psi, \quad (18.1.14)$$

где $N^{(\psi)}$ выбирается так, чтобы матричный элемент поля ψ_R для перехода между вакуумом и одночастичным состоянием был таким же, как и в случае стандартно нормированного поля в отсутствие взаимодействия. Связь этой постоянной с обычным Z -множителем теории перенормировок дается формулой

$$Z^{(\psi)} = |N^{(\psi)}|^{-2}. \quad (18.1.15)$$

Вспомним, например, полученные нами ранее результаты для перенормировки фотонного поля в спинорной квантовой электродина-

мике²⁾. В этом случае перенормированное электромагнитное поле A_R^μ обычно выражают через “голое” поле A_B^μ по формуле

$$A_R^\mu = Z_3^{-1/2} A_B^\mu,$$

где константа Z_3 дается выражением (11.2.21):

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + O(e^4). \quad (18.1.16)$$

Последнее выражение содержит сингулярность в пределе нулевой массы, которая повлияет на асимптотическое поведение матричных элементов перенормированного фотонного поля. В частности, собственная энергия перенормированного электромагнитного поля описывается функцией (см. (11.2.22))

$$\pi(q^2) = \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left[1 + \frac{q^2 x(1-x)}{m^2}\right] + O(e_R^4). \quad (18.1.17)$$

Она сингулярна при $m = 0$, и потому ее асимптотика при $q^2 \rightarrow +\infty$ содержит большие логарифмы:

$$\pi(q^2) \rightarrow \frac{e_R^2}{2\pi^2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{q^2}{m^2} - \frac{5}{18} \right] + O(e_R^4). \quad (18.1.18)$$

Электродинамика обладает той особенностью, что константа Z_3 , возникающая при перенормировке электромагнитного поля, определяет также и перенормировку электрического заряда:

$$e_R = Z_3^{1/2} e_{\text{затрав}}, \quad (18.1.19)$$

но в общем случае это не так. Хотя метод ренормгруппы впервые был применен именно к квантовой электродинамике, рассмотренный нами случай теории скалярного поля более типичен, поскольку он включает различные перенормировочные множители для полей и взаимодействий.

§ 18.2. Плавающий масштаб

В предыдущем параграфе мы видели, что возникновение в области высоких энергий больших логарифмов при вычислениях нужным образом проинтегрированных сечений и не лежащих на массовых

²⁾ В теории скалярного поля со взаимодействием ϕ^4 , использованной в приведенном выше примере, величина $N^{(\phi)}$ в главном порядке определяется двухпетлевой диаграммой, так что эта теория не очень удобна для иллюстрации вычисления множителей N .

оболочках фейнмановских амплитуд обусловлено используемой схемой определения перенормированных констант связи и операторов. Центральная идея метода ренормгруппы состоит в замене схемы перенормировок.

Предположим, что нам удалось определить новую перенормированную константу взаимодействия $g(\mu)$, зависящую лишь от плавающего масштаба μ , а не от характерного масштаба масс m теории (по крайней мере, в пределе $\mu \gg m$). Тогда проинтегрированные сечения рассеяния или другие инфракрасно безопасные величины можно будет выразить через g_μ и μ , а не через g_R . Из размерных соображений следует, что подобные величины ведут себя следующим образом

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}\right). \quad (18.2.1)$$

(Мы пользуемся обозначениями, введенными в § 18.1. В частности, x содержит все безразмерные углы, отношения энергий и т. д., от которых может зависеть Γ .) Поскольку μ — совершенно произвольный перенормировочный масштаб, можно положить $\mu = E$. В этом случае соотношение (18.2.1) примет вид

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right). \quad (18.2.2)$$

Это выражение не содержит сингулярностей в пределе малой массы, так как g_R не зависит от m при $m \ll E$. Следовательно, большие логарифмы не возникают, и для вычисления Γ в терминах g_E можно пользоваться теорией возмущений (при условии, что константа взаимодействия g_E остается достаточно малой). В частности, в любом порядке теории возмущений в пределе $E \gg m$ асимптотическое поведение Γ дается выражением

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) \rightarrow E^D \Gamma(1, x, g_E, 0, 1). \quad (18.2.3)$$

(Непертурбативные поправки будут рассмотрены в § 18.4.)

Остается лишь найти g_E . Например, в теории скалярного поля с лагранжианом (18.1.2) можно определить g_μ как значение амплитуды рассеяния в точке перенормировки $s = t = u = -\mu^2$:

$$g_\mu \equiv A(s = t = u = -\mu^2) =$$

$$= g - \frac{3g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} \right) - 1 \right\} + O(g^3). \quad (18.2.4)$$

Перепишем последнее определение, используя выражение (18.1.4) для обычной перенормированной константы взаимодействия:

$$g_\mu = g_R + \frac{3g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2} \right) + O(g_R^3). \quad (18.2.5)$$

Однако эта формула применима лишь в случае, когда поправка мала по сравнению с самой величиной g_R , т. е. при $|g_R \ln(\mu/m)| \ll 1$. Если бы это неравенство было справедливо при $\mu \sim E$, мы не испытывали бы потребности в методах ренормгруппы; обычная техника теории возмущений была бы достаточной.

Вместо прямолинейного использования формул типа (18.2.5) в случае больших значений μ , нам следует двигаться поэтапно. Мы можем выразить g_μ через g_R при условии, что отношение μ/m не очень велико по сравнению с единицей; после этого можно будет выразить $g_{\mu'}$ через g_μ при условии, что отношение μ'/μ не очень велико по сравнению с единицей и т. д. вплоть до g_E . Удобно представить этот процесс не в виде последовательности дискретных шагов, а в виде некоторой непрерывной процедуры. Из размерного анализа следует, что соотношение между $g_{\mu'}$ и g_μ должно иметь вид

$$g_{\mu'} = G(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu). \quad (18.2.6)$$

Дифференцируя по μ' и полагая затем $\mu' = \mu$, получаем дифференциальное уравнение

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right), \quad (18.2.7)$$

где

$$\beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial z} G(g_\mu, z, m/\mu)\right]_{z=1}. \quad (18.2.8)$$

Это равенство свободно от сингулярностей, связанных с малостью масс и потому в пределе $\mu \gg t$ может быть представлено как

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta(g_\mu, 0) \equiv \beta(g_\mu). \quad (18.2.9)$$

Записанное в такой форме дифференциальное уравнение для константы взаимодействия обычно называется уравнением Каллана–Симанчика [1]¹⁾. Мы должны определить g_E посредством интегрирования дифференциального уравнения (18.2.9) с начальным условием $g_\mu = g_M$ на некотором масштабе $\mu = M$, который на практике обычно выбирается достаточно большим, чтобы пренебрежение массами m по сравнению с μ при $\mu \geq M$ было оправдано, но при этом достаточно малым для того, чтобы, несмотря на возникновение больших логарифмов $\ln(M/m)$, мы могли воспользоваться обычной теорией возмущений для вычисления g_M в терминах обычной перенормированной константы взаимодействия g_R . Формальное решение можно записать как

$$\ln(E/M) = \int_{g_M}^{g_E} dg / \beta(g) \quad (18.2.10)$$

¹⁾ Часто связывают это уравнение с именами Гелл-Манна и Лоу (см. [1]). (Примеч. ред.)

в предположении, что $\beta(g)$ не обращается в нуль на интервале между g_M и g_E .

Хотя результаты предыдущего параграфа не опираются на теорию возмущений, мы обычно вынуждены пользоваться ею для вычисления функций G и β . Пусть, например, нам требуется найти $g_{\mu'}$ в теории скалярного поля с плотностью гамильтониана взаимодействия $g\phi^4/24$, используя перенормированное значение константы связи g_{μ} вместо g_R . В результате вычислений, аналогичных проделанным при выводе (18.2.5), получаем

$$g_{\mu'} = g_{\mu} - \frac{3g_{\mu}^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{m^2 + \mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu'^2 x(1-x)} \right) + O(g_{\mu}^3).$$

С учетом равенства (18.2.8) имеем

$$\beta\left(g_{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) = + \frac{3g_{\mu}^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} + O(g_{\mu}^3). \quad (18.2.11)$$

При $\mu \gg m$ последняя формула переходит в

$$\beta(g_{\mu}) = \frac{3g_{\mu}^2}{16\pi^2} + O(g_{\mu}^3). \quad (18.2.12)$$

В следующем порядке бета-функция при $\mu \gg m$ равна [3]

$$\beta(g_{\mu}) = g_{\mu} \left[3 \left(\frac{g_{\mu}}{16\pi^2} \right) - \frac{17}{3} \left(\frac{g_{\mu}}{16\pi^2} \right)^2 + \dots \right].$$

Если для наших целей достаточно однопетлевого приближения, функцию $\beta(g)$ можно найти еще быстрее. Чтобы избежать больших радиационных поправок в матричных элементах на масштабах энергий порядка μ , выразим голую константу взаимодействия g через конечную перенормированную константу g_{μ} согласно

$$g = g_{\mu} + B(g_{\mu}) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \dots \quad (18.2.13)$$

Например, из (18.1.3) сразу же следует, что коэффициент при $\ln \Lambda$ в выражении для g равен

$$B(g) = -\frac{3}{2} [-i(2\pi)^4 g^2] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \right]^2 2\pi^2 i = \frac{3g^2}{16\pi^2}. \quad (18.2.14)$$

Неперенормированная константа, очевидно, не зависит от μ . Поэтому в главном порядке

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_{\mu} - B(g_{\mu}) = 0,$$

и потому (также в главном порядке) имеем

$$\beta(g) = B(g). \quad (18.2.15)$$

Если $B(g)$ дается выражением (18.2.14), мы снова получаем результат (18.2.12) для функции $\beta(g)$ в теории скалярного поля со взаимодействием ϕ^4 .

Вместо использования явного параметра обрезания Λ , что может привести к нежелательному нарушению калибровочной симметрии, часто оказывается более удобным воспользоваться для сокращения ультрафиолетовых расхождений методом размерной регуляризации. В пространственно-временной размерности $d < 4$ вместо величины $\ln(\Lambda/\mu)$ появляется сходящийся интеграл

$$\int_{\mu}^{\infty} k^{d-4} \frac{dk}{k} = \frac{\mu^{d-4}}{4-d} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \left[\frac{1}{4-d} - \ln \mu \right].$$

Теперь (в качестве альтернативы исключению зависимости от параметра обрезания за счет представления перенормированной константы взаимодействия в виде (18.2.13)) можно записать

$$g = g_{\mu} + B(g_{\mu}) \left[\frac{1}{4-d} - \ln \mu \right], \quad (18.2.16)$$

с той же функцией $B(g_{\mu})$, что и раньше. Поэтому для вычисления функции $\beta(g_{\mu})$ нам нужно лишь найти коэффициент при сингулярном слагаемом $1/(4-d)$ в разложении перенормированной константы взаимодействия. В § 18.6 мы распространим это рассуждение на все порядки теории возмущений.

Пока в скалярной теории поля с лагранжианом (18.1.2) величина g_{μ} остается достаточно малой, решение уравнений (18.2.9) и (18.2.12) хорошо приближается функцией

$$g_{\mu} = -\frac{16\pi^2}{3 \ln(\mu/M)}, \quad (18.2.17)$$

где M — постоянная интегрирования. Эта формула иллюстрирует типичное свойство вычислений в рамках метода ренормгруппы, при которых происходит замена безразмерных констант взаимодействий (в данном случае g_R) на параметры с размерностью массы (M). Величину M можно связать с g_R , сравнив решение (18.2.17) с поведением константы взаимодействия при энергиях μ , достаточно больших для применимости приближения $\mu \gg m$, но при этом достаточно малых в том смысле, что $|g_R \ln(\mu/m)| \ll 1$, для которых согласно (18.2.5)

$$g_{\mu} \simeq g_R + \frac{3g_R^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{m}\right). \quad (18.2.18)$$

Находим

$$M \simeq m \exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_R}\right), \quad (18.2.19)$$

так что решение (18.2.17) можно представить в более привычном виде

$$g_{\mu} = g_R \left[1 - \frac{3g_R}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{m} \right]^{-1}. \quad (18.2.20)$$

Подчеркнем еще раз, что этот результат справедлив при условии малости g_μ , даже если при этом величина $|g_R \ln(\mu/m)|$ оказывается порядка единицы, так что мы добились существенного продвижения по сравнению с пертурбативным результатом (18.2.18). Конечно же, условие малости g_μ будет нарушено, когда величина $|g_R \ln(\mu/m)|$ станет достаточно близкой к критическому значению $16\pi^2/3$. Но по крайней мере из формулы (18.2.20) с полной определенностью следует, что g_E становится достаточно большой для того, чтобы теория возмущений стала неприменимой, уже при некоторой энергии E , *меньшей* критического значения (18.2.19).

При вычислении лежащих вне массовых оболочек матричных элементов операторов, а не проинтегрированных сечений рассеяния, необходимо также принимать во внимание N -множители, входящие в определения перенормированных операторов с конечными матричными элементами. В предыдущем параграфе мы видели, что если такие N -множители определены стандартным образом (например, за счет условия сокращения поправочных множителей, связанных с расходящимися поддиаграммами в ситуации, когда оператор обладает нулевым полным 4-импульсом или представляет собой поле, взятое в точке, лежащей на массовой оболочке), то выражения для N -множителей содержат сингулярности в пределе нулевой массы, аналогичные сингулярностям в (18.1.12) и (18.1.16), что приводит к возникновению больших логарифмов при $E \gg m$. Выход состоит в том, чтобы определить перенормировочные константы $N_\mu^{(\mathcal{O})}$ на плавающем масштабе μ , чтобы при вычислении диаграмм для матричных элементов перенормированного оператора

$$\mathcal{O}_\mu = N_\mu^{(\mathcal{O})} \mathcal{O} \quad (18.2.21)$$

поправочные множители, связанные с содержащими оператор $\mathcal{O}$ расходящимися поддиаграммами, сокращались в перенормировочной точке с характерным 4-импульсом μ . Если M_R — матричный элемент обычным образом перенормированного оператора, а M — оператор, перенормированный согласно (18.2.21), то при любом μ

$$M_R = \left[\prod_{\mathcal{O}} \frac{N^{(\mathcal{O})}}{N_\mu^{(\mathcal{O})}} \right] M(E, x, g_\mu, m, \mu). \quad (18.2.22)$$

Мы можем снова воспользоваться размерным анализом (предположив, что M имеет размерность D и положив $\mu = E$) и переписать последнюю формулу как

$$M_R = E^D \left[\prod_{\mathcal{O}} \frac{N^{(\mathcal{O})}}{N_E^{(\mathcal{O})}} \right] M\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right). \quad (18.2.23)$$

Таким образом, чтобы найти поведение не лежащей на массовой оболочке амплитуды M_R при высоких энергиях, нам нужно выяснить, как величины N_μ зависят от перенормировочного масштаба μ .

Для любых двух перенормировочных масштабов μ и μ' перенормированные операторы $N_\mu^{(\mathcal{O})}$ и $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}$ оба имеют конечные матричные элементы, и потому отношение $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}/N_\mu^{(\mathcal{O})}$ не может зависеть от параметра обрезания. Из соображений размерности это отношение может быть представлено как

$$\frac{N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}}{N_\mu^{(\mathcal{O})}} = G^{(\mathcal{O})}(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu). \quad (18.2.24)$$

Дифференцируя по μ' и полагая затем $\mu' = \mu$, получаем

$$\mu \frac{d}{d\mu} N_\mu^{(\mathcal{O})} = \gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, m/\mu) N_\mu^{(\mathcal{O})}, \quad (18.2.25)$$

где

$$\gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, m/\mu) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial z} G^{(\mathcal{O})}(g_\mu, z, m/\mu) \right]_{z=1}. \quad (18.2.26)$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$N_E^{(\mathcal{O})} \propto \exp \left[\int^E \gamma^{(\mathcal{O})} \left(g_\mu, \frac{m}{\mu} \right) \frac{d\mu}{\mu} \right]. \quad (18.2.27)$$

Мы видим, что введение плавающего масштаба предотвращает возникновение связанных с пределом нулевой массы сингулярностей в множителях $N_\mu^{(\mathcal{O})}$ и $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}$, а следовательно, и в величинах $G^{(\mathcal{O})}$ и $\gamma^{(\mathcal{O})}$. Таким образом, пока величина g_μ мала, возникновение больших логарифмов невозможно и для вычисления $\gamma^{(\mathcal{O})}$ можно пользоваться теорией возмущений. Кроме того, при $\mu \gg m$ функция $\gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, m/\mu)$ имеет гладкий предел

$$\gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu) \equiv \gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, 0). \quad (18.2.28)$$

В качестве примера рассмотрим оператор $\mathcal{O} = \phi^2$ в теории скалярного поля со взаимодействием $g\phi^4/24$. Вместо того чтобы провести перенормировку исходя из условия сокращения множителя (18.1.9) при $p^2 = 0$, потребуем его сокращения на плавающем масштабе $p^2 = \mu^2$. Для этого введем новый перенормированный оператор $N_\mu^{(\phi^2)} \phi^2$ с

$$N_\mu^{(\phi^2)} \equiv F^{(\phi^2)}(\mu^2)^{-1} = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} \right) - 1 \right] + O(g^2).$$

Отношение (18.2.24) для этого оператора равно

$$G^{(\phi^2)} \left(g_\mu, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu} \right) \equiv \frac{N_{\mu'}^{(\phi^2)}}{N_\mu^{(\phi^2)}} = 1 + \frac{g_\mu}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 + \mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu'^2 x(1-x)} \right] + O(g_\mu^2).$$

(В правой части вместо g или $g_{\mu'}$ можно писать просто g_{μ} , поскольку возникающая при этом ошибка имеет порядок g_{μ}^2 .) Из (18.2.26) получаем

$$\gamma^{(\phi^2)}\left(g_{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) = -\frac{g_{\mu}}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} dx + O(g_{\mu}^2),$$

что при $\mu \gg m$ сводится к

$$\gamma^{(\phi^2)}(g_{\mu}) = -\frac{g_{\mu}}{16\pi^2} + O(g_{\mu}^2). \quad (18.2.29)$$

Другой полезный пример дает N -множитель, связанный с перенормировкой электромагнитного поля в квантовой электродинамике. Напомним, что фотонный пропагатор может быть сделан конечным для всех значений импульса за счет вычисления его с использованием перенормированных электромагнитных полей, что эквивалентно умножению пропагатора перенормированного поля на Z_3^{-1} :

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma}(q) = Z_3^{-1} \Delta_{\rho\sigma}(q). \quad (18.2.30)$$

Согласно (10.5.17), перенормированный пропагатор можно записать в виде

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma}(q) = \frac{\eta_{\rho\sigma}}{[q^2 - i\epsilon][1 - \pi(q^2)]} + q_{\rho}q_{\sigma}\text{-члены}. \quad (18.2.31)$$

Предположим, что вместо этого мы определили перенормированное поле $N_{\mu}^{(A)} A^{\rho}$, пропагатор которого имеет единичный коэффициент при $\eta_{\rho\sigma}/[q^2 - i\epsilon]$ в точке $q^2 = \mu^2$. Очевидно, что для этого нужно положить

$$N_{\mu}^{(A)} = Z_3^{-1/2} [1 - \pi(\mu^2)]^{1/2}. \quad (18.2.32)$$

Используя (11.2.22), для функции (18.2.24) получаем

$$\begin{aligned} G^{(A)}(g_{\mu}, \mu'/\mu, m/\mu) &= \left[\frac{1 - \pi(\mu'^2)}{1 - \pi(\mu^2)} \right]^{1/2} = \\ &= 1 - \frac{e_{\mu}^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[\frac{m^2 + \mu'^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} \right] + O(e_{\mu}^4), \end{aligned} \quad (18.2.33)$$

и из (18.2.26) следует, что

$$\gamma^{(A)}(e_{\mu}, m/\mu) = -\frac{e_{\mu}^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)^2 \mu^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} + O(e_{\mu}^4). \quad (18.2.34)$$

Как и ожидалось, эта функция имеет гладкий предел при $\mu \gg m$:

$$\gamma^{(A)}(e_{\mu}) \equiv \gamma^{(A)}(e_{\mu}, 0) = -\frac{e_{\mu}^2}{12\pi^2} + O(e_{\mu}^4). \quad (18.2.35)$$

Мы уже отмечали, что случай квантовой электродинамики является особенным в том смысле, что константа перенормировки электромагнитного поля $Z_3^{-1/2}$ совпадает с обратной константой перенормировки заряда электрона: $e_R = Z_3^{1/2} e$. Естественное определение перенормированного электрического заряда на плавающем масштабе μ дается выражением

$$e_\mu = N_\mu^{(A)-1} e = Z_3^{-1/2} N_\mu^{(A)-1} e_R, \quad (18.2.36)$$

так что произведение e_μ на перенормированное на масштабе μ поле $N_\mu^{(A)} A^\rho$ не зависит от μ . Из (18.2.25) видно, что функция $\beta(e)$, определяющая согласно уравнению (18.2.9) зависимость e_μ от μ , при $\mu \gg m$ равна

$$\beta(e) = -e\gamma^{(A)}(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + O(e^5). \quad (18.2.37)$$

Пользуясь результатами проделанных ранее [3а] вычислений вклада четвертого порядка в амплитуду поляризации вакуума $\pi(q^2)$, Гелл-Манн и Лоу нашли также следующий член в разложении $\beta(e)$ по степеням e :

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + O(e^7). \quad (18.2.38)$$

Иными словами, электрический заряд на плавающем масштабе μ удовлетворяет уравнению ренормгруппы

$$\mu \frac{d}{d\mu} e_\mu = \frac{e_\mu^3}{12\pi^2} + \frac{e_\mu^5}{64\pi^2} + O(e_\mu^7). \quad (18.2.39)$$

Отсюда следует, что для малых e_μ заряд e_μ *растет* с увеличением μ .

Нам также требуется задать начальное условие. Его можно получить, воспользовавшись известным значением стандартным образом перенормированного заряда $e_R = Z_3^{1/2} e$, для которого $\alpha \equiv e_R^2/4\pi = 1/137,036 \dots$. Соотношения (18.2.32) и (18.2.36) дают

$$\begin{aligned} e_R/e_\mu &= Z_3^{1/2} N_\mu^{(A)} = \sqrt{1 - \pi(\mu^2)} = \\ &= 1 - \frac{e_R^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m_e^2} \right] + O(e_R^4). \end{aligned} \quad (18.2.40)$$

Следует согласовать эту зависимость с решением уравнения (18.2.39) на некотором масштабе μ , который, как обычно, должен быть достаточно велик для того, чтобы оправдать использование приближения $\mu \gg m_e$ в (18.2.39). При этом он должен быть достаточно мал, так чтобы логарифм в (18.2.40) был еще достаточно мал по сравнению с $4\pi^2/e_R^2$, чтобы использование теории возмущений было оправдано. (Например, можно взять $\mu \sim 100$ МэВ.) Для такого μ форму-

ла (18.2.40) дает

$$e_\mu \simeq e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2} \left[\ln \frac{\mu}{m_e} - \frac{5}{6} \right]. \quad (18.2.41)$$

С другой стороны, решение уравнения (18.2.39) при малых e_μ (в правой части оставляем только ведущее слагаемое) есть

$$e_\mu = \left[\text{const} - \frac{\ln \mu}{6\pi^2} \right]^{-1/2}. \quad (18.2.42)$$

Сравнивая (18.2.41) и (18.2.42), получаем решение

$$e_\mu = e_R \left[1 - \frac{e_R^2}{6\pi^2} \left(\ln \left(\frac{\mu}{m_e} \right) - \frac{5}{6} \right) \right]^{-1/2}. \quad (18.2.43)$$

В отличие от (18.2.41), равенство (18.2.43) справедливо всегда, когда мала величина $e_\mu^2/6\pi^2$, вне зависимости от малости величины $(e_R^2/(6\pi^2)) \ln(\mu/m_e)$.

В частности, в § 11.3 мы видели, что главные радиационные поправки четвертого порядка к магнитному моменту мюона можно получить посредством умножения швингеровского члена (11.3.16) на слагаемое второго порядка в амплитуде поляризации вакуума $\pi_e(k^2)$ при $k^2 \approx m_\mu^2$. В соответствии с (18.2.40) это эквивалентно (в рассматриваемом порядке) подстановке $e_{m_\mu}^2/4\pi$ вместо α в швингеровский член.

Другой пример: в экспериментах на электрон-позитронных коллайдерах (таких, как LEP в CERN или SLC в SLAC) сейчас возможно изучать процессы с характерными энергиями порядка массы Z^0 , т. е. 91 ГэВ. Из (18.2.43) следует, что при таких энергиях для вычисления радиационных поправок в чистой квантовой электродинамике следует пользоваться постоянной тонкой структуры, равной не $\alpha = 1/137,036$, а

$$\frac{e^2(91 \text{ ГэВ})}{4\pi} = \frac{\alpha}{1 - 2(11,25)\alpha/3\pi} = \frac{1}{134,6}. \quad (18.2.44)$$

Это значение соответствует теории, в которой электроны являются единственными заряженными частицами с массой, меньшей m_Z . В реальном мире имеется много таких частиц, и эффективная постоянная тонкой структуры [4] оказывается при энергии m_Z равной $(128,87 \pm 0,12)^{-1}$.

* * *

Плавающий масштаб, на котором вычисляются параметры теории, может быть не импульсом некоторой внешней линии, а величиной внешнего *поля*. Одним из первых применений метода ренормгруппы было рассмотрение Колменом и Е. Вайнбергом [4а] эффективного потенциала $V(\phi)$ для постоянного в пространстве-времени внешнего

скалярного поля ϕ . В простейшем случае, когда поле взаимодействует только с самим собой, они получили однопетлевой результат (16.2.15). Особенный интерес представляет анализ свойств этого потенциала в случае, когда перенормированная масса m_R обращается в нуль. В этом случае в однопетлевом приближении можно положить в последнем слагаемом величину $\mu^2(\phi)$ равной $g_R\phi^2/2$; при этом потенциал (16.2.15) примет вид (с точностью до несущественного переопределения константы связи)

$$V(\phi) = \lambda_R + \frac{g}{24} \phi^4 + \frac{g^2 \phi^4 \ln \phi^2}{256\pi^2}. \quad (18.2.45)$$

На первый взгляд, при $g > 0$ и достаточно малом ϕ потенциал становится меньше, чем λ_R , и точка $\phi = 0$ является локальным максимумом, а не локальным минимумом. Однако для столь малых ϕ третье слагаемое в (18.2.45) больше второго, и теория возмущений неприменима. Кроме того, хотелось бы убедиться, что условие $g > 0$ является необходимым для ограниченности потенциала снизу при больших значениях ϕ ; но согласно (18.2.45) для любого сколь угодно малого значения $g > 0$ при достаточно большой величине ϕ теория возмущений становится неприменимой и результат (18.2.45) оказывается недостаточным для выяснения вопроса об ограниченности потенциала.

Можно продвинуться существенно дальше, если использовать константу взаимодействия, определенную на плавающем масштабе μ (соответствующем величине поля ϕ). Пусть константа связи g_μ определена условием

$$V(\mu) = \lambda_R + \frac{g_\mu}{24} \mu^4. \quad (18.2.46)$$

Если бы мы с самого начала пользовались константой связи g_μ , то вместо (18.2.45) получили бы

$$V(\phi) = \lambda_R + \frac{g_\mu}{24} \phi^4 + \frac{g_\mu^2 \phi^4}{256\pi^2} \ln\left(\frac{\phi^2}{\mu^2}\right), \quad (18.2.47)$$

что, очевидно, удовлетворяет соотношению (18.2.46)²⁾. Уравнение ренормгруппы для g_μ можно получить из условия независимости эф-

²⁾ Формула (18.2.47) не совпадает с результатом простой подстановки в (18.2.45) выражения для g как функции g_μ , получаемого при помощи (18.2.46): отличие состоит в том, что последнее слагаемое оказывается пропорциональным не g^2 , а g_μ^2 . Хотя разность соответствует более высоким порядкам по g , она может оказаться существенной, когда $V(\phi)$ вычисляется в точках, очень далеких от μ , и большие логарифмы могут компенсировать степени константы связи. Если с самого начала использовать в качестве константы взаимодействия g_μ и положить μ по порядку величины равным ϕ , то большие логарифмы не возникают и приближение (18.2.47) справедливо всегда, когда константа g_μ мала.

фективного потенциала от μ^3),

$$\mu \frac{dg_\mu}{d\mu} = \frac{3g_\mu^2}{16\pi^2}. \quad (18.2.48)$$

(Мы опустили слагаемые, содержащие производные от g_μ^2 , поскольку они имеют более высокий порядок по g_μ и несущественны в пределе малых g_μ .) Тот факт, что полученное уравнение совпадает с уравнениями (18.2.9) и (18.2.12), в которых μ считается перенормировочным импульсом, не случаен: в следующем параграфе мы увидим, что первые два члена в правой части уравнения ренормгруппы всегда оказываются независимыми от способа определения плавающего масштаба. Решение уравнения (18.2.48) дается формулой (18.2.17), вообще говоря, с другим значением постоянной интегрирования M . Полагая в (18.2.17) $\mu = \phi$, приходим к соотношениям

$$V(\phi) = \lambda_R - \frac{4\pi^2\phi^4}{9\ln(\phi^2/M^2)}, \quad (18.2.49)$$

$$g_\phi = -\frac{32\pi^2}{3\ln(\phi^2/M^2)}. \quad (18.2.50)$$

Полученными формулами следует пользоваться осторожно, поскольку они справедливы лишь при условии малости константы взаимодействия g_ϕ . Помимо того что выражение (18.2.49) неприменимо при ϕ , близком к M , мы также не имеем права интегрировать уравнение ренормгруппы по интервалу, содержащему сингулярную точку $\phi = M$, так что знание g_ϕ по одну сторону от этой сингулярности не может быть использовано для получения информации о поведении g_ϕ по другую сторону.

Предположим, что g_ϕ имеет малое *положительное* значение для некоторого ϕ_0 . Тогда из (18.2.50) следует, что $M > |\phi_0|$ и константа связи g_ϕ будет оставаться малой, а равенство (18.2.49) будет справедливым при всех $|\phi| < |\phi_0|$. Это значит, что точка $\phi = 0$ является локальным *минимумом*, а не максимумом (как можно было предположить, исходя из соотношения (18.2.45)). Таким образом, инвариантный относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$ вакуум стабилен в рамках рассматриваемой модели, если не принимать во внимание возможность квантовомеханического туннелирования. С другой стороны, у нас нет уверенности в том, что соотношение (18.2.49)

³⁾ Чтобы исключить все зависимости от параметров обрезания, ϕ следует выразить через перенормированное поле $\phi_\mu = N_\mu^\phi \phi$, что приводит к возникновению зависимости $V(\phi_\mu)$ от μ благодаря зависимости перенормировочной константы $N_\mu^{(\phi)}$ от μ . Мы игнорируем это обстоятельство, поскольку в теории скалярного поля со взаимодействием ϕ^4 главный вклад в зависимость $N_\mu^{(\phi)}$ от μ возникает от диаграмм с двумя петлями, и при вычислениях с нужной нам точностью можно полагать $N_\mu^{(\phi)} = 1$.

становится верным при $|\phi| \gg M$. Константа взаимодействия может оказаться слишком большой для применимости теории возмущений при всех $|\phi| > M$, но даже в случае, когда она становится малой для некоторого $|\phi| > M$, может оказаться, что потенциал дается выражением (18.2.49) с новым параметром $M' > \phi$, т.е. имеются новые сингулярности. Поэтому мы не можем сделать вывода о том, что $V(\phi) \rightarrow -\infty$ при $|\phi| \rightarrow \infty$.

Аналогично, пусть g_ϕ имеет малое отрицательное значение при некотором $\phi = \phi_0$. Тогда можно утверждать, что $M < |\phi_0|$, т.е. g_ϕ будет оставаться малой, а соотношение (18.2.49) будет справедливым для всех $|\phi| > |\phi_0|$. В этом случае мы ничего не можем сказать о поведении потенциала при $|\phi| < M$, но можем с уверенностью утверждать (исходя из применимости формулы (18.2.49) в соответствующем пределе), что $V(\phi) \rightarrow -\infty$ при $|\phi| \rightarrow \infty$ и стабильный вакуум в такой теории невозможен. Поскольку мы рассматривали предел $|\phi| \rightarrow \infty$, сделанные выводы справедливы и для скалярного поля с массой $m > 0$, удовлетворяющей соотношению $m \ll |\phi_0|$. Поэтому всегда необходимо предполагать положительность константы связи для взаимодействия ϕ^4 , перенормированной на любом масштабе, много большем скалярной массы.

§ 18.3. Типы асимптотического поведения

Метод ренормгруппы позволяет получить важную информацию об асимптотическом поведении квантовой теории поля даже в случае, когда бегущая константа связи g_μ не остается достаточно малой и теория возмущений неприменима. Мы будем выделять четыре сценария поведения g_μ при $\mu \rightarrow \infty$, соответствующие четырем возможным в теориях с единственной безразмерной константой связи типам графиков функции $\beta(g)$. Случай теории с несколькими независимыми константами взаимодействий будет рассмотрен в следующем параграфе.

Вспомним сначала результаты для $\beta(g)$, полученные при изучении двух примеров теорий в § 18.2. Первый из них относился к скалярной теории поля со взаимодействием $g\phi^4/24$, в которой поведение бета-функции при малых значениях g описывается формулой

$$\beta(g) = \frac{3g^2}{16\pi^2} - \frac{17}{3} \frac{g^3}{(16\pi^2)^2} + O(g^4). \quad (18.3.1)$$

Другой пример давала квантовая электродинамика. Вместо того чтобы записывать бета-функцию в виде (18.2.38), мы сделаем акцент на аналогии с теорией скалярного поля, введя обозначение

$$g \equiv e^2. \quad (18.3.2)$$

Под $\beta(g_\mu)$ теперь следует понимать $\mu dg_\mu/d\mu$, и для малых g имеем

$$\beta(g) = 2e \left[\frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + O(e^7) \right] = \frac{g^2}{6\pi^2} + \frac{g^3}{32\pi^2} + O(g^4). \quad (18.3.3)$$

Отметим, что в обоих случаях допустимые по физическим соображениям значения констант взаимодействия лежат в области $g \geq 0$, и $\beta(g) \geq 0$ при малых g . В электродинамике это следует из того, что действительность лагранжиана с необходимостью влечет действительность e . Согласно результатам, полученным в конце предыдущего параграфа, в скалярной теории поля условие $g > 0$ является необходимым для существования стабильного вакуума. Существуют, впрочем, и примеры теорий с $\beta(g) \leq 0$ для $g \geq 0$. В частности, можно рассмотреть скалярную теорию поля с плотностью гамильтониана взаимодействия $-g\phi^4/24$ с положительной константой g . Такая ситуация может показаться нефизической, но проблемы стабильности не станут существенными, пока мы будем работать в рамках теории возмущений. Из (18.2.9) видно, что при замене $g \rightarrow -g$ бета-функция преобразуется согласно $\beta(g) \rightarrow -\beta(-g)$, и полученный ранее для теории со взаимодействием $g\phi^4/24$ результат

$$\beta(g) = 3g^2/16\pi^2 + O(g^3)$$

приводит в случае плотности гамильтониана $-g\phi^4/24$ к выражению

$$\beta(g) = -\frac{3g^2}{16\pi^2} + O(g^3). \quad (18.3.4)$$

Более важный для физики пример дают неабелевы калибровочные теории с не слишком большим числом спинорных полей; как будет показано в § 18.7, в них также $\beta \leq 0$ для малых положительных значений констант связи. Ниже мы всюду будем предполагать, что константа взаимодействия g определена так, что $g \geq 0$, и будем рассматривать случаи положительных и отрицательных значений $\beta(g)$ при малых g .

Перечислим теперь имеющиеся возможности (см. рис. 18.4).

а) Сингулярность при конечном значении энергии. Предположим, что $\beta(g) > 0$ при малых положительных g (это имеет место, например, в случаях (18.3.1) и (18.3.2)), причем $\beta(g)$ остается положительной и продолжает достаточно быстро расти с увеличением g , так что интеграл $\int^\infty dg/\beta(g)$ сходится:

$$\int^\infty \frac{dg}{\beta(g)} < \infty. \quad (18.3.5)$$

В такой ситуации g_μ монотонно удаляется от точки $g_\mu = 0$, и в соответствии с формулой (18.2.10) величина g_E становится бесконечной при *конечном* значении E :

$$E_\infty = \mu \exp \left(\int_{g_\mu}^\infty \frac{dg}{\beta(g)} \right), \quad (18.3.6)$$

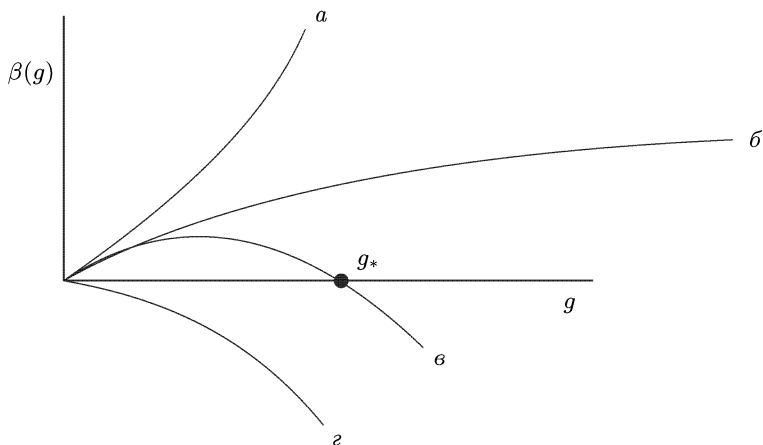


Рис. 18.4. Качественный вид четырех возможных типов поведения функции $\beta(g)$. Для изображенной зависимости бета-функции $\beta(g)$ бегущая константа связи g_μ (а) стремится к бесконечности при конечном значении μ ; (б) монотонно растет с увеличением μ ; (в) стремится к конечному пределу g_* при $\mu \rightarrow \infty$; (г) стремится к нулю при $\mu \rightarrow \infty$

где μ — произвольный перенормировочный масштаб с $\mu \gg m$. Пример такого поведения встретился нам в предыдущем параграфе: если предположить, что верная в низшем порядке формула для бета-функции в скалярной теории поля $\beta(g) = 3g^2/16\pi^2$ является точной при всех значениях g , то бегущая константа связи (18.2.17) станет бесконечной для энергии (18.2.19). Аналогично, если считать справедливую в главном порядке формулу $\beta(g) = g^2/6\pi^2$ (где $g \equiv e^2$) для бета-функции в спинорной квантовой электродинамике точной при всех g , то для энергии (18.3.6), которой будут соответствовать бесконечные значения g_E и e_E , получим

$$E_\infty = \mu \exp\left(\frac{6\pi^2}{g_\mu}\right). \quad (18.3.7)$$

Используя (18.2.43), можно переписать это выражение в терминах обычного перенормированного заряда:

$$E_\infty \simeq m_e \exp\left(\frac{6\pi^2}{e_R^2} + \frac{5}{6} + O(e_R^2)\right) = e^{646,6} m_e. \quad (18.3.8)$$

Конечно же, приближение $\beta(g) = g^2/6\pi^2$ станет некорректным раньше, чем будет достигнута эта энергия. Можно быть уверенным лишь в том, что для некоторой энергии $E < E_\infty$ заряд e_E становится большим и теория возмущений перестает быть применимой.

б) Монотонный рост. Предположим теперь, что в некоторой теории функция $\beta(g)$ остается положительно определенной при $g \rightarrow \infty$, но растет достаточно медленно (или уменьшается), так что ин-

теграл $\int dg/\beta(g)$ расходится. Константа связи g_E при этом монотонно увеличивается при $E \rightarrow \infty$ и становится бесконечной лишь при $E = \infty$. Кроме того, при этом ведущий член в асимптотике g_E при $E \rightarrow \infty$ не зависит от стандартным образом определенной константы взаимодействия. Например, если $\beta(g)$ ведет себя при больших g как bg^k с $b > 0$ и $k < 1$, то решение уравнения (18.2.9) имеет вид

$$g_E = \left[1 + (1 - k)bg_\mu^{k-1} \ln \frac{E}{\mu} \right]^{1/(1-k)} g_\mu. \quad (18.3.9)$$

Если константа связи g_μ мала при некотором значении μ (скажем, при μ порядка m), то рост g_E будет замечен только при энергиях, которые экспоненциально велики по сравнению с этой величиной μ . Тем не менее в пределе очень высоких энергий константа связи растёт по закону

$$g_E \rightarrow [(1 - k)b \ln E]^{1/(1-k)}. \quad (18.3.10)$$

Асимптотическое поведение оказывается не зависящим от g_μ .

в) Неподвижная точка при конечном значении константы связи. Предположим теперь, что $\beta(g)$ остается положительной во всем интервале $0 < g < g_*$, но обращается в нуль в точке $g = g_*$ и далее становится отрицательной. Тогда, в соответствии с уравнением (18.2.9), с увеличением μ константа связи g_μ будет расти при $g_\mu < g_*$ и уменьшаться при $g > g_\mu$, в обоих случаях приближаясь к неподвижной точке g_* при $\mu \rightarrow \infty$. Если $\beta(g)$ имеет при $g = g_*$ простой нуль, то в окрестности этой точки имеем

$$\beta(g) \rightarrow a(g_* - g) \quad \text{при} \quad g \rightarrow g_* \quad (18.3.11)$$

с $a > 0$. Решением уравнения (18.2.9) будет

$$g_* - g_\mu \propto \mu^{-a}. \quad (18.3.12)$$

(Описанный выше в пункте б тип асимптотического поведения можно считать предельным случаем (18.3.12), соответствующим $g_* = \infty$.) Естественно предположить, что для произвольного оператора $\mathcal{O}$ функция $\gamma(g)$ имеет гладкое поведение в окрестности g_* :

$$\gamma(g) = \gamma(g_*) + c(g_* - g) + O((g_* - g)^2). \quad (18.3.13)$$

(Мы опускаем индекс $\mathcal{O}$ у γ и c .) Следовательно, в матричных элементах этого и (возможно) других операторов возникнет множитель

$$N_E^{-1} \propto \exp \left[- \int_{\mu}^E \gamma(g_\mu) \frac{d\mu}{\mu} \right] \propto E^{-\gamma(g_*)} [1 + O(E^{-a})] \quad (18.3.14)$$

(см. (18.2.27)). Произведение множителей $E^{-\gamma(g_*)}$ можно объединить с множителем E^D из (18.2.23); в результате получим, что матричный элемент ведет себя как

$$M_R \propto E^{D*}. \quad (18.3.15)$$

Возникающая размерность D_* получается в результате добавления “аномальной размерности” $-\gamma(g_*)$ к фактической размерности каждого из операторов, для которых вычисляется матричный элемент.

г) **Асимптотическая свобода.** До сих пор мы рассматривали случаи, когда $\beta(g)$ была положительной при малых положительных значениях g , так что величина g_μ удалялась от точки $g = 0$ с увеличением μ . Предположим теперь, что в некоторой теории функция $\beta(g)$ отрицательна для малых положительных g . Тогда

$$\beta(g) \rightarrow -bg^n, \quad (18.3.16)$$

где $b > 0$. Показатель n равен наименьшему порядку диаграмм, дающих вклад в $\beta(g)$, и потому заведомо является целым числом, большим единицы. (В теориях, рассматриваемых ниже в качестве примеров, $n = 2$.) Решением уравнения (18.2.9) будет

$$g_E = g_\mu \left[1 + b(n-1)g_\mu^{n-1} \ln \frac{E}{\mu} \right]^{-1/(n-1)}. \quad (18.3.17)$$

Предельное поведение при $E \rightarrow \infty$ не зависит от g_μ :

$$g_E \rightarrow [b(n-1) \ln E]^{-1/(n-1)}. \quad (18.3.18)$$

Поскольку мы имеем $g_E \rightarrow 0$ при $E \rightarrow \infty$, результатам теории возмущений в этом пределе можно доверять (при условии, что g_E для конечных E остается в окрестности точки $g = 0$, где g и $\beta(g)$ имеют противоположные знаки). Ожидается, что поведение аномальных размерностей различных операторов $\mathcal{O}$ аналогично случаю слабой связи,

$$\gamma(g) \rightarrow cg^m \quad (18.3.19)$$

(индексы $\mathcal{O}$ опущены), где m — наименьший из порядков диаграмм, дающих вклад в перенормировку оператора, а c — действительная постоянная произвольного знака. При высоких энергиях множитель, возникающий в выражениях для матричных элементов за счет перенормировки оператора, имеет асимптотику

$$\begin{aligned} N_E^{-1} &\propto \exp \left[- \int^E \gamma(g_\mu) \frac{d\mu}{\mu} \right] \rightarrow \exp \left[-c \int^E [b(n-1) \ln \mu]^{-m/(n-1)} \frac{d\mu}{\mu} \right] \propto \\ &\propto \exp \left[- \frac{c[b(n-1)]^{-m/(n-1)}}{(1-m/(n-1))} (\ln E)^{1-m/(n-1)} \right], \end{aligned} \quad (18.3.20)$$

за тем исключением, что при $m = n-1$

$$N_E^{-1} \propto (\ln E)^{-c/b(n-1)}. \quad (18.3.21)$$

Видно, что в случае асимптотической свободы не возникает поправок к эффективной размерности, определяющей степень энергии в асимптотическом поведении матричного элемента; однако асимптотика модифицируется за счет возникающих степеней $\ln E$.

В качестве модельной теории, обладающей асимптотической свободой, мы можем взять скалярную теорию поля с плотностью гамильтониана взаимодействия $-g\phi^4/24$, где $g > 0$. Из формулы (18.3.4) следует, что значения входящих в (18.3.16) параметров равны

$$b = \frac{3}{16\pi^2}, \quad n = 2, \quad (18.3.22)$$

и из (18.3.17) в пределе $E \rightarrow \infty$ получаем

$$g_E \rightarrow \left[\frac{3 \ln E}{16\pi^2} \right]^{-1}. \quad (18.3.23)$$

Далее, аномальная размерность оператора ϕ^2 в этой теории дается выражением (18.2.29)

$$\gamma(g) = -\frac{g}{16\pi^2} + O(g^2). \quad (18.3.24)$$

Поэтому в формуле (18.3.19)

$$c = -\frac{1}{16\pi^2}, \quad m = 1. \quad (18.3.25)$$

В матричных элементах для оператора ϕ^2 возникают множители (18.3.21):

$$N_E^{-1} \propto (\ln E)^{1/3}. \quad (18.3.26)$$

Для самого скалярного поля ϕ в этой теории $\gamma(g) \propto g^2$, т. е. $m = 2$ и в матричных элементах оператора ϕ появляются множители, определяемые выражением (18.3.20):

$$N_E^{-1} \propto 1 + O\left(\frac{1}{\ln E}\right). \quad (18.3.27)$$

Другой (более физический) пример теории с асимптотической свободой дает квантовая хромодинамика, которую мы рассмотрим в § 18.7.

Во всех случаях, когда эволюцию величины g_E можно проследить до бесконечных энергий, ее предельное поведение оказывается не зависящим от перенормированной константы взаимодействия g_R . Это, однако, не означает, что в теории нет произвольных безразмерных параметров. Каждый раз для описания способа стремления g_E к пределу при $E \rightarrow \infty$ мы должны были ввести свободный параметр λ с размерностью энергии. В случае **б** формулу (18.3.10) можно переписать в виде

$$g_E \rightarrow [(1-k)b \ln(E/\lambda)]^{1/(1-k)}.$$

В случае **в** можно представить зависимость (18.3.12) в виде

$$g_E \rightarrow g_* \left[1 - \left(\frac{\lambda}{E} \right)^b \right].$$

Наконец, в случае **г** из (18.3.18) получаем

$$g_E \rightarrow [b(n-1) \ln(E/\lambda)]^{-1/(n-1)}.$$

В таких теориях, вообще говоря, имеется безразмерный свободный параметр: отношение величины λ к массе m . Константы взаимодействия (например, e_R), перенормировка которых привязана к масштабу m , могут быть выражены в виде функций от m/λ . Лишь когда все массы в теории обращаются в нуль мы действительно можем утверждать, что свободные безразмерные параметры отсутствуют.

Из четырех рассмотренных случаев два обладают явно нефизическим поведением — бегущая константа связи g_μ становится бесконечной при конечном значении энергии в случае **а** и при $E \rightarrow \infty$ в случае **б**. Само по себе такое поведение не является невозможным: нужно знать, как именно определена константа связи. Например, если g_μ гладким образом уменьшается от конечного значения g_m при $\mu = m$ до нуля при $\mu \rightarrow \infty$ и мы определим новую константу связи согласно $\tilde{g}_\mu \equiv g_\mu/[1 - g_\mu/g_{2m}]$, то $\tilde{g}_\mu$ станет бесконечной при $\mu = 2m$. Однако такая сингулярность вызвана исключительно особенностями определения константы связи. С другой стороны, обычные перенормированные константы связи g_μ в теории скалярного поля со взаимодействием ϕ^4 и в квантовой электродинамике определялись через величины матричных элементов для энергий порядка μ , а именно: в скалярной теории поля ϕ^4 мы полагали g_μ равной инвариантной фейнмановской амплитуде A для рассеяния скаляра на скаляре в точке $s = t = u = \mu^2$, где A предполагается аналитической. Аналогично, в спинорной электродинамике $g_\mu = e_\mu^2$ определяется согласно

$$\frac{e_\mu^2}{e_R^2} = \frac{Z_3}{N_\mu^{(A)2}} = [1 - \pi(\mu^2)]^{-1}. \quad (18.3.28)$$

Из расходимости e_μ^2 в некоторой точке μ_∞ будет следовать наличие полюса или другой сингулярности в перенормированном фотонном пропагаторе при положительном значении p^2 (при $p^2 = \mu_\infty^2$), где последний предполагается аналитическим. Поэтому для так определенных констант связи асимптотическое поведение типа **а** оказывается запрещенным из физических соображений.

Как же на самом деле ведут себя различные квантовые теории поля? Много лет назад Ландау [4b] выдвинул аргументы в пользу того, что в квантовой электродинамике возникающие в высших порядках теории возмущений степени $\ln(E/M)$ в сумме приведут к появлению сингулярностей (“духов Ландау”) при конечных значениях E . Говоря современным языком, Ландау указал на возможность ситуации типа **а**, но не привел соображений против реализации сценариев **б** и **в**.

Тем не менее сегодня широко распространена точка зрения, согласно которой квантовые теории взаимодействующих полей, не являющиеся асимптотически свободными (например, квантовая электродинамика или скалярная теория поля со взаимодействием ϕ^4), математически неудовлетворительны (противоречивы). В случае

квантовой электродинамики имеются свидетельства против реализации случая **в**, т. е. наличия нетривиальной конечной неподвижной точки e_* . Наличие такой точки e_* было бы возможным [4с], лишь если бы пертурбативные эффекты изменили качественную структуру операторного разложения (см. гл. 20) или если бы имела место пертурбативная перенормировка треугольной аномалии (см. гл. 22). Но даже если в квантовой электродинамике удастся исключить случай **в**, останется возможным сценарий **б**, наличие неподвижной точки при бесконечном значении константы связи.

Большая часть свидетельств в пользу противоречивости квантовых теорий взаимодействующих полей, не являющихся асимптотически свободными, обязана своим происхождением рассмотрению скалярной теории поля со взаимодействием ϕ^4 , проквантованной на конечной пространственно-временной решетке. Имеются строгие теоремы [4d], согласно которым такая теория (с произвольной зависимостью параметров от шага решетки), не обладающая свойством асимптотической свободы, не имеет своим непрерывным пределом при уменьшении шага решетки континуальную теорию поля; однако это противоречит результатам вычислений по теории возмущений. Приведенное рассуждение также представляется непоследовательным. Действительно, если бы существовала непротиворечивая континуальная скалярная теория поля, не являющаяся асимптотически свободной, то возможно было бы построить решеточную теорию, проведя интегрирование по степеням свободы скалярного поля во всех точках, за исключением точек, принадлежащих дискретной решетке. *Однако в результате получится не та решеточная теория, для которой были доказаны упомянутые выше теоремы.* В результирующей теории на решетке будут присутствовать все взаимодействия, совместимые с симметриями исходной теории — не только члены ϕ^4 , но и слагаемые, пропорциональные ϕ^6 , $\phi^3 \square \phi$ и т. п., коэффициенты при которых будут зависеть от параметра обрезания (обратной постоянной решетки) согласно уравнениям ренормгруппы Вильсона, обсуждавшимся в § 12.4. Никаких теорем о непрерывном пределе такой теории не доказано.

Если действительно не существует континуальной теории взаимодействующих полей, получаемой в пределе нулевого шага решетки, то мы должны столкнуться с некоторыми трудностями при попытке решить уравнения ренормгруппы Вильсона. В случае малых значений перенормированных констант взаимодействий препятствия должны возникнуть при очень малых шагах решетки. Соответствующая теория будет выглядеть как континуальная теория поля, если не рассматривать ее на очень малых расстояниях. Перенормированная константа связи в такой приближенной континуальной теории, по-видимому, имеет сингулярность при конечном значении энергии, как в случае **а**, так что она также теряет смысл на малых расстоя-

ниях. (В случае сильного взаимодействия нет прямой связи между уравнениями ренормгруппы Вильсона и Гелл-Манна–Лоу, так что из существования у голой константы взаимодействия сингулярности при конечном значении шага решетки не обязательно следует наличие у перенормированной константы связи особенности при конечной величине перенормировочного масштаба.)

Теории подобного рода иногда называют *тривиальными*, поскольку из различных предположений о значениях голых констант взаимодействия решеточной теории следует, что континуальный предел оказывается свободной теорией поля (или поскольку единственным способом сделать теорию типа **a** осмысленной на всех масштабах энергий является рассмотрение решения $g_\mu = 0$ уравнений ренормгруппы (18.2.9)). Даже если теория поля является тривиальной в том или ином смысле, нет оснований не рассматривать ее как часть реалистической теории физических явлений. Существование в теории поля препятствий к построению решений уравнений ренормгруппы Вильсона при очень малых значениях шага решетки несущественно, если в реальном мире присутствуют другие поля, которые следует принимать во внимание на столь малых пространственных масштабах. Аналогично, наличие в квантовой теории поля нефизических сингулярностей при большой энергии E_∞ не является принципиальной проблемой, если рассматриваемая теория является лишь низкоэнергетическим приближением для более общей теории, справедливым для масштабов энергий, много меньших E_∞ . В частности, прежде чем мы достигнем энергий, близких к (18.3.8), где в квантовой электродинамике предполагается наличие сингулярностей, необходимо будет учитывать даже гравитационные эффекты, а способы вычисления эффектов сильных гравитационных сил при таких энергиях неизвестны.

Несмотря на сделанные обнадеживающие замечания, для устранения нефизических сингулярностей отдельные квантовые теории поля типа спинорной квантовой электродинамики, по-видимому, придется включить в более широкую асимптотически свободную теорию. К счастью, вопрос о том, является ли теория асимптотически свободной для *некоторой* области значений констант связи, может быть решен при помощи теории возмущений: если $\beta(g)$ отрицательна при $g \rightarrow 0+$, то теория будет асимптотически свободной для всех перенормированных значений g_μ лежащих между нулем и первым корнем уравнения $\beta(g) = 0$.

* * *

В связи с вышесказанным уместно заметить, что хотя точное выражение для $\beta(g)$ зависит от калибровки и от определения бегущей константы связи, первые два слагаемых разложения $\beta(g)$ в ряд по степеням g от этих деталей не зависят. Предположим, что имеются два различных определения бегущей константы взаимодействия,

g_μ и $\tilde{g}_\mu$, связанные, возможно, с различными определениями перенормировочного масштаба μ или с неодинаковым выбором калибровки. Поскольку g_μ и $\tilde{g}_\mu$ безразмерны и не зависят от параметра обрезания, при $\mu \gg m$ константа связи $\tilde{g}_\mu$ может зависеть лишь от g_μ :

$$\tilde{g}_\mu = \tilde{g}(g_\mu).$$

Следовательно, имеем

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}_\mu) \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}_\mu = \frac{d\tilde{g}(g_\mu)}{dg_\mu} \beta(g_\mu),$$

и потому

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}) = \frac{d\tilde{g}(g)}{dg} \beta(g). \quad (18.3.29)$$

Пока мы придерживаемся одного фиксированного определения перенормированной константы взаимодействия, все перенормированные константы связи должны совпадать в главном порядке. Поэтому разложение $\tilde{g}$ в ряд по степеням g должно иметь вид

$$\tilde{g}(g) = g + ag^2 + O(g^3),$$

или, эквивалентно,

$$g = \tilde{g} - a\tilde{g}^2 + O(\tilde{g}^3).$$

Для производной получаем

$$\frac{d\tilde{g}}{dg} = 1 + 2ag + O(g^2) = 1 + 2a\tilde{g} + O(\tilde{g}^2).$$

Далее, для рассматривавшихся нами констант связи (в том числе для $g = e^2$) разложение $\beta(g)$ в ряд имело вид

$$\beta(g) = bg^2 + b'g^3 + O(g^4),$$

что после выражения через $\tilde{g}$ переходит в

$$\beta(\tilde{g}) = b\tilde{g}^2 + (b' - 2ab)\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4).$$

Из формулы (18.3.29) следует тогда, что

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\tilde{g}) &= [1 + 2a\tilde{g} + O(\tilde{g}^2)][b\tilde{g}^2 + (b' - 2ab)\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4)] = \\ &= b\tilde{g}^2 + b'\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4). \end{aligned} \quad (18.3.30)$$

Мы видим, что первые два члена в разложении $\tilde{\beta}$ в ряд по степеням $\tilde{g}$ имеют те же коэффициенты, что и первые два члена разложения β в ряд по степеням g . Однако в высших порядках подобные равенства не имеют места. Фактически всегда можно выбрать функцию $\tilde{g}(g)$ так, чтобы все слагаемые в разложении $\tilde{\beta}(\tilde{g})$, имеющие порядок выше третьего, обратились в нуль; поэтому асимптотическое поведение $\tilde{g}_E$ при $E \rightarrow \infty$ можно описать, зная лишь первые два члена ряда теории возмущений для $\beta(g)$. Однако практическая ценность

этого наблюдения невелика, поскольку для определения зависимости g от $\tilde{g}$ нужно провести вычисления во всех порядках теории возмущений, а без знания этой зависимости мы не сможем воспользоваться знанием асимптотического поведения $\tilde{g}$ для получения информации об асимптотическом поведении g или каких-либо физических величин.

Рассуждения, аналогичные использованным при выводе (18.3.30), показывают, что *при малых константах связи* уравнения ренормгруппы Вильсона для голой константы взаимодействия как функции шага решетки в случае, когда обратная постоянная решетки превосходит массы частиц, совпадает с уравнением ренормгруппы Гелл-Манна и Лоу для перенормированной константы взаимодействия как функции перенормировочного масштаба (для масштабов, больших масс частиц). Поэтому для асимптотически свободных теорий при переходе от решеточной теории к непрерывному пределу никаких трудностей не возникает.

§ 18.4. Случай нескольких констант связи и массовые эффекты

До сих пор мы рассматривали лишь теории с единственной безразмерной константой взаимодействия g . Нетрудно обобщить развитый формализм на случай нескольких констант связи g^l : каждой из них будет соответствовать свое уравнение ренормгруппы, которое в пределе $\mu \gg t$ будет иметь вид

$$\mu \frac{d}{d\mu} g^l(\mu) = \beta^l(g(\mu)), \quad (18.4.1)$$

где, вообще говоря, каждая из функций β^l зависит от всех констант связи $g^l(\mu)$. В этом случае существует намного больше различных сценариев асимптотического поведения величин $g^l(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$. Возможны траектории в g -пространстве, уходящие в бесконечность при некоторых конечных или бесконечных значениях μ , траектории, притягиваемые неподвижными точками и даже приближающиеся к некоторым замкнутым кривым (предельным циклам). Рассмотрим, например, возможное поведение $g^l(\mu)$ в окрестности неподвижной точки.

Уравнение (18.4.1) имеет стационарное решение $g^l(\mu) = g_*^l$, если

$$\beta^l(g_*) = 0. \quad (18.4.2)$$

В окрестности этой точки система (18.4.1) принимает вид

$$\mu \frac{d}{d\mu} [g^l(\mu) - g_*^l] = \sum_k M_k^l [g^k(\mu) - g_*^k], \quad (18.4.3)$$

где M — матрица

$$M_k^l \equiv \left[\frac{\partial \beta^l(g)}{\partial g^k} \right]_{g=g_*}. \quad (18.4.4)$$

Решение уравнений ренормгруппы может быть разложено по собственным векторам этой матрицы,

$$g^l(\mu) = g_*^l + \sum_m c_m V_m^l \mu^{\lambda_m}, \quad (18.4.5)$$

где мы ввели обозначение V_m для (произвольным образом нормированного) собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_m ,

$$\sum_k M_k^l V_m^k = \lambda_m V_m^l, \quad (18.4.6)$$

а c_m — некоторые коэффициенты разложения¹⁾. (В этом параграфе мы временно отказываемся от соглашения о суммировании по повторяющимся индексам.)

Из формулы (18.4.5) следует, что константы взаимодействия стремятся к своим предельным значениям g_*^l при $\mu \rightarrow \infty$ в случае, когда $c_m = 0$ для всех собственных векторов с $\lambda_m > 0$. (Для простоты мы предполагаем, что нулевых собственных значений нет.) Следовательно, в общем случае траектории, притягиваемые неподвижной точкой, образуют N_- -мерную поверхность в пространстве констант связи, где N_- — число отрицательных собственных значений M ; собственные векторы, соответствующие отрицательным собственным значениям, являются касательными к этой поверхности в точке g_* . Траектории, не лежащие на такой поверхности, могут подходить близко к неподвижной точке, но в конце концов уходят от нее, в основном в направлении собственных векторов с наибольшими по величине положительными собственными значениями. Разумеется, если все собственные значения отрицательны, то существует конечная окрестность неподвижной точки, внутри которой все траектории притягиваются к g_* .

Поскольку собственные значения λ_m играют важную роль в определении асимптотического поведения траекторий вблизи неподвиж-

¹⁾ Мы предполагаем, что собственные векторы V_m образуют полный набор. Это предположение не всегда верно, но оно справедливо в случае общего положения: собственные векторы конечномерной матрицы M с необходимостью образуют полную систему, если все корни характеристического уравнения

$$\text{Det}(M - \lambda I) = 0$$

попарно различны. Матрица, собственные векторы которой не образуют полного набора, может рассматриваться как предельный случай диагонализуемой матрицы, собственные значения которой вырождаются.

ной точки, стоит отметить, что они фактически не зависят от определения констант взаимодействия. Предположим, что мы ввели новый набор констант связи $\tilde{g}^l$, выражаемых некоторым образом через g^l . Соответствующие уравнения ренормгруппы будут иметь вид

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}^l(\mu) = \sum_m \left. \frac{\partial \tilde{g}^l(g)}{\partial g^m} \right|_{g=g(\mu)} \beta^m(g(\mu)) \equiv \tilde{\beta}^l(\tilde{g}(\mu)),$$

так что

$$\tilde{\beta}^l(\tilde{g}) = \sum_m \frac{\partial \tilde{g}^l(g)}{\partial g^m} \beta^m(g). \quad (18.4.7)$$

Иными словами, β преобразуется как контравариантный вектор в пространстве констант связи. После дифференцирования получаем

$$\sum_m \frac{\partial \tilde{\beta}^l(\tilde{g})}{\partial \tilde{g}^m} \frac{\partial \tilde{g}^m}{\partial g^k} = \sum_m \frac{\partial^2 \tilde{g}^l}{\partial g^m \partial g^k} \beta^m(g) + \sum_m \frac{\partial \tilde{g}^l}{\partial g^m} \frac{\partial \beta^m(g)}{\partial g^k}.$$

В неподвижной точке g_* первое слагаемое в правой части обращается в нуль, и мы приходим к матричному уравнению

$$\widetilde{M}S = SM, \quad (18.4.8)$$

где

$$\widetilde{M}_k^l \equiv \left[\frac{\partial \tilde{\beta}^l}{\partial \tilde{g}^k} \right]_{\tilde{g}=\tilde{g}(g_*)}, \quad (18.4.9)$$

$$S_k^l \equiv \left[\frac{\partial \tilde{g}^l}{\partial \tilde{g}^k} \right]_{g=g_*}. \quad (18.4.10)$$

Если преобразование $g \rightarrow \tilde{g}$ несингулярно, формула (18.4.8) задает преобразование подобия, а потому спектры матриц M и $\widetilde{M}$ совпадают.

Формализм метода ренормгруппы можно распространить и на неперенормируемые теории. Как было отмечено в § 12.3, расходимости в неперенормируемых теориях могут быть устранены за счет подходящей перенормировки констант связи и масс аналогично случаю перенормируемой теории; единственное отличие состоит в том, что в неперенормируемом случае лагранжиан должен содержать все взаимодействия, совместимые с симметриями теории. Если g_B^l — неперенормированная константа связи, являющаяся коэффициентом при операторе размерности D_l в лагранжиане (т. е. при произведении полей и их пространственно-временных градиентов с суммарной массовой размерностью D_l), то размерность g_B^l равна

$$\Delta_l = 4 - D_l.$$

Мы можем выразить голые константы взаимодействий через *безразмерные* перенормированные константы взаимодействия $g^l(\mu)$ и пара-

метр обрезания Λ по формулам вида

$$g^l_B \equiv \mu^{\Delta_l} \left[g^l(\mu) + \sum_{k,m} b^l_{km} g^k(\mu) g^m(\mu) \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + O(g(\mu)^3) \right], \quad (18.4.11)$$

где безразмерные числовые коэффициенты b^l_{km} и аналогичные коэффициенты в членах высших порядков выбираются так, чтобы исключить зависимость физических величин от параметра обрезания. (В некоторых теориях ведущее слагаемое может оказаться трилинейным или даже имеющим более высокий порядок по константам связи; необходимые в этих случаях изменения очевидны.) Из условия независимости g_B от Λ следует уравнение ренормгруппы (18.4.1) с

$$\beta^l(g) = -\Delta_l g^l - \sum_{k,m} b^l_{km} g^k g^m + O(g^3). \quad (18.4.12)$$

Для неперенормируемых взаимодействий $D_l > 4$, т. е. $\Delta_l < 0$. Поэтому для достаточно малых значений $g^l(\mu)$ ожидается, что константы неперенормируемых взаимодействий имеют положительные бета-функции и потому растут с увеличением μ ; неизвестно, однако, что происходит, когда они становятся настолько большими, что теория возмущений становится неприменимой.

Как мы увидим в следующем параграфе, даже в теориях с бесконечным числом независимых параметров обычно имеются неподвижные точки g_* , в которых число N_- отрицательных собственных значений матрицы (18.4.6) *конечно*, как и в отсутствие взаимодействий. (Часто $N_- = 1$.) Если $N_- \neq 0$, то неподвижная точка лежит на N_- -мерной критической поверхности, состоящей из траекторий, притягиваемых ею при $\mu \rightarrow \infty$. Неперенормируемая теория с константами связи, лежащими на такой поверхности, хотя и не превращается асимптотически в свободную теорию, может быть названа асимптотически *безопасной* [5], поскольку перенормированные константы взаимодействий в ней остаются конечными при $\mu \rightarrow \infty$. Условие асимптотической безопасности в такой теории аналогично принципу перенормируемости в том смысле, что оно оставляет в теории лишь конечное число независимых параметров — набор координат на критической поверхности.

В перенормируемой теории все физические величины становятся не зависящими от параметра обрезания Λ в результате подстройки зависимости от Λ *конечного* числа голых констант взаимодействий. Эти голые константы связи можно выразить через равное количество не зависящих от μ перенормированных констант связи, и условия независимости голых констант связи от μ примут вид уравнений ренормгруппы, связывающих между собой лишь перенормированные константы взаимодействий. В более общем контексте, допускающем и неперенормируемые теории, перенормируемая теория соответствует просто конечномерной *инвариантной поверхности* в бесконечномер-

ном пространстве констант связи, т. е. поверхности, в каждой точке которой вектор $\beta^l(g)$ касателен к ней.

До сих пор в этом параграфе мы неявно предполагали, что $\mu \gg m$, так что зависимостью β^l от m/μ можно было пренебречь. В этом, однако, нет необходимости; при желании массу можно рассматривать как дополнительную константу связи [6]. А именно, все перенормируемые константы взаимодействий можно определить, как и ранее, через различные функции Грина, соответствующие не лежащим на массовых оболочках импульсам порядка μ , но вычисленные на этот раз при нулевых значениях голых масс. Безразмерные перенормированные массовые параметры для дираковских полей ψ и скалярных полей ϕ можно определить согласно

$$m_\psi(\mu) \equiv N^{(\bar{\psi}\psi)}(\Lambda/\mu)^{-1} m_{\psi, \text{затрав}}(\Lambda)/\mu, \quad (18.4.13)$$

$$m_\phi^2(\mu) \equiv N^{(\phi^2)}(\Lambda/\mu)^{-1} m_{\phi, \text{затрав}}^2(\Lambda)/\mu^2, \quad (18.4.14)$$

где $N^{(\mathcal{O})}(\Lambda/\mu)$ — безразмерные постоянные, такие что после умножения на них операторов $\mathcal{O}$ все расходимости в матричных элементах $\mathcal{O}$, вычисляемых при нулевых значениях голых масс, уничтожаются. (См. § 18.1.) Новые перенормированные массы и константы связи не имеют непосредственного физического смысла, но они однозначно определяют истинные физические массы и амплитуды. Последние представляют собой суммы матричных элементов для нулевой голой массы с произвольным числом вставок перенормированных массовых операторов $N^{(\phi^2)}\phi^2$ и $N^{(\bar{\psi}\psi)}\bar{\psi}\psi$, умноженных на соответствующие перенормированные массовые параметры.

В такой схеме перенормировок бета-функции, очевидно, не зависят от массы. При этом бета-функции для массовых параметров пропорциональны им с коэффициентами, зависящими от всей совокупности констант связи; из (18.2.25) получаем

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_\psi(\mu) = [-1 - \gamma_{\bar{\psi}\psi}(g_\mu)] m_\psi(\mu), \quad (18.4.15)$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_\phi^2(\mu) = [-2 - \gamma_{\phi^2}(g_\mu)] m_\phi^2(\mu). \quad (18.4.16)$$

Например, в § 18.2 мы нашли, что в теории скалярного поля с лагранжианом (18.1.2) массовый оператор ϕ^2 имеет при $m = 0$ аномальную размерность (18.2.29), так что

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_\phi^2(\mu) = \left[-2 + \frac{g_\mu}{16\pi^2} + O(g_\mu^2) \right] m_\phi^2(\mu). \quad (18.4.17)$$

Далее, из (11.4.3) следует, что поправки высших порядков к пропагатору электрона приводят к эффективной замене массы электрона на

$$m_e - \sum^* (p, m_e),$$

поэтому в результате радиационных поправок матричный элемент оператора $\bar{\psi}_e \psi_e$ для перехода между двумя состояниями с 4-импульсом p^μ умножается на

$$F(p) = 1 - \left(\frac{\partial \Sigma^*(p, m_e)}{\partial m_e} \right)_{m_e=0}.$$

Перенормировочная постоянная $N^{\bar{\psi}\psi}$ оператора $\bar{\psi}\psi$, следовательно, равна величине $F^{-1}(p)$, взятой в некоторой перенормировочной точке (например, при $p^2 = \mu^2$). Из (11.4.8) в однопетлевом приближении получаем

$$\begin{aligned} N^{(\bar{\psi}\psi)} &= 1 + \left(\frac{\partial \Sigma_{1 \text{ loop}}^*(p, m_e)}{\partial m_e} \right)_{m_e=0, p^2=\mu^2} = \\ &= 1 - \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \ln \left[1 + \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) (1-x) \right] \rightarrow 1 - \frac{e^2}{4\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (18.4.18)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания²⁾, и нас интересует предел $\Lambda \gg \mu$. Из (18.2.25) для аномальной размерности оператора $\bar{\psi}_e \psi_e$ следует выражение

$$\gamma^{(\bar{\psi}\psi)} = \mu \frac{d}{d\mu} \ln N^{(\bar{\psi}\psi)} = \frac{e_\mu^2}{2\pi^2} + O(e_\mu^4), \quad (18.4.19)$$

и уравнение (18.4.15) принимает вид

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_e(\mu) = \left[-1 - \frac{e_\mu^2}{2\pi^2} + O(e_\mu^4) \right] m_e(\mu). \quad (18.4.20)$$

Эта формула справедлива и для произвольной калибровочной теории с точностью до замены e^2 на $\sum_\alpha (t_\alpha)^2$ для рассматриваемого вида фермиона.

Важное различие между $m(\mu)$ и остальными перенормированными параметрами теории состоит в том, что голые массы обладают положительными размерностями, и поэтому для достаточно малых констант связи все величины $m(\mu)$ убывают. Сделанное нами ранее предположение о том, что в пределе $\mu \rightarrow \infty$ массами можно пренебречь, подтвердится, если $m(\mu)$ будет обращаться в нуль при $\mu \rightarrow \infty$. Пока что это было показано лишь для асимптотически свободных теорий, в которых все константы взаимодействий остаются конечными при $\mu \rightarrow \infty$; в остальных случаях такое предположение сохраняет статус естественной гипотезы.

²⁾ Эти обозначения отличаются от использованных в (11.4.8), где параметр ультрафиолетового обрезания обозначался μ .

§ 18.5. Критические явления¹⁾

В некоторых случаях нас может интересовать предел не очень больших, а очень малых энергий (волновых векторов). Рассуждения § 18.2 можно провести и в этом случае, рассматривая предел $\mu \rightarrow 0$ вместо $\mu \rightarrow \infty$. Этот предел устроен особенно просто в случае безмассовой теории (например, квантовой электродинамики с симметрией относительно кирального преобразования $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$, которая запрещает возникновение массы у электрона). В этом частном случае как для единственного перенормируемого взаимодействия $e A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$, так и для всех неперенормируемых взаимодействий имеем $\beta^l > 0$ при достаточно малых значениях констант связи, так что все траектории (по крайней мере, в некоторой окрестности начала координат) притягиваются точкой $g^l = 0$ при $\mu \rightarrow 0$.

Аналогичные аргументы применимы и к теории с очень малыми (но конечными) массами, если включить последние в число констант взаимодействия теории, как было описано в предыдущем параграфе. Для массы коэффициент Δ в формуле (18.4.12) всегда положителен, поэтому траектория не может попасть в точку $g = 0$; однако в случае малых масс она может подойти к ней достаточно близко.

Конечно же, даже если некоторые степени свободы, подобные электронным в приведенном выше примере, мы можем считать безмассовыми или имеющими очень малую массу, в реальном мире существуют степени свободы, которым соответствуют массы, не являющиеся малыми. Метод ренормгруппы следует тогда применять не к истинной теории, содержащей массивные степени свободы, а к эффективной теории поля, в которой явно присутствуют лишь безмассовые или почти безмассовые степени свободы, а остальные учтены за счет взаимодействий, соответствующих внутренним линиям тяжелых частиц. Подробнее об эффективных теориях поля мы будем говорить в гл. 19.

Предел малых волновых векторов особенно важен при изучении критических явлений, таких как длинноволновые корреляции вблизи точки фазового перехода второго рода (непрерывного фазового перехода, не сопровождающегося выделением или поглощением скрытой теплоты) в физике конденсированного состояния. Поскольку нам интересен предел $\mu \rightarrow 0$, важными оказываются собственные векторы матрицы (18.4.4) с $\lambda < 0$, которые называются *существенными* (*релевантными*). Собственные векторы, для которых $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$ называются соответственно *маргинальными* и *несущественными* (*иррелевантными*).

Предположим, что имеется нетривиальная неподвижная точка g_* , в которой находится ровно одно отрицательное собственное значе-

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

ние λ_0 , приближенно соответствующее, возможно, массовому оператору. Тогда множество траекторий $g^l(\mu)$, притягиваемых этой неподвижной точкой при $\mu \rightarrow 0$, образует критическую поверхность коразмерности единица, т. е. поверхность, задаваемую единственным условием на константы связи (т. е. при $g \rightarrow g_*$ секущая $g^l - g_*^l$ не имеет составляющей вдоль собственного вектора с отрицательным собственным значением). Фазовому переходу соответствует приближение к этой поверхности точки, изображающей реальные физические значения констант взаимодействия (на любом заданном масштабе). Поскольку критическая поверхность имеет коразмерность единица, фазового перехода можно добиться, изменяя лишь один внешний параметр, от которого зависят константы связи (например, давление или температуру). Так как очень много систем испытывают фазовые переходы подобного типа, неподвижные точки, для которых матрица (18.4.4) имеет единственное отрицательное собственное значение, являются в некотором смысле типичными — факт, который мы уже отмечали в предыдущем параграфе.

Пусть, для определенности, температура T приближается к критическому значению T_c . Естественно предположить, что коэффициент при растущем слагаемом в (18.4.5) становится пропорциональным $T - T_c$, поскольку нет оснований ожидать его сингулярности или более быстрого обращения в нуль при $T = T_c$. Поэтому при $\mu \rightarrow 0$ и затем $T \rightarrow T_c$ для констант связи имеем

$$g^l(\mu) \rightarrow (T - T_c)V_0^l \mu^{\lambda_0}, \quad (18.5.1)$$

где λ_0 — единственное отрицательное собственное значение в точке g_* , а V_0^l — соответствующий собственный вектор²⁾. В результате применения обычных ренормгрупповых аргументов к волновым векторам (а не к энергиям), получаем для N -точечной функции (N -й частной производной эффективного действия по полю ϕ , имеющему размерность [волновой вектор] $^{D_\phi}$) на малых характерных волновых векторах выражение вида³⁾

$$\Gamma_N(\kappa) \rightarrow \kappa^{d-N(D_\phi+\gamma_\phi(g_*))} F_N((T - T_c)\kappa^{\lambda_0}), \quad (18.5.2)$$

где $\gamma_\phi(g)$ — аномальная размерность, связанная с полем ϕ , а d — размерность пространства-времени, которая в классической статистической механике равна обычной размерности пространства. Удобно переписать последнее выражение в эквивалентной форме

$$\Gamma_N(\kappa) \rightarrow (T - T_c)^{-[d-N(D_\phi+\gamma_\phi(g_*))]/\lambda_0} G_N(\kappa(T - T_0)^{1/\lambda_0}). \quad (18.5.3)$$

²⁾ Остальные слагаемые в константах связи ведут себя как $(T - T_c)^0 \mu^{\lambda_1}$ с $\lambda_1 > 0$. Поэтому формула (18.5.1) справедлива, если $T - T_c$ обращается в нуль медленнее, чем $\mu^{\lambda_1 - \lambda_0}$.

³⁾ Функция Γ_N зависит также от безразмерных углов и отношений длин волновых векторов. Заметим, что Γ_N обладает “наивной” размерностью $d - ND_\phi$, поскольку величина $\delta^d(\sum \kappa)\Gamma$ должна быть безразмерной.

Мы видим, что корреляционная длина ξ (характерная длина, определяющая масштаб изменения фурье-образа Γ_N) увеличивается при приближении T к T_c по закону

$$\xi \propto (T - T_c)^{-\nu}, \quad (18.5.4)$$

где введено традиционное обозначение ν для “критического показателя”:

$$\nu = -1/\lambda_0. \quad (18.5.5)$$

(Последнее выражение следует из формулы (18.5.3).) Далее, эффективное действие в нулевом поле Γ_0 (в терминах статистической физики — свободная энергия) не должно зависеть от κ , так как ему соответствуют диаграммы без внешних линий. Таким образом, при $T \rightarrow T_c$ из (18.5.3) следует, что

$$\Gamma_0 - F_0 \propto (T - T_c)^{\nu d}, \quad (18.5.6)$$

где постоянная F_0 представляет собой эффективное действие на свободную энергию и определяется массивными степенями свободы, по которым было проведено интерпретирование. Таким образом, показатель ν определяет также поведение неаналитической по T части свободной энергии вблизи T_c .

В 1972 г. Вильсон и Фишер использовали разложение по степеням $d - 4$, для того чтобы показать, что поведение теории скалярного поля действительно соответствует приведенной выше картине, а также с целью вычисления ряда критических показателей (например, ν). Рассмотрим теорию с единственной “легкой” степенью свободы — скалярным полем ϕ , подобным полю намагниченности в ферромагнетике, обладающим симметрией относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$ (такая симметрия запрещает нечетные по ϕ взаимодействия). Помимо массового слагаемого $-g_2\phi^2/2$ плотность лагранжиана эффективной теории поля будет содержать также взаимодействия $-g_4\phi^4/4!$, $-g_6\phi^6/6!$ и т. д. Размерность поля ϕ , выраженная в степенях волнового вектора, равна $(d - 2)/2$ (поскольку величина $\int d^d x (\nabla\phi)^2$ должна быть безразмерной). Следовательно, размерности констант взаимодействия g_2, g_4, g_6 и т. д. в пространстве d измерений равны $+2, 4 - d, 6 - 2d$ и т. д. Для неподвижной точки при $d = 3$, соответствующей нулевым значениям констант связи, имеются два существенных взаимодействия: g_2 и g_4 , однако ситуация изменяется за счет влияния нетривиальных неподвижных точек. Рассмотрим поверхность в пространстве констант связи, на которой лишь g_2 и g_4 отличны от нуля, и будем считать константу g_4 малой⁴⁾. Из формулы (18.2.12) получаем, что $\beta(g_4) = 3g_4^2/16\pi^2 + O(g_4^3)$ при $d = 4$; согласно (18.4.12)

⁴⁾ Поскольку эти два взаимодействия исчерпывают все перенормируемые взаимодействия при $3 \leq d \leq 4$, для таких d рассматриваемая поверхность инвариантна. Отметим, что мы не относим к константам связи коэффициент при $(\nabla\phi)^2$, поскольку это взаимодействие является избыточным в смысле § 7.7.

в $d = 4 - \epsilon$ измерениях следует добавить слагаемое $-\epsilon g_4$, откуда

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_4(\mu) = -\epsilon g_4(\mu) + \frac{3g_4^2(\mu)}{16\pi^2} + O(g_4^3(\mu)). \quad (18.5.7)$$

Далее, уравнение (18.4.17) принимает вид

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_2(\mu) = \left[-2 + \frac{g_4(\mu)}{16\pi^2} + O(g_4(\mu)) \right] g_2(\mu). \quad (18.5.8)$$

Поэтому для малых ϵ имеется нетривиальная неподвижная точка

$$g_{4*} = \frac{16\pi^2\epsilon}{3}, \quad g_{2*} = 0. \quad (18.5.9)$$

Матрица (18.4.4) в этой точке диагональна, а ее собственные значения равны

$$\lambda_4 = M_4^4 = -\epsilon + \frac{3g_{4*}}{8\pi^2} + O(g_{4*}^2) = +\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (18.5.10)$$

$$\lambda_2 = M_2^2 = -2 + \frac{g_{4*}}{16\pi^2} + O(g_{4*}^2) = -2 + \frac{\epsilon}{3} + O(\epsilon^2). \quad (18.5.11)$$

Из (18.5.10) видно, что взаимодействие с константой g_4 фактически оказывается несущественным, так что остается только одно существенное взаимодействие, т.е. имеем фазовый переход второго рода. Из (18.5.11) получаем для аномального показателя (18.5.5) выражение

$$\nu = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2). \quad (18.5.12)$$

Для физического случая $\epsilon = 1$ первые два члена дают $\nu = 0,58$. Трехпетлевые вычисления [8a] дают с точностью до ϵ^3

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + \frac{7\epsilon^2}{162} - 0,01904\epsilon^3, \quad (18.5.13)$$

что при $\epsilon = 1$ соответствует $\nu = 0,61$.

В приведенном выше вычислении об изучаемой системе не делалось никаких предположений, за исключением гипотезы о наличии фазового перехода второго рода, вблизи которого единственная длинноволновая степень свободы может быть описана скалярным полем. Существует большое число различных физических ситуаций, соответствующих этому описанию, например появление спонтанной намагниченности (которой здесь соответствует величина ϕ) в ферромагнитных и антиферромагнитных материалах, фазовые переходы жидкость–газ и переходы в бинарных смесях. Ожидается, что для всех этих систем показатель ν должен быть одинаков. Это предсказание подтверждается экспериментом [8], который дает $\nu = 0,63 \pm 0,04$ в хорошем согласии с трехпетлевым результатом (18.5.13) и даже с однопетлевым результатом (18.5.12). Очень удачно, что разложение по степеням 1 так хорошо работает, хотя причины этого до конца не ясны.

Про системы с идентичными наборами длинноволновых степеней свободы в окрестности точки фазового перехода второго рода говорят, что они принадлежат к одному классу универсальности. Системы

из одного класса универсальности должны обладать одинаковыми критическими показателями.

§ 18.6. Минимальное вычитание

В § 11.2 мы видели, что метод размерной регуляризации особенно удобен для вычисления радиационных поправок в квантовой электродинамике, поскольку при вычислениях в явном виде сохраняется калибровочная инвариантность. По той же причине размерная регуляризация дает для калибровочных теорий очень удобное альтернативное определение плавающего масштаба в методе ренормгруппы [9].

В рамках метода размерной регуляризации ультрафиолетовые расходимости возникают в виде полюсов физических амплитуд в точке $d = 4$. (См., например, формулу (11.2.13).) Чтобы устранить сингулярности, связанные с этими полюсами, голые константы взаимодействия $g_B^l(d)$, включая массы, должны сами иметь подобные полюсы, вычеты в которых определяются из условия регулярности физических амплитуд при $d \rightarrow 4$. Голые константы взаимодействия, вообще говоря, имеют ненулевые размерности $\Delta_l(d)$, зависящие от размерности пространства d , так что удобно рассматривать безразмерные величины $g_B^l(d)\mu^{-\Delta_l(d)}$, где μ — плавающий масштаб с размерностью энергии (массы). Так переопределенная голая константа связи может быть представлена в виде суммы сингулярных членов, пропорциональных положительным степеням ν величины $1/(d-4)$, коэффициенты b_ν при которых определяются из условия устранения особенностей в физических амплитудах при $d \rightarrow 4$, а также остаточного члена, аналитического по d при $d = 4$. Последний отождествляется с безразмерной перенормированной константой взаимодействия $g^l(\mu, d)$, так что

$$g_B^l(d)\mu^{-\Delta_l(d)} = g^l(\mu, d) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (d-4)^{-\nu} b_\nu^l(g(\mu, d)). \quad (18.6.1)$$

Мы вправе произвольно задавать зависимость голых констант взаимодействия от d при условии, что все сингулярности в физических амплитудах при $d = 4$ благополучно взаимно уничтожаются; избавиться от возникающей неоднозначности можно, потребовав аналитичности $g^l(\mu, d)$ не только при $d = 4$, но и при произвольном d .

Чтобы получить уравнение ренормгруппы для $g^l(\mu, d)$, продифференцируем сначала равенство (18.6.1) по μ . Получаем

$$\begin{aligned} -\Delta^l(d) \left[g^l + \sum_{\nu=1}^{\infty} (d-4)^{-\nu} b_\nu^l(g) \right] = \\ = \beta^l(g, d) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_m b_{\nu m}^l(g) \beta^m(g, d) (d-4)^{-\nu}, \end{aligned} \quad (18.6.2)$$

где

$$b_{\nu m}^l(g) \equiv \frac{\partial}{\partial g^m} b_{\nu}^l(g) \quad (18.6.3)$$

и, как и ранее,

$$\mu \frac{d}{d\mu} g^l(\mu, d) = \beta^l(g, (\mu, d), d). \quad (18.6.4)$$

Заметим, что β^l зависит от всех величин $g^m(\mu, d)$ и также от d , но она не может напрямую зависеть от μ . Действительно, после введения безразмерных констант взаимодействия и масс величина μ оказывается единственным размерным параметром теории.

Как мы видели выше, размерности $\Delta_l(d)$ всегда линейно зависят от d ; поэтому можно записать

$$\Delta_l(d) = \Delta_l + \rho_l(d - 4). \quad (18.6.5)$$

Перепишем левую часть формулы (18.6.2) в виде

$$-\rho_l g^l(d - 4) - [\Delta_l g^l + b_1^l(g) \rho^l] - \sum_{\nu=1}^{\infty} (d - 4)^{-\nu} [\rho_l b_{\nu+1}^l(g) + \Delta_l b_{\nu}^l(g)].$$

В аналитической части этого выражения максимальная степень d равна единице. Следовательно, то же верно и для правой части (18.6.2), и функция $\beta(g, d)$ должна быть линейной по d :

$$\beta^l(g, d) = \beta^l(g) + (d - 4)\alpha^l(g). \quad (18.6.6)$$

Приравнявая по отдельности коэффициенты при нулевом и первом порядках по d , получаем

$$\alpha^l(g) = -\rho_l g^l \quad (18.6.7)$$

и, что более важно,

$$\beta^l(g) = -\Delta_l g^l - b_1^l(g) \rho_l + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_m b_{1m}^l(g) \rho_m g^m. \quad (18.6.8)$$

Отметим, что бета-функция зависит только от вычетов голых констант взаимодействия в полюсах при $d = 4$. Фактически эти вычеты определяют также все коэффициенты при слагаемых с кратными полюсами: приравнявая коэффициенты при соответственных степенях в левой и правой частях (18.6.2), имеем рекуррентное соотношение

$$\rho_l b_{\nu+1}^l(g) - \sum_m \rho_m g^m b_{\nu+1m}^l(g) = -\Delta_l b_{\nu}^l(g) - \sum_m b_{\nu m}^l(g) \beta^m(g). \quad (18.6.9)$$

Например, для того чтобы величина $\int d^d x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ была безразмерной, калибровочное поле A^μ должно иметь массовую размерность $(d - 2)/2$. Поскольку размерности $g_B A^\mu$ и $\partial/\partial x^\mu$ совпадают, g_B должна иметь массовую размерность $(4 - d)/2$, и потому для константы калибровочного взаимодействия имеем $\Delta = 0$ и $\rho = -1/2$. Для калибровочной теории с единственной константой взаимодействия из (18.6.8) следует, что

$$\beta(g) = \frac{1}{2} [b_1(g) - g b_1'(g)]. \quad (18.6.10)$$

В частности, из формулы (11.2.20) видно, что в квантовой электродинамике в однопетлевом приближении голый электрический заряд имеет полюс при $d \rightarrow 4$:

$$e_B = Z_3^{-1/2} e \rightarrow e - \frac{e^3}{12\pi^2} \frac{1}{d-4}. \quad (18.6.11)$$

Подстановка $b_1(e) = -e^3/12\pi^2$ в (18.6.10) дает

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}, \quad (18.6.12)$$

в согласии с полученным ранее результатом (18.2.37).

Константы взаимодействий $g^l(\mu)$, введенные в этом параграфе, называются константами, определенными посредством *минимального вычитания*. Можно предложить несколько другую схему, которая оказывается несколько более удобной. Полюс $(d-4)^{-1}$ обычно возникает за счет функции $(4\pi)^{d/2-2}\Gamma(2-d/2)$ (см., например, формулу (11.2.13)), которая при $d \rightarrow 4$ имеет асимптотику

$$(4\pi)^{2-d/2}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{2-d/2} - \gamma + \ln 4\pi, \quad (18.6.13)$$

где γ — постоянная Эйлера, $\gamma = 0,5772157$. Удобно поэтому сделать всюду в (18.6.1) замену

$$\frac{1}{d-4} \rightarrow \frac{1}{d-4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln 4\pi. \quad (18.6.14)$$

Так определенные константы взаимодействия называются определенными посредством *модифицированного минимального вычитания*.

Характерным следствием определения констант взаимодействия по схеме минимального вычитания (или модифицированного минимального вычитания) является то, что ввиду отсутствия в формулах параметра ультрафиолетового обрезания, полюсы петлевых диаграмм при $d = 4$ всегда соответствуют именно логарифмическим ультрафиолетовым расходимостям, но не линейным, квадратичным и т.д. Поэтому слагаемое вида $g^a g^b g^c \dots$ может входить в вычет $b_1^l(g)$, только когда при $d = 4$ размерность g_B^l равна суммарной размерности констант связи g_B^a, g_B^b, g_B^c и т.д.:

$$\Delta_l = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c + \dots, \quad (18.6.15)$$

и согласно (18.6.8) то же должно быть верно и для $\beta^l(g)$. В частности, в теории без суперперенормируемых взаимодействий (например, в калибровочной теории с безмассовыми спинорами, не содержащей скалярных полей, такой как квантовая электродинамика в пределе нулевой массы электрона) для всех констант взаимодействия выполнено неравенство $\Delta_l \leq 0$, так что *уравнения ренормгруппы для констант перенормируемых взаимодействий (с $\Delta_l = 0$) не зависят от присутствия неперенормируемых взаимодействий* [5]. Далее, в та-

ких теориях бета-функции для констант неперенормируемых взаимодействий являются полиномами (конечной степени) от констант неперенормируемых взаимодействий, причем коэффициенты полиномов представляют собой бесконечные ряды по степеням констант перенормируемых взаимодействий. Например, в теории фотонов и безмассовых электронов (в предположении инвариантности относительно преобразований $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ и Р-четности) нет неперенормируемых взаимодействий размерности $+5$, но есть несколько взаимодействий размерности $+6$ (четырёхфермионное и чисто фотонное $F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}$), константы связи которых f_i имеют размерность -2 . Бета-функция для f_i должна иметь вид $\sum_j b_{ij}(e) f_j$, где коэффициенты $b_{ij}(e)$ являются степенными рядами по e .

§ 18.7. Квантовая хромодинамика

Квантовая хромодинамика — это современная теория сильных взаимодействий. Она представляет собой неабелеву калибровочную теорию, основанную на калибровочной группе $SU(3)$. Помимо калибровочных полей, в ней имеются поля частиц спина $1/2$, называемых кварками. Существуют шесть типов (“ароматов”) таких частиц: кварки u , s и t обладают зарядом $2e/3$, а кварки d , s и b — зарядом $-e/3$. Кварк каждого из ароматов может быть одного из трех цветов, что дает фундаментальное представление **3** калибровочной группы $SU(3)$ ¹). Барионы (например, протон и нейтрон) могут приближенно интерпретироваться как бесцветные связанные состояния трех кварков, полностью антисимметричные по цвету кварков; мезоны (например, ρ -мезон) можно приближенно рассматривать как бесцветные связанные состояния пары кварк-антикварк [11].

В пределе, когда массы кварков пренебрежимо малы по сравнению с характерными энергиями интересующих нас процессов, из (17.5.44) следует, что голая константа взаимодействия в калибровочной теории общего вида имеет в размерности $d \rightarrow 4$ полюс с вычетом, в соответствии с равенством:

$$g_B \rightarrow \left[\frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^5) \right] \frac{1}{d-4},$$

где C_1 и C_2 определены согласно (17.5.33) и (17.5.34). Поэтому в обо-

¹) Еще до появления окончательного варианта квантовой хромодинамики несколько авторов предсказывали существование трех разновидностей кварков каждого из ароматов [10]. Помимо объяснения сечений процессов распада вида $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ (см. § 22.1 и § 22.2), эта гипотеза решала также вопрос о том, как волновая функция образующих барион кварков (фермионов) может быть симметричной по спиновым, пространственным и соответствующим аромату координатам [11].

значениях предыдущего параграфа имеем

$$b_1(g) = \frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^5). \quad (18.7.1)$$

Подстановка этого результата в (18.6.10) приводит к

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^5). \quad (18.7.2)$$

Для $SU(3)$ -теории с n_f безмассовыми кварками в фундаментальном представлении **3** группы $SU(3)$ равенство (17.5.35) дает

$$C_1 = 3, \quad C_2 = n_f/2. \quad (18.7.3)$$

Прежде чем применить эти формулы к модели безмассовых кварков, отметим, что они справедливы только в эффективной теории поля, получаемой в результате интегрирования по всем кваркам с массой, превосходящей характерную энергию E интересующего нас процесса. Поэтому n_f представляет собой число кварковых ароматов, соответствующих массам, много меньшим E . С учетом этого из (18.7.2) и (18.7.3) получаем

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{1}{6} n_f \right) + O(g^5). \quad (18.7.4)$$

Мы видим, что теория является асимптотически свободной при условии, что имеется не более 16 ароматов с массами меньше характерного масштаба энергий. Поскольку, судя по всему, имеется всего 6 кварковых ароматов во всем интервале масс, основанная на калибровочной группе $SU(3)$ теория сильных взаимодействий обладает свойством асимптотической свободы.

Именно открытие в 1973 г. Гроссом и Вилчеком [12] и Политцером [13] явления асимптотической свободы в неабелевых калибровочных теориях подобного вида убедило теоретиков в том, что изложенная выше модель является правильной теорией сильных взаимодействий. Из их вычислений сразу же следовало объяснение загадочного результата проведенного в SLAC в 1968 г. эксперимента по глубоко неупругому рассеянию электронов на нуклонах, согласно результатам которого сильные взаимодействия становятся слабее при высоких энергиях²⁾.

²⁾ Зи [15] и, возможно, другие теоретики и ранее понимали, что этот экспериментальный результат можно объяснить в рамках теории, где бета-функция становится отрицательной при малых положительных значениях константы взаимодействия. Однако вычисления $\beta(g)$ во всех перенормируемых теориях, кроме неабелевых калибровочных теорий, давали $\beta(g) > 0$. С другой стороны, в 1972 г. 'т Хофт разработал технику для вычисления $\beta(g)$ в теориях Янга–Миллса и в июне 1972 г. на конференции по калибровочным теориям в Марселе [16] объявил о том, что $\beta(g) < 0$. Но он задержался с публикацией результата и выяснением его следствий, поскольку занялся другими задачами, так что его работа не привлекла особого внимания.

(Этот эксперимент будет обсуждаться далее в § 20.6.) Но историческое значение открытия асимптотической свободы в теориях Янга–Миллса не исчерпывается объяснением давнего экспериментального результата; оно впервые продемонстрировало возможность проведения надежных пертурбативных вычислений в теориях с сильными взаимодействиями, по крайней мере при высоких энергиях.

Вскоре выяснилось, что из наличия асимптотической свободы вытекает еще одно важное следствие. Вначале, после открытия асимптотической свободы, считали, что калибровочные бозоны в реалистичной янг-миллсовской теории сильных взаимодействий должны обладать очень большой массой, поскольку в противном случае такие сильно взаимодействующие бозоны были бы обнаружены ранее. По аналогии с теорией слабых и электромагнитных взаимодействий (изложенной в гл. 21), предполагали, что массы калибровочных бозонов возникают в результате спонтанного нарушения цветовой $SU(3)$ -симметрии, связанного с вакуумными средними скалярных полей в некотором нетривиальном представлении калибровочной группы. Но такие сильно взаимодействующие скаляры давали бы положительный вклад в $\beta(g)$, что могло бы привести к разрушению асимптотической свободы. Хуже того, в теории с сильно взаимодействующими скалярными полями радиационные поправки от слабых взаимодействий приводили бы к сильным нарушениям различных симметрий (например, сохранения аромата или инвариантности относительно зарядового сопряжения), которые, как мы увидим, в отсутствие скалярных полей остаются ненарушенными [17]. Впоследствии было предложено отказаться от сильно взаимодействующих скаляров и принять, что глюоны (калибровочные бозоны группы $SU(3)$) имеют нулевую массу [18]. Уменьшение константы сильных взаимодействий при высоких энергиях (малых расстояниях), очевидно, соответствует ее увеличению при малых энергиях (больших расстояниях); этот эффект рассматривался как возможная причина того, что безмассовые глюоны и кварки не были обнаружены. В соответствии с такой картиной только нейтральные по цвету частицы, такие как барионы и мезоны, могут существовать изолированно [19]. К сожалению, это утверждение до сих пор представляет собой лишь гипотезу, а не теорему, однако спустя двадцать лет осталось мало сомнений в его справедливости.

Хотя кварки и не могут существовать как свободные частицы, они в некотором смысле наблюдаемы в виде струй (джетов), возникающих при высокоэнергетичных соударениях. Например, в результате электрон-позитронной аннигиляции в конечном состоянии часто имеются две узко сколлимированные адронные струи, распределение которых по углу θ между импульсами сталкивающихся лептонов и направлению струи (в системе центра масс) имеет вид

$$1 + \sin^2 \theta,$$

в соответствии с древесным диаграммным результатом для аннигиляции электрон-позитронной пары в пару кварк-антикварк [20]. Этот эффект можно объяснить [21] в рамках общей теории инфракрасных расходимостей (см. § 13.4). При очень высоких энергиях сечение физического процесса дается низшим порядком теории возмущений при условии, что он “инфракрасно безопасен”, т.е. при стремлении всех масс к нулю не приводит к появлению инфракрасных расходимостей. Полное сечение электрон-позитронной аннигиляции в адроны инфракрасно безопасно, поскольку мы суммируем по всем адронным конечным состояниям. (Электромагнитными эффектами высших порядков мы пренебрегаем.) Поэтому мы можем доверять теории возмущений, согласно которой отношение сечения такого процесса к сечению процесса $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ равно

$$R = 3 \sum_q Q_q^2,$$

где суммирование ведется по всем кварковым ароматам, Q_q представляет собой соответствующий заряд в единицах e , а множитель 3 связан с наличием трех цветов. (Например, в широком диапазоне энергий от $m_b = 4,5$ ГэВ до $m_t = 180$ ГэВ имеем $R = 3(2/3)^2 + 3(-1/3)^2 = 11/3$.) С другой стороны, сечение аннигиляции электрон-позитронной пары в некоторое определенное состояние кварков и глюонов не является инфракрасно безопасным и потому вообще не может быть вычислено в рамках теории возмущений; фактически оно равно нулю. В промежутке между этими двумя предельными случаями лежит сечение электрон-позитронной аннигиляции для процесса, в конечном состоянии которого имеются определенное число струй, каждая из которых обладает определенным импульсом и зарядом, и некоторое количество нерегистрируемых не входящих в струи адронов с ограниченной суммарной энергией. Как отмечалось в § 13.4, такое сечение является инфракрасно безопасным. Поэтому при высоких энергиях оно может быть вычислено в рамках древесного приближения теории возмущений, если отождествить струи (в рассматриваемом порядке теории возмущений) с кварками, антикварками и глюонами в конечном состоянии. Мы можем даже найти сечение процесса с тремя струями в конечном состоянии, соответствующего древесной диаграмме, на которой с выходящей линии кварка или антикварка испускается глюон. Сравнив ответ с экспериментальным результатом, мы можем определить значение $\alpha_s(\mu)$ [22]. Однако мы не можем предсказать с помощью теории возмущений распределение частиц внутри струй по импульсам, поскольку соответствующие дифференциальные сечения не являются инфракрасно безопасными. Аналогичные соображения справедливы и для процессов образования струй при глубоко неупругом рассеянии лептонов на адронах, которые будут рассматриваться в § 20.6, однако в этом случае наличие адронов в начальном состоянии несколько усложняет картину.

Следуя схеме рассуждений § 12.5, получаем, что в отсутствие скалярных полей наиболее общий вид перенормируемого лагранжиана квантовой хромодинамики есть

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha}^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} - \sum_n \bar{\phi}_n [\not{\partial} - ig A_{\alpha} t_{\alpha} + m_n] \psi_n, \quad (18.7.5)$$

где A_{α}^{μ} — вектор-потенциал цветового калибровочного поля; $F_{\alpha}^{\mu\nu}$ — калибровочно-ковариантный тензор напряженности поля; g — константа сильного взаимодействия; t_{α} — полный набор соответствующих цвету генераторов $SU(3)$ в представлении **3** (т. е. бесследовых эрмитовых матриц 3×3 , строки и столбцы которых нумеруются цветами), нормированных согласно

$$\text{Tr}(t_{\alpha} t_{\beta}) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta};$$

индекс n пробегает все ароматы кварков. Аналогично случаю квантовой электродинамики (см. § 12.5), этот лагранжиан обладает рядом важных дополнительных симметрий: он сохраняет пространственную четность³⁾, четность относительно зарядового сопряжения и число кварков каждого из ароматов (минус число антикварков соответствующего аромата). В том числе имеет место и давно обнаруженное сохранение “странности”, т. е. числа s -кварков. Таким образом, квантовая хромодинамика с легкостью объяснила тот казавшийся таинственным факт, что сильные взаимодействия обладают симметриями, не присущими всем взаимодействиям. Ясно также, почему в рамках такой теории слабые взаимодействия не приводят к сильным нарушениям четности, зарядовой симметрии, сохранения странности и т. п. Поскольку все перенормируемые взаимодействия кварков и глюонов сохраняют эти симметрии, при энергиях много ниже масс m_W переносчиков слабых взаимодействий нарушения симметрий могут быть связаны лишь с неперенормируемыми членами в лагранжиане эффективной теории поля (например, $\bar{\psi}\psi\psi\psi$), которые подавлены отрицательными степенями большой массы m_W и константой слабого взаимодействия (см. § 12.3).

Разумеется, нельзя исключить возможности того, что кварки и глюоны участвуют в некоторых новых *сильных* взаимодействиях, возникающих на масштабе энергий Λ' , много большем характерной энергии Λ в квантовой хромодинамике. Например, как мы увидим в § 22.5, кварки могут оказаться связанными состояниями более фундаментальных фермионов, взаимодействующих с калибровочными полями; соответствующие асимптотически свободные теории могут

³⁾ Хотя это и не было выяснено до 1973 г., непертурбативные эффекты в квантовой хромодинамике могут приводить к нарушению четности (мы увидим это в § 23.6). Предлагались различные схемы, позволяющие избежать этого нарушения, но до сих пор неясно, какая из них правильна.

приводить к сильной связи (образованию кварков) при энергиях порядка Λ' . В этом случае эффективная плотность лагранжиана кварков для энергий $E \ll \Lambda'$ будет содержать неперенормируемые взаимодействия вида $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$, подавленные лишь степенями E/Λ' . Такие взаимодействия могут проявляться не только в слабых нарушениях симметрий типа четности и сохранения аромата в процессах при обычных энергиях, но и в количественных отклонениях [23] от предсказаний квантовой хромодинамики для энергий, приближающихся к Λ' .

Рассмотрим более подробно поведение константы взаимодействия в квантовой хромодинамике. В низшем порядке уравнение ренормгруппы (18.7.4) имеет вид [24]

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = -\frac{g^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{1}{6} n_f \right). \quad (18.7.6)$$

Решая его, получаем

$$\alpha_s(\mu) \equiv \frac{g^2(\mu)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln(\mu^2/\Lambda^2)}, \quad (18.7.7)$$

где Λ — постоянная интегрирования. Эта формула отражает характерное свойство теорий безмассовых (в случае кварков — почти безмассовых) частиц: в таких теориях одна из безразмерных констант взаимодействия в лагранжиане заменяется на свободный размерный параметр. Формула (18.7.7) не содержит свободных безразмерных параметров, но в нее входит один свободный параметр с размерностью массы (постоянная интегрирования Λ).

Подобные вычисления были проведены для диаграмм с числом петель не выше трех. Уравнение ренормгруппы с точностью до этого порядка имеет вид [24]

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = -\beta_0 \frac{g^3(\mu)}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g^5(\mu)}{128\pi^4} - \beta_2 \frac{g^7(\mu)}{8192\pi^6}, \quad (18.7.8)$$

где β_n — числовые коэффициенты:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f, \quad (18.7.9)$$

$$\beta_1 = 51 - \frac{19}{3} n_f, \quad (18.7.10)$$

$$\beta_2 = 2857 - \frac{5033}{9} n_f - \frac{325}{27} n_f^2. \quad (18.7.11)$$

Его решение дается формулой

$$\alpha_s(\mu) \equiv \frac{g^2(\mu)}{4\pi} = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \left[1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln[\ln(\mu^2/\Lambda^2)]}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} + \frac{4\beta_1^2}{\beta_0^4 \ln^2(\mu^2/\Lambda^2)} \left(\left(\ln[\ln(\mu^2/\Lambda^2)] - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{8\beta_2\beta_0}{\beta_1^2} - \frac{5}{4} \right) \right]. \quad (18.7.12)$$

Следует иметь в виду, что n_f в приведенных выше формулах представляет собой число ароматов, для которых массы кварков меньше характерных рассматриваемых энергий. Каждому из интервалов

между последовательными массами кварков соответствует своя величина n_f и свое значение постоянной интегрирования Λ , определяемое из условия непрерывности $g(\mu)$. В частности, эксперименты по глубоко неупругому рассеянию электронов, как правило, проводятся на энергиях, превосходящих массы кварков лишь четырех ароматов (u , d , s и c), так что в этом случае $n_f = 4$. С другой стороны, эксперименты на электрон-позитронных коллайдерах (например, PEP, PETRA, TRISTRAN и LEP) обычно проводятся на энергиях, значительно превосходящих массу пятого кварка (b), и следует использовать значение $n_f = 5$. Однако такие результаты можно связать с результатами в ситуации $n_f = 4$, потребовав согласованности решений уравнения ренормгруппы в точке, соответствующей массе b -кварка. Таким способом было найдено [25] (с использованием схемы минимального вычитания для определения β_2), что константа сильного взаимодействия, экстраполированная до $m_Z = 91,2$ ГэВ, равна $\alpha_s(m_Z) \equiv g_s^2/4\pi = 0,118 \pm 0,006$, т. е. $\Lambda = 250$ МэВ для энергий μ в интервале $m_b \ll \mu \ll m_t$, где $n_f = 5$. Более современные результаты [26] экспериментов по рождению адронов при электрон-позитронной аннигиляции в точке Z -резонанса позволили напрямую измерить $\alpha_s(m_Z) = 0,1200 \pm 0,0025$ с теоретической ошибкой $\pm 0,0078$, что соответствует $\Lambda = 253_{-96}^{+130}$ МэВ.

§ 18.8. Усовершенствованная теория возмущений¹⁾

Революционная статья Гелл-Манна и Лоу [1] в значительной степени была посвящена “усовершенствованию” теории возмущений, а именно использованию метода ренормгруппы и пертурбативных результатов некоторого порядка для получения информации о следующем порядке ряда теории возмущений. В качестве примера рассмотрим частный вопрос, который изучали Гелл-Манн и Лоу — поляризацию вакуума в квантовой электродинамике.

Перенормированный электрический заряд e_μ , соответствующий масштабу μ , выражается через голый заряд e_B по формуле (18.2.36):

$$e_\mu = N_\mu^{(A)-1} e_B, \quad (18.8.1)$$

где $N_\mu^{(A)}$ — постоянная, которая при умножении на неперенормированное электромагнитное поле дает величину перенормированного поля для масштаба μ (см. (18.2.21)). (Ниже мы будем опускать в формулах явную зависимость от параметра обрезания.) Определим перенормированный (и потому не зависящий от обрезания) полный фотонный пропагатор $\Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu)$ через полный пропагатор непере-

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

нормированного поля $\Delta'_{B\rho\sigma}(q, e_B)$ согласно

$$\Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu) = N_\mu^{(A)^2} \Delta'_{B\rho\sigma}(q, e_B). \quad (18.8.2)$$

При этом величина $e_\mu^2 \Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu)$ не зависит ни от μ (поскольку она равна $e_B^2 \Delta'_{B\rho\sigma}(q, e_B)$), ни от параметра обрезания (поскольку и e_μ , и $\Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu)$ являются перенормированными величинами). Из лоренц-инвариантности и размерного анализа следует, что эта функция имеет вид

$$e_\mu^2 \Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu) = \frac{\eta_{\rho\sigma} d(q^2/\mu^2, e_\mu)}{q^2} + q_\rho q_\sigma \text{ члены.} \quad (18.8.3)$$

Поскольку правая часть (18.8.3) не зависит от μ , мы можем положить

$$\mu = \sqrt{q^2} \equiv q,$$

что дает

$$d(q^2/\mu^2, e_\mu) = d(1, e_q). \quad (18.8.4)$$

Попытаемся извлечь из полученного какую-либо информацию о структуре ряда теории возмущений для $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$. Разложение бета-функции для e имеет вид

$$\beta(e) = b_1 e^3 + b_2 e^5 + b_3 e^7 + \dots \quad (18.8.5)$$

Решение уравнения ренормгруппы для e_μ можно тогда представить в виде ряда:

$$e_q^2 = e_\mu^2 - b_1 e_\mu^4 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - b_2 e_\mu^6 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - \\ - \left(\frac{b_1 b_2}{2} \ln^2 \frac{q^2}{\mu^2} + b_3 \ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) e_\mu^8 + \dots \quad (18.8.6)$$

Если величину d тоже разложить в ряд,

$$d(1, e) = e^2 + d_1 e^4 + d_2 e^6 + d_3 e^8 + \dots, \quad (18.8.7)$$

получим

$$d(q^2/\mu^2, e_\mu) = d(1, e_q) = e_\mu^2 - \left(b_1 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_1 \right) e_\mu^4 - \left(b_2 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_2 \right) e_\mu^6 - \\ - \left(\frac{1}{2} b_1 b_2 \ln^2 \frac{q^2}{\mu^2} + (b_3 - b_1 d_2) \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_3 \right) e_\mu^8 + \dots \quad (18.8.8)$$

Заметим, что ведущие степени $\ln(q^2/\mu^2)$ в последовательных порядках разложения $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ равны 0, 1, 1, 2, 3, ... Кроме того, если мы вычислим $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ до величин порядка e_μ^6 и, следовательно, определим постоянные b_1 и b_2 , то сразу сможем выписать коэффициент при ведущей степени логарифма в порядке e_μ^8 (он равен $-(1/2)b_1 b_2$). Получить эти результаты, не прибегая к методу ренормгруппы, было бы затруднительно.

Задачи

1. Рассмотрите калибровочную теорию поля с группой $SU(N)$, содержащую скалярное поле, преобразующееся согласно фундаментальному представлению $SU(N)$. Вычислите в однопетлевом приближении бета-функцию для константы калибровочного взаимодействия с учетом вклада скалярной петли. (Указание: используйте калибровку фонового поля и полагайте фоновое поле постоянным.)

2. Предположим, что бета-функция $\beta(g)$ в теории с положительной константой взаимодействия g имеет простой нуль при $g = g_*$, так что $\beta(g) \rightarrow a(g_* - g)$ с $a > 0$ при $g \rightarrow g_*$. Найдите асимптотическое поведение поправки к ведущему слагаемому $\propto E^{-\gamma^{\mathcal{O}}(g_*)}$ в множителе $N_E^{\mathcal{O}-1}$, связанной со вхождением оператора $\mathcal{O}$ в вакуумное среднее.

3. Покажите, что в теории с $\beta(g) = bg^2 + b'g^3 + b''g^4$ за счет переопределения константы взаимодействия можно сделать коэффициент b'' равным любому наперед заданному числу.

4. Найдите эффективный электрический заряд, соответствующий масштабам энергии порядка 100 ГэВ, учитывая вклад всех известных кварков и лептонов с массами меньше 100 ГэВ.

5. Найдите асимптотическое поведение пропагатора электрона в квантовой электродинамике при больших значениях 4-импульса. (Вы можете использовать известное однопетлевое выражение для Z_2 , приведенное, например, в § 11.4.)

6. Вычислите в первом порядке по $\epsilon = 4 - d$ аномальный критический показатель ν в $O(N)$ -инвариантной теории со скалярными полями $\phi_n(x)$, $n = 1, \dots, N$, принадлежащими векторному представлению $O(N)$, и взаимодействием $\frac{1}{4}g\left(\sum_n \phi_n^2\right)^2$.

Литература

1. *Gell-Mann M., Low F.E.* // *Phys. Rev.* **95**, 1300 (1954). Свобода в определении перенормированных констант взаимодействия обсуждалась несколько ранее в работе: *Stueckelberg E.C.G., Peterman A.* // *Helv. Phys. Acta* **26**, 499 (1953), в которой и был введен неудачный термин “ренормализационная группа”; однако авторы этой статьи не объяснили связь такой свободы с поведением физических процессов при очень больших или очень малых энергиях. После Гелл-Манна и Лоу метод ренормгруппы изучали Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков, см. их книгу: *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience, N.Y., 1959): гл. VIII и приведенные в ней ссылки. [Рус. пер.: *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантовых полей. — М.: Наука, 1984.]

- Интерес к ренормализационной группе в физике элементарных частиц вновь возрос в 1970 г. благодаря работам *Callan C.G.* // *Phys. Rev.* **D2**, 1541 (1970); *Symanzik K.* // *Commun. Math. Phys.* **18**, 227 (1970); *Callan C.G.*, *Coleman S.*, *Jackiw R.* // *Ann. of Phys.* (N.Y.), **59**, 42 (1970).
2. *Wilson K.G.* // *Phys. Rev.* **B4**, 3174, 3184 (1971); *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975).
 3. *Collins J.C.* // *Phys. Rev.* **D10**, 1213 (1974).
- 3а. *Jost R.*, *Luttinger J.M.* // *Helv. Phys. Acta* **23**, 201 (1950).
4. Это значение приведено в справочнике Particle Data Group 1994 г. Более новые результаты изложены в препринте *Altarelli G.*, preprint CERN-TH-95/203 и будут опубликованы в Proceedings of the Workshop on Physics at DAΦNE, April 1995. Согласно этим данным, значение $\alpha^{-1}(m_Z)$ лежит между 128,89 и 129,08.
- 4а. *Coleman S.*, *Weinberg E.* // *Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973).
 - 4б. *Landau L.D.*, в книге: Niels Bohr and the Development of Physics (Pergamon Press, N.Y., 1955). С. 52; см. также цитированные там ранние работы.
 - 4с. *Adler S.L.*, *Callan C.G.*, *Gross D.J.*, *Jackiw R.* // *Phys. Rev.* **D6**, 2982 (1972); *Baker M.*, *Johnson K.* // *Physica* **96A**, 120 (1979).
 - 4д. Обсуждение этого вопроса и полезные ссылки см. в работе: *Glimm J.*, *Jaffe A.* // *Quantum Physics — A Functional Integral Point of View*, Second edition (Springer-Verlag, N.Y., 1987): раздел 21.6; *Fernandez R.*, *Fröhlich J.*, *Sokal A.D.* // *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory* (Springer-Verlag, Berlin, 1992): гл. 15.
5. *Weinberg S.* General Relativity, eds. S.W. Hawking, W. Israel, (Cambridge University Press, Cambridge, 1979). С. 790.
 6. *Weinberg S.* // *Phys. Rev.* **D8**, 3497 (1973).
 7. Оригинальный вывод см.: *Wilson K.G.*, *Fischer M.E.* // *Phys. Rev. Lett.* **28**, 240 (1972); *Wilson K.G.* // *Phys. Rev. Lett.* **28**, 548 (1972). См. также обзоры *Wilson K.G.*, *Kogut J.* // *Phys. Rep.* **12C**, № 2 (1974); *Fischer M.E.* // *Rev. Mod. Phys.* **46**, 597 (1974); *Brézin E.*, *Le Guillou J.C.*, *Zinn-Justin J.*, в работе: Phase Transitions and Critical Phenomena, eds. C. Domb, M.S. Green (Academic Press, London, 1975).
 8. См., например, *Chaikin P.M.*, *Lubensky T.C.* // *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995). С. 231.
- 8а. *Brézin E.*, *Le Guillou J.C.*, *Zinn-Justin J.*, *Nickel B.G.* // *Phys. Lett.* **44a**, 227 (1973); *Wilson K.G.*, *Kogut J.*, ссылка 7, раздел 8.

9. 't Hooft G. // Nucl. Phys. **B61**, 455 (1973); Nucl. Phys. **B82**, 444 (1973). Приведенный нами вывод представляет собой несколько упрощенный вывод 'т Хофта.
10. Greenberg O.W. // Phys. Rev. Lett. **13**, 598 (1964); Han M.Y., Nambu Y. // Phys. Rev. **139**, B1006 (1965); Bardeen W.A., Fritzsche H., Gell-Mann M., в книге: Scale and Conformal Invariance in Hadron Physics, ed. R. Gatto (Wiley, N.Y., 1973).
11. Gell-Mann M. // Phys. Lett. **8**, 214 (1964); Zweig G., препринт CERN TH401 (1964).
12. Gross D.J., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
13. Politzer H.D. // Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
14. Bloom E.D. et al. // Phys. Rev. Lett. **23**, 1930 (1969); Breidenbach M. et al. // Phys. Rev. Lett. **23**, 933 (1969); Friedman J.L., Kendall H.W. // Annual Reviews of Nuclear Science **22**, 203 (1972).
15. Zee A., неопубликовано.
16. 't Hooft G., неопубликовано.
17. Weinberg S. // Phys. Rev. **D8**, 605 (1973).
18. Gross D.J., Wilczek F. // Phys. Rev. **D8**, 3633 (1973); Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. **31**, 494 (1973).
19. Аналогичная идея была изложена еще до открытия асимптотической свободы в работе Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H. // Phys. Lett. **47B**, 365 (1973).
20. Hanson G. et al. // Phys. Rev. Lett. **35**, 1609 (1975); Schwitters R.F., в работе: Proceedings of the International Conference on Lepton and Photon Interactions at High Energy at Stanford, 1975, ed. W.T. Kirk (Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, 1975). С. 5; G. Hanson, Stanford Linear Accelerator Center Report SLAC-PUB-1814 (1976), неопубликовано.
21. Serman G., Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. **39**, 1436 (1977).
22. Ellis J., Gaillard M.K., Ross G.G. // Nucl. Phys. **B111**, 253 (1976).
23. Eichten E., Lane K., Peskin M. // Phys. Rev. Lett. **50**, 811 (1983).
24. См. обзор Hinchliffe I. в работе: Review of Particle Properties // Phys. Rev. **D50**, 1177 (1994): раздел 25.
25. Altarelli G., в работе: Proceedings of the Rencontres de Hanoi, препринт CERN-PPE/94-71 (1994).
26. Abe K. et al. (SLD collaboration) // Phys. Rev. **D51**, 962 (1995). Подборка более старых результатов по распаду Z^0 на адроны (Shifman M., Minnesota preprint hep-th/9501222 (1995)) давала значение $\alpha_s(m_Z) = 0,125 \pm 0,005$, что соответствует $\Lambda \approx 500$ МэВ.

СПОНТАННО НАРУШЕННЫЕ ГЛОБАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ

Развитие физики 20-го века в значительной степени основывалось на принципах симметрии: сначала в 1905 г. Эйнштейн, воспользовавшись идеей пространственно-временной симметрии, построил специальную теорию относительности, затем в физике появились внутренние симметрии, такие как изоспиновая $SU(2)$ -симметрия, открытая в 1930-х годах. Вот почему представляется замечательным установленный в 1960-е годы факт существования большего числа внутренних симметрий, чем можно было бы предположить, изучая спектр элементарных частиц. Теория, лежащая в основе всех природных явлений, обладает точными или приближенными “спонтанно нарушенными” симметриями в том смысле, что они не могут реализоваться как преобразования симметрии физических состояний теории, в частности, вакуум не является инвариантным относительно таких преобразований. Большим достижением на пути изучения нарушенных симметрий стало предположение о существовании нарушенной глобальной $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии сильных взаимодействий, выполняющейся лишь приближенно (см. § 19.3). Вскоре после этого была открыта точная спонтанно нарушенная локальная $SU(2) \times U(1)$ -симметрия слабых и электромагнитных взаимодействий. Ее свойствам, а также нарушенным локальным симметриям более общего вида будет посвящена гл. 21. Настоящую же главу мы начнем с общего обсуждения свойств теорий с нарушенными глобальными симметриями, а затем перейдем к соответствующим физическим примерам.

§ 19.1. Вырожденные вакуумы

Нет надобности долго искать ситуацию в физике, демонстрирующую явление спонтанного нарушения симметрии: возьмем, к примеру, стул. Уравнения, управляющие его атомами, инвариантны относительно трехмерных вращений, однако решение этих уравнений — реально существующий стул — имеет определенную ориентацию в пространстве. Обычно мы будем сталкиваться не столько с нарушением симметрий теории объектами типа стула, сколько с нарушением симметрии основным состоянием квантовой теории поля, т. е. вакуумом.

Спонтанное нарушение симметрии теории поля всегда бывает связано с вырождением вакуумных состояний. Рассмотрим, например,

преобразование симметрии, оставляющее инвариантными действие и меру интегрирования по полям в функциональном интеграле. Пусть относительно этого преобразования скалярные поля $\phi_n(x)$ преобразуются линейно:

$$\phi_n(x) \rightarrow \phi'_n(x) = \sum_m L_{nm} \phi_m(x) \quad (19.1.1)$$

(поля ϕ_n необязательно являются элементарными; речь может идти и о составных объектах, например о $\bar{\psi}\Gamma_n\psi$). Как было показано в § 16.4, квантовое эффективное действие $\Gamma[\phi]$ обладает той же симметрией:

$$\Gamma[\phi] = \Gamma[L\phi]. \quad (19.1.2)$$

Поле $\phi(x)$, соответствующее вакууму теории, должно минимизировать энергию $-\Gamma[\phi]$. Пусть для определенности оно равно $\phi(x) = \bar{\phi}$ (постоянной величине). Однако если $L\bar{\phi} \neq \bar{\phi}$, такой вакуум не является единственным; $-\Gamma[\phi]$ имеет минимум и при $\phi = L\bar{\phi}$. Рассмотрим простейший случай, когда преобразование (19.1.1) является отражением: $\phi \rightarrow -\phi$. Если ненулевое значение $\bar{\phi}$ поля ϕ минимизирует функционал $-\Gamma[\phi]$, то он на самом деле имеет два минимума — в точках $\bar{\phi}$ и $-\bar{\phi}$, причем каждый из минимумов соответствует состоянию с нарушенной симметрией.

Пока рано делать вывод, что в таких случаях симметрия нарушается, поскольку может оказаться, что реальным вакуумом теории является инвариантная относительно данной симметрии линейная суперпозиция вакуумных состояний, характеризующихся разными значениями поля ϕ_m . В качестве примера опять рассмотрим теорию с симметрией $\phi \rightarrow -\phi$. Пусть $\Gamma[\phi]$ достигает минимума при ненулевом значении $\bar{\phi}$ поля ϕ . Может ли оказаться так, что реальным вакуумом является одно из состояний $|\text{ВАК}, \pm\rangle$, для которых ϕ принимает значения $\bar{\phi}$ и $-\bar{\phi}$, а не линейная комбинация вида $|\text{ВАК}, +\rangle + |\text{ВАК}, -\rangle$, инвариантная относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$? Предполагаемая симметрия приводит к тому, что вакуумные матричные элементы гамильтониана имеют вид

$$\langle \text{ВАК}, + | H | \text{ВАК}, + \rangle = \langle \text{ВАК}, - | H | \text{ВАК}, - \rangle \equiv a$$

(где a — вещественное число) и

$$\langle \text{ВАК}, + | H | \text{ВАК}, - \rangle = \langle \text{ВАК}, - | H | \text{ВАК}, + \rangle \equiv b$$

(где b — вещественное число), так что состояния $|\text{ВАК}, +\rangle \pm |\text{ВАК}, -\rangle$ являются собственными состояниями гамильтониана и им соответствуют энергии $a \pm |b|$. Эти состояния (по крайней мере, с точностью до знака) инвариантны относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$. Именно такая ситуация имеет место в примере со стулом. Квантовомеханическое основное состояние стула инвариантно относительно поворотов

в пространстве: соответствующее ему собственное значение оператора момента импульса равно нулю, поэтому данное состояние не выделяет определенной ориентации в пространстве.

Спонтанное нарушение симметрии может возникать только в идеализированных бесконечно больших системах. Нарушение симметрии относительно поворотов в пространстве в примере со стулом имеет место потому, что стул обладает макроскопическим моментом инерции I — его основное состояние принадлежит спектру состояний, энергии которых отличаются друг от друга на чрезвычайно малую величину порядка $\hbar^2/I$. Это означает, что вектор состояния стула весьма чувствителен к возмущениям: даже очень слабые внешние поля сдвигают энергию на величину, много большую, чем разность между энергиями этих вращательных возбуждений. Как следствие, любое несимметричное относительно вращений в пространстве внешнее поле приведет к тому, что всякое (в том числе и основное) состояние стула с определенными квантовыми числами момента импульса переходит в суперпозицию состояний, отвечающих разным квантовым числам. Стабильными по отношению к слабым внешним возмущениям являются не состояния с определенным моментом импульса, а состояния с определенной ориентацией, спонтанно нарушающие вращательную симметрию теории, лежащей в основе явления.

Что касается вакуума, то в этом случае вероятность спонтанного нарушения симметрии вновь связана с большим размером системы, в особенности с большим объемом пространства. В рассмотренном выше примере с симметрией отражения, недиагональный матричный элемент b гамильтониана содержит интегрирование по конфигурациям полей, соответствующих туннелированию из одного минимума $\phi = \bar{\phi}$ в другой, $\phi = -\bar{\phi}$, поэтому величина b меньше диагонального матричного элемента a на множитель, описывающий проникновение через барьер. Если теория погружена в пространство с объемом $\mathcal{V}$, этот множитель имеет вид $\exp(-C\mathcal{V})$, где C — положительная константа¹⁾, зависящая от микроскопических параметров теории. Два собственных состояния гамильтониана, $|\text{BAK}, +\rangle \pm |\text{BAK}, -\rangle$, таким образом, являются существенно вырожденными для любого макроскопического объема и, следовательно, сильно перемешиваются лю-

¹⁾ Например, по аналогии с задачей о туннелировании классической частицы через барьер, для плотности лагранжиана $-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$ получим

$$C = \int_{-\bar{\phi}}^{+\bar{\phi}} \sqrt{2V(\phi)} d\phi.$$

Мы не станем здесь вычислять недиагональный матричный элемент b , поскольку вскоре будет показано, что в случае бесконечного объема пространства он равен нулю.

бым возмущением, нечетным относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$. Даже если такое возмущение H' будет очень слабым, разность его диагональных элементов $\langle \text{BAK}, \pm | H' | \text{BAK}, \pm \rangle$ окажется гораздо больше, чем экспоненциально подавленные недиагональные матричные элементы гамильтониана H и возмущения. Таким образом, истинным вакуумным собственным состоянием возмущенного гамильтониана будет *не* одно из инвариантных состояний $|\text{BAK}, +\rangle \pm |\text{BAK}, -\rangle$, а состояние $|\text{BAK}, \pm\rangle$, нарушающее симметрию, поскольку именно такие состояния диагонализуют возмущенный гамильтониан. Какое из состояний $|\text{BAK}, \pm\rangle$ является истинным вакуумом в случае очень малых возмущений? Вообще говоря, это зависит от возмущения, но поскольку оба состояния связаны друг с другом преобразованием симметрии исходного гамильтониана, ответ на самом деле не имеет значения — если возмущение достаточно мало, никакой наблюдатель не сможет отличить одно состояние от другого.

Матричные элементы между вакуумными состояниями с разными значениями полей точно обращаются в нуль в пространстве с бесконечным объемом [1]. В этом случае вакуумное состояние $|v\rangle$ общего вида можно определить как состояние с нулевым импульсом

$$\mathbf{P}|v\rangle = 0, \quad (19.1.3)$$

и это собственное значение оператора импульса является *дискретным*. (Это условие позволяет исключить одночастичные и многочастичные состояния, для которых нулевое значение импульса принадлежит континууму значений импульса в пространстве бесконечного объема.) Вообще говоря, может быть несколько таких состояний. Обычно они образуют дискретный набор, и в дальнейшем мы будем обращаться с ними, как если бы это было именно так. Эти состояния можно выбрать ортонормированными:

$$\langle u|v\rangle = \delta_{uv}. \quad (19.1.4)$$

Любой матричный элемент произведения локальных эрмитовых операторов, взятых в один момент времени, можно представить в виде суммы:

$$\begin{aligned} \langle u|A(\mathbf{x})B(0)|v\rangle &= \sum_w \langle u|A(0)|w\rangle \langle w|B(0)|v\rangle + \\ &+ \int d^3p \sum_N \langle u|A(0)|N, \mathbf{p}\rangle \langle N, \mathbf{p}|B(0)|v\rangle e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (19.1.5)$$

где $|N, \mathbf{p}\rangle$ — набор ортонормированных состояний с определенным 3-импульсом $\mathbf{p}$, которые вместе с $|v\rangle$ образуют полный базис в физическом гильбертовом пространстве (здесь N может принимать как непрерывные, так и дискретные значения, кроме того, мы не указываем явно зависимость от времени). Предположим без доказательства, что поскольку $|N, \mathbf{p}\rangle$ относится к непрерывному спектру оператора

импульса $\mathbf{P}$, зависимость матричных элементов от $\mathbf{p}$ является достаточно гладкой (т. е. интегрируемой по Лебегу). В этом случае можно использовать теорему Римана–Лебега [2], и интеграл по $\mathbf{p}$ будет равен нулю при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. В этом пределе имеем

$$\langle u|A(\mathbf{x})B(0)|v\rangle \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sum_w \langle u|A(0)|w\rangle \langle w|B(0)|v\rangle. \quad (19.1.6)$$

Аналогично

$$\langle u|B(0)A(\mathbf{x})|v\rangle \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sum_w \langle u|B(0)|w\rangle \langle w|A(0)|v\rangle. \quad (19.1.7)$$

Однако в силу условия причинности одновременной коммутатор $[A(\mathbf{x}), B(0)]$ обращается в нуль, если $\mathbf{x} \neq 0$ (см. § 5.1). Поэтому матричные элементы (19.1.6) и (19.1.7) равны, и, таким образом, эрмитовы матрицы $\langle u|A(0)|v\rangle$, $\langle u|B(0)|v\rangle$ и т. п. должны коммутировать друг с другом. Следовательно, их можно одновременно привести к диагональному виду. Переходя, если необходимо, к базису, в котором обе матрицы диагональны, имеем тогда для любого эрмитового локального оператора $A(\mathbf{x})$ теории:

$$\langle u|A(0)|v\rangle = \delta_{uv}a_v, \quad (19.1.8)$$

где a_v — вещественное число, равное собственному значению оператора A в состоянии $|v\rangle$. Поэтому в случае бесконечного объема пространства матричные элементы между различными вакуумами $|v\rangle$ произвольного гамильтониана, построенного из локальных операторов, равны нулю. Если недиагональные члены гамильтониана отсутствуют, любые два состояния $|v\rangle$, связанные друг с другом действием оператора симметрии, являются вырожденными. Нарушающее симметрию возмущение, построенное из таких локальных операторов, является диагональным в том же базисе. Поэтому основным состоянием будет некоторое состояние из набора $|v\rangle$, а не линейная комбинация таких состояний.

Оказывается, что вакуумные состояния $|v\rangle$, устойчивые к малым зависящим от полей возмущениям, также являются вакуумными состояниями, для которых работает кластерное разложение (см. гл. 4). В самом деле это так, если для физического вакуумного состояния $|\text{BAK}\rangle$ имеет место соотношение

$$\langle \text{BAK}|A(\mathbf{x})B(0)|\text{BAK}\rangle \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \langle \text{BAK}|A(\mathbf{x})|\text{BAK}\rangle \langle \text{BAK}|B(0)|\text{BAK}\rangle. \quad (19.1.9)$$

Оно удовлетворяется, если в качестве вакуума $|\text{BAK}\rangle$ выбрать любое из состояний $|v\rangle$ базиса (19.1.8), и не удовлетворяется, если в качестве $|\text{BAK}\rangle$ мы возьмем линейную комбинацию нескольких $|v\rangle$.

§ 19.2. Голдстоуновские бозоны

Рассмотрим теперь ситуацию, когда спонтанно нарушена *непрерывная* симметрия. В этом случае справедлива теорема, согласно которой (за одним важным исключением, рассмотренным в гл. 21) спектр физических состояний включает частицы с нулевой массой и спином, причем их число совпадает с числом спонтанно нарушенных симметрий. Такие частицы, получившие название голдстоуновских бозонов (или бозонов Намбу–Голдстоуна) были впервые обнаружены при изучении некоторых специальных моделей Намбу и Голдстоуном [4]; два общих доказательства их существования были затем получены независимо Голдстоуном, Саламом и автором этой книги [5]. Здесь сначала будут предложены оба этих доказательства, а затем мы перейдем к рассмотрению свойств голдстоуновских бозонов.

Предположим, что действие теории и мера в функциональном интеграле являются инвариантными относительно некоторой непрерывной симметрии, под действием которой скалярные поля $\phi_n(x)$ (элементарные или составные) преобразуются следующим образом

$$\phi_n(x) \rightarrow \phi_n(x) + i\epsilon \sum_m t_{nm} \phi_m(x), \quad (19.2.1)$$

где it_{nm} — некоторая конечная действительная матрица. Как было показано в § 16.4, эффективное действие тоже оказывается инвариантным относительно этого преобразования:

$$\sum_{n,m} \int \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_n(x)} t_{nm} \phi_m(x) d^4x = 0. \quad (19.2.2)$$

Начиная с этого момента мы ограничимся случаем трансляционно-инвариантной теории с постоянными полями ϕ_n , для которой, как было показано в § 16.2, эффективное действие имеет вид

$$\Gamma[\phi] = -\mathcal{V}V(\phi), \quad (19.2.3)$$

где $\mathcal{V}$ — объем пространства–времени, а $V(\phi)$ — величина, известная как эффективный потенциал. Тогда уравнение (19.2.2) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{n,m} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_n} t_{nm} \phi_m = 0. \quad (19.2.4)$$

Из инвариантности относительно симметрии следует, что имеет место соотношение (его можно получить, дифференцируя уравнение (19.2.4) по ϕ_l)

$$\sum_n \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_n} t_{nl} + \sum_{n,m} \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_l} t_{nm} \phi_m = 0. \quad (19.2.5)$$

Рассмотрим случай, когда ϕ_n соответствует минимуму $V(\phi)$, т. е. совпадает с вакуумным средним $\bar{\phi}_n$. Поскольку производная $V(\phi)$ по ϕ в минимуме равна нулю, первый член в уравнении (19.2.5) обращается в нуль, и мы находим следующее выражение:

$$\sum_{n,m} \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_l} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} t_{nm} \bar{\phi}_m = 0. \quad (19.2.6)$$

Из результатов, полученных в § 16.1, следует, что вторая производная в уравнении (19.2.6) равна сумме всех связанных одночастично-неприводимых фейнмановских диаграмм в импульсном представлении, внешние линии которых несут индексы n и l и нулевой 4-импульс. Как показано в конце § 16.1, эта сумма связана с обратным пропагатором в импульсном пространстве следующим образом:

$$\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_l} = \Delta_{nl}^{-1}(0). \quad (19.2.7)$$

Тогда из уравнения (19.2.6) получаем, что

$$\sum_{nm} \Delta_{nl}^{-1}(0) t_{nm} \bar{\phi}_m = 0. \quad (19.2.8)$$

Таким образом, если при нарушении симметрии вектор $\sum_m t_{nm} \bar{\phi}_m$ не обращается в нуль, он является собственным вектором оператора $\Delta_{nl}^{-1}(0)$ с нулевым собственным значением. Существование такого собственного вектора означает, что точный пропагатор $\Delta_{nl}(q)$ имеет при $q^2 = 0$ полюс. При этом порядок этого полюса равен размерности пространства векторов $t\bar{\phi}$, где t — любые генераторы групп непрерывных симметрий, относительно которых инвариантна теория. Проще говоря, мы получаем по одному безмассовому бозону на каждую нарушенную симметрию.

Классическим примером, иллюстрирующим нарушение симметрии, является теория N действительных скалярных полей ϕ_n с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_n \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - \frac{\mathcal{M}^2}{2} \sum_n \phi_n \phi_n - \frac{g}{4} \left(\sum_n \phi_n \phi_n \right)^2. \quad (19.2.9)$$

Она инвариантна относительно группы $O(N)$ поворотов N -компонентного вектора ϕ_n . Когда поля являются постоянными, эффективный потенциал в древесном приближении равен не содержащей производных части плотности лагранжиана, взятой со знаком “−”:

$$V(\phi) \simeq -\frac{\mathcal{M}^2}{2} \sum_n \phi_n \phi_n - \frac{g}{4} \left(\sum_n \phi_n \phi_n \right)^2. \quad (19.2.10)$$

Как обычно, предположим, что константа g положительно определена (в противном случае минимум $V(\phi)$, если он существует, лежит в области, где теория возмущений неприменима). Если константа $\mathcal{M}^2$ также положительно определена, минимум $V(\phi)$ достигается в точке $\phi = 0$, и вакуум инвариантен относительно преобразований группы $O(N)$. С другой стороны, при $\mathcal{M}^2 < 0$ минимум достигается на множестве точек $\bar{\phi}_n$, заданном уравнением

$$\sum_n \bar{\phi}_n \bar{\phi}_n = -\frac{\mathcal{M}^2}{g}. \quad (19.2.11)$$

Массовая матрица в древесном приближении имеет вид

$$\begin{aligned} M_{nm}^2 &= \left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \right|_{\phi=\bar{\phi}} = \\ &= \mathcal{M}^2 \delta_{nm} + g \delta_{nm} \sum_l \bar{\phi}_l \bar{\phi}_l + 2g \bar{\phi}_n \bar{\phi}_m = 2g \bar{\phi}_n \bar{\phi}_m. \end{aligned} \quad (19.2.12)$$

У нее имеется единственный собственный вектор $\bar{\phi}_n$, которому соответствует ненулевое собственное значение

$$m^2 = 2g \sum_n \bar{\phi}_n \bar{\phi}_n = 2|\mathcal{M}^2| \quad (19.2.13)$$

и $N - 1$ собственных векторов с равным нулю собственным значением, нормальных к $\bar{\phi}$. Причина, по которой возникает только $N - 1$ голдстоуновских бозонов, состоит в том, что группа $O(N)$ нарушается до $O(N - 1)$ (подгруппы $O(N)$, оставляющей $\bar{\phi}$ инвариантным). Таким образом, число независимых нарушенных симметрий равно размерности группы $O(N)$ за вычетом размерности группы $O(N - 1)$:

$$\frac{1}{2} N(N - 1) - \frac{1}{2} (N - 1)(N - 2) = N - 1. \quad (19.2.14)$$

Существует другое доказательство существования голдстоуновских бозонов, при котором не используется формализм эффективного потенциала. Как было показано в гл. 7, любая непрерывная симметрия действия приводит к существованию сохраняющегося тока J^μ :

$$\frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0, \quad (19.2.15)$$

с зарядом Q , индуцирующим преобразование симметрии:

$$Q = \int d^3x J^0(\mathbf{x}, 0), \quad (19.2.16)$$

$$[Q, \phi_n(x)] = - \sum_m t_{nm} \phi_m(x). \quad (19.2.17)$$

Спонтанное нарушение симметрии не меняет структуры операторных соотношений, подобных (19.2.15)–(19.2.17), и это отражается на

свойствах физических состояний. Найдем вакуумное среднее коммутатора тока и поля. Суммируя по промежуточным состояниям, получаем

$$\langle [J^\lambda(y), \phi_n(x)] \rangle_{\text{BAK}} = (2\pi)^{-3} \int d^4p [\rho_n^\lambda(p) e^{ip \cdot (y-x)} - \tilde{\rho}_n^\lambda(p) e^{ip \cdot (x-y)}], \quad (19.2.18)$$

где (если воспользоваться трансляционной инвариантностью)

$$(2\pi)^{-3} i \rho_n^\lambda(p) = \sum_N \langle \text{BAK} | J^\lambda(0) | N \rangle \langle N | \phi_n(0) | \text{BAK} \rangle \delta^4(p - p_N), \quad (19.2.19)$$

$$(2\pi)^{-3} i \tilde{\rho}_n^\lambda(p) = \sum_N \langle \text{BAK} | \phi_n(0) | N \rangle \langle N | J^\lambda(0) | \text{BAK} \rangle \delta^4(p - p_N). \quad (19.2.20)$$

Обычно мы считаем, что J^λ и ϕ_n являются эрмитовыми операторами, и в этом случае выражения (19.2.19) и (19.2.20) оказываются комплексно-сопряженными друг к другу:

$$\rho_n^\lambda(p) = -\tilde{\rho}_n^{\lambda*}(p), \quad (19.2.21)$$

Здесь, однако, это предполагаться не будет.

Из инвариантности относительно преобразований Лоренца следует, что ρ и $\tilde{\rho}$ должны иметь следующий вид:

$$\rho_n^\lambda(p) = p^\lambda \rho_n(-p^2) \theta(p^0), \quad (19.2.22)$$

$$\tilde{\rho}_n^\lambda(p) = p^\lambda \tilde{\rho}_n(-p^2) \theta(p^0) \quad (19.2.23)$$

(появление множителя $\theta(p^0)$, совпадающего с +1 при $p^0 > 0$ и с нулем в противном случае, следует из того факта, что p_N является 4-импульсом физического состояния). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \langle [J^\lambda(y), \phi_n(x)] \rangle_{\text{BAK}} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int d\mu^2 [\rho_n(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2) + \tilde{\rho}_n(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2)], \end{aligned} \quad (19.2.24)$$

где Δ_+ — известная функция,

$$\Delta_+(z; \mu^2) = (2\pi)^{-3} \int d^4p \theta(p^0) \delta(p^2 + \mu^2) e^{ip \cdot z}. \quad (19.2.25)$$

Как было отмечено в гл. 5, из-за лоренцевой инвариантности $\Delta_+(z; \mu^2)$ зависит только от z^2 , μ^2 и $\theta(z^0)$, а при $z^2 > 0$ — только от z^2 и μ^2 . Следовательно, $\Delta_+(x-y; \mu^2)$ и $\Delta_+(y-x; \mu^2)$ равны, если интервал $x-y$ пространственно-подобен, и в этом случае

$$\langle [J^\lambda(y), \phi_n(x)] \rangle_{\text{BAK}} = \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int d\mu^2 [\rho_n(\mu^2) + \tilde{\rho}_n(\mu^2)] \Delta_+(y-x; \mu^2). \quad (19.2.26)$$

Однако для пространственно-подобного интервала $x - y$ все коммутаторы должны обращаться в нуль, вследствие чего имеет место соотношение

$$\rho_n(\mu^2) = -\tilde{\rho}_n(\mu^2). \quad (19.2.27)$$

Таким образом, из уравнения (19.2.24) при произвольных x и y имеем

$$\langle [J^\lambda(y), \phi_n(x)] \rangle_{\text{ВЭК}} = \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \int d\mu^2 \rho_n(\mu^2) [\Delta_+(y - x; \mu^2) - \Delta_+(x - y; \mu^2)]. \quad (19.2.28)$$

Здесь мы воспользовались уравнением (19.2.21); из уравнения (19.2.27) также следует, что величина $\rho_n(\mu^2)$ является *действительной*.

Используем теперь тот факт, что ток $J^\lambda(y)$ сохраняется. Взяв производную $\partial/\partial y^\lambda$ от обеих частей уравнения (19.2.28) и воспользовавшись известным соотношением

$$(\square_y - \mu^2)\Delta_+(y - x; \mu^2) = 0, \quad (19.2.29)$$

найдем, что при *произвольных* x и y

$$0 = \int d\mu^2 \mu^2 \rho_n(\mu^2) [\Delta_+(y - x; \mu^2) - \Delta_+(x - y; \mu^2)], \quad (19.2.30)$$

и, таким образом (поскольку $\Delta_+(x - y)$ не является четной функцией своего аргумента, если интервал $x - y$ времени- или светоподобен),

$$\mu^2 \rho_n(\mu^2) = 0. \quad (19.2.31)$$

Обычно отсюда следует, что $\rho_n(\mu^2)$ при любых μ^2 обращается в нуль. Однако это невозможно в случае, если симметрия нарушена. Положим $\lambda = 0$ и $x^0 = y^0 = t$ в уравнении (19.2.28):

$$\begin{aligned} \langle [J^\lambda(\mathbf{y}, t), \phi_n(\mathbf{x}, t)] \rangle_{\text{ВЭК}} &= \\ &= 2i(2\pi)^{-3} \int d\mu^2 \rho_n(\mu^2) \int d^4p \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mu^2} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})} \delta(p^2 + \mu^2) = \\ &= i\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \int d\mu^2 \rho_n(\mu^2). \end{aligned}$$

Интегрируя и используя уравнения (19.2.16) и (19.2.17), находим

$$-\sum_m t_{nm} \langle \phi_m \rangle_{\text{ВЭК}} = i \int d\mu^2 \rho_n(\mu^2). \quad (19.2.32)$$

Уравнения (19.2.31) и (19.2.32) могут удовлетворяться лишь в том случае, когда

$$\rho_n(\mu^2) = i\delta(\mu^2) \sum_m t_{nm} \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{ВЭК}} \quad (19.2.33)$$

(если поля ϕ_n эрмитовы, эта величина действительна, поскольку из уравнения (19.2.21) следует, что матрица t_{nm} является чисто мнимой).

Таким образом, если симметрия нарушена, величина $\rho_n(\mu^2)$ не может обращаться в нуль и оказывается пропорциональной $\delta(\mu^2)$. Как легко понять, это может иметь место, лишь если теория содержит безмассовые частицы, поскольку в противном случае спектр квадратов энергий в системе центра масс $-p_N^2$ был бы отделен щелью от нуля. Более того, дельта-функция $\delta(\mu^2)$ возникает лишь в том случае, когда имеются одночастичные состояния нулевой массы; многочастичные состояния вносят вклад в непрерывный спектр, не отделенный щелью от нулевой энергии $\mu^2 = 0$. Состояние $\phi_n(0)|\text{BAK}\rangle$ является инвариантным относительно вращений, поэтому матричный элемент $\langle N|\phi_n(0)|\text{BAK}\rangle$ для любого состояния N с ненулевой спиральностью должен обращаться в нуль. Кроме того, $\langle \text{BAK}|J^0|N\rangle$ обращается в нуль для любого состояния N , которое имеет внутреннюю четность или (ненарушенные) квантовые числа, отличные от J^0 . Таким образом, можно сделать вывод, что при нарушении симметрии с $t_{nm}\langle\phi_n(0)\rangle_{\text{BAK}} \neq 0$ в спектре теории появляются безмассовые частицы с нулевым спином, четность и внутренние квантовые числа которых совпадают с четностью и квантовыми числами J^0 . Эти частицы называются голдстоуновскими бозонами.

Вышеприведенное доказательство не работает в том случае, если спонтанно нарушена калибровочная, а не глобальная симметрия. В калибровочной теории мы выбираем либо лоренц-инвариантную калибровку (например, калибровку Ландау $\partial_\mu A^\mu = 0$), и в этом случае, как показано в § 15.7, нарушаются предположения квантовой механики, либо калибровку типа аксиальной ($A_3^\mu = 0$), и в этом случае предположения квантовой механики остаются справедливыми, но нарушается инвариантность относительно преобразований Лоренца. Как будет показано в гл. 21, эти ограничения не являются чисто техническими и в теориях со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией в самом деле нет голдстоуновских бозонов.

Полезно выяснить, каким образом коэффициент перед дельта-функцией в $\rho_n(\mu^2)$ связан со свойствами голдстоуновских бозонов. Для бозона B с нулевым спином и 4-импульсом p_B^μ из лоренц-инвариантности следует, что матричный элемент тока, взятый между вакуумным и одночастичным состояниями, должен иметь вид

$$\langle \text{BAK}|J^\lambda(x)|B\rangle = i \frac{F p_B^\lambda e^{ip_B \cdot x}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_B^0}}, \quad (19.2.34)$$

где $\mathbf{p}_B$ — импульс частицы B , $p_B^0 \equiv |\mathbf{p}_B|$, а F — некоторый постоянный коэффициент с размерностью энергии (это согласуется с сохранением тока, поскольку $p_{B\lambda} p_B^\lambda = 0$). Кроме того, матричный элемент скалярного поля $\phi_n(y)$, взятый между одночастичным и вакуумным состояниями, равен

$$\langle B|\phi_n(y)|\text{BAK}\rangle = \frac{Z_n e^{ip_B \cdot y}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_B^0}}, \quad (19.2.35)$$

где Z_n — некоторая безразмерная константа. Воспользовавшись уравнениями (19.2.34) и (19.2.35), получаем

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-3} i \rho_n(-p^2) p^\lambda \theta(p^0) &\equiv \\ &\equiv \int d^3 p_B \langle \text{BAK} | J^\lambda(0) | B \rangle \langle B | \phi_n(0) | \text{BAK} \rangle \delta^4(p - p_B) = \\ &= \delta(p^0 - |\mathbf{p}|) (2\pi)^{-3} (2p^0)^{-1} p^\lambda i F Z_n = \theta(p^0) \delta(-p^2) (2\pi)^{-3} p^\lambda i F Z_n \end{aligned}$$

и
$$\rho_n(\mu^2) = F Z_n \delta(\mu^2). \quad (19.2.36)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (19.2.33), находим, что

$$i F Z_n = - \sum_m t_{nm} \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{BAK}}. \quad (19.2.37)$$

Вообще говоря, в теории может быть несколько нарушенных симметрий с генераторами t_a и токами J_a^μ , которые независимы в том смысле, что любая линейная комбинация t_a снова соответствует нарушенной симметрии. Для каждой из них существует голдстоуновский бозон $|B_a\rangle$, и мы определяем Z_{an} и F_{ab} согласно выражениям

$$\langle \text{BAK} | J_a^\lambda(x) | B_b \rangle = i \frac{F_{ab} p_B^\lambda e^{i p_B \cdot x}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2 p_B^0}}, \quad (19.2.38)$$

и
$$\langle B_a | \phi_n(y) | \text{BAK} \rangle = \frac{Z_{an} e^{i p_B \cdot y}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2 p_B^0}}. \quad (19.2.39)$$

Уравнение (19.2.37) остается справедливым для любого a , поэтому

$$i \sum_b F_{ab} Z_{bn} = - \sum_m [t_a]_{nm} \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{BAK}}. \quad (19.2.40)$$

Например, в обсуждавшемся примере с $O(N)$ -симметрией базис можно выбрать так, что вакуумное среднее поля будет отлично от нуля лишь для одной компоненты поля:

$$\bar{\phi}_m \equiv \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{BAK}} = v \delta_{m1}. \quad (19.2.41)$$

$N - 1$ нарушенных генераторов симметрии t_a (где $a = 2, \dots, N$) соответствуют бесконечно малым поворотам в плоскости $1 - a$. При соответствующем выборе нормировки они будут иметь следующие матричные элементы:

$$[t_a]_{1a} = -[t_a]_{a1} = i \quad (19.2.42)$$

(здесь нет суммирования по a). Из существования ненарушенной $O(N - 1)$ -симметрии, под действием которой $N - 1$ голдстоуновских бозонов преобразуются как вектор, следует, что

$$F_{ab} = \delta_{ab} F, \quad Z_{a1} = 0, \quad Z_{ab} = Z \delta_{ab}. \quad (19.2.43)$$

Из уравнения (19.2.40) тогда получаем, что

$$F Z = v. \quad (19.2.44)$$

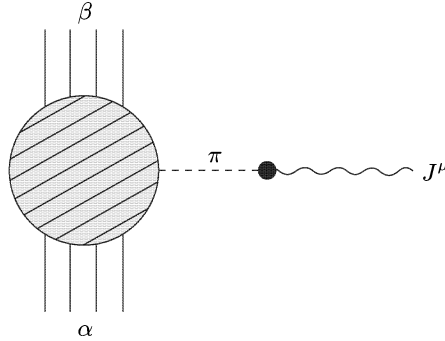


Рис. 19.1. Фейнмановские диаграммы для полюсного вклада в матричный элемент связанного с нарушенной симметрией тока $J^\mu(x)$ между состояниями α и β ; обозначенная буквой π внутренняя линия соответствует голдстоуновскому бозону

Принято выбирать перенормировку поля так, что $Z = 1$ и $F = v$. Таким образом, величина F является мерой того, насколько нарушена симметрия. Как мы сейчас увидим, параметр $1/F$ определяет силу взаимодействия голдстоуновских бозонов друг с другом и другими частицами.

Нарушение симметрии не просто накладывает требование равенства нулю массы голдстоуновских бозонов. Оказывается, что имеют место довольно сильные ограничения на их взаимодействия при низких энергиях. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим матричный элемент тока, связанного с нарушенной симметрией, взятый между состояниями α и β :

$$\langle \beta | J^\mu(x) | \alpha \rangle = e^{iq \cdot x} \langle \beta | J^\mu(0) | \alpha \rangle, \quad (19.2.45)$$

где

$$q^\mu \equiv p_\alpha^\mu - p_\beta^\mu. \quad (19.2.46)$$

Мы знаем, что матричный элемент тока $J^\mu(x)$ между вакуумом и одночастичным состоянием $|B, \mathbf{q}\rangle$, описывающим голдстоуновский бозон, не равен нулю (см. уравнение (19.2.34)). Как следует из обычных правил, описывающих полюсную структуру (см. гл. 10), матричный элемент (19.2.45) имеет при $q^2 \rightarrow 0$ полюс, причем¹⁾

$$\langle \beta | J^\mu(0) | \alpha \rangle \rightarrow \frac{iFq^\mu}{q^2} M_{\beta\alpha}, \quad (19.2.47)$$

¹⁾ В том случае, когда голдстоуновский бозон соответствует элементарному полю, уравнение можно вывести, рассматривая фейнмановские диаграммы, подобные изображенной на рис. 19.1. Множитель $i(2\pi)^4$ в элементе S -матрицы для $\alpha \rightarrow \beta + B$ сократится при этом с множителем $-i(2\pi)^{-4}$ в пропагаторе B . Из правил, описывающих полюсную структуру, следует, что то же самое верно, если голдстоуновский бозон представляет собой составную частицу.

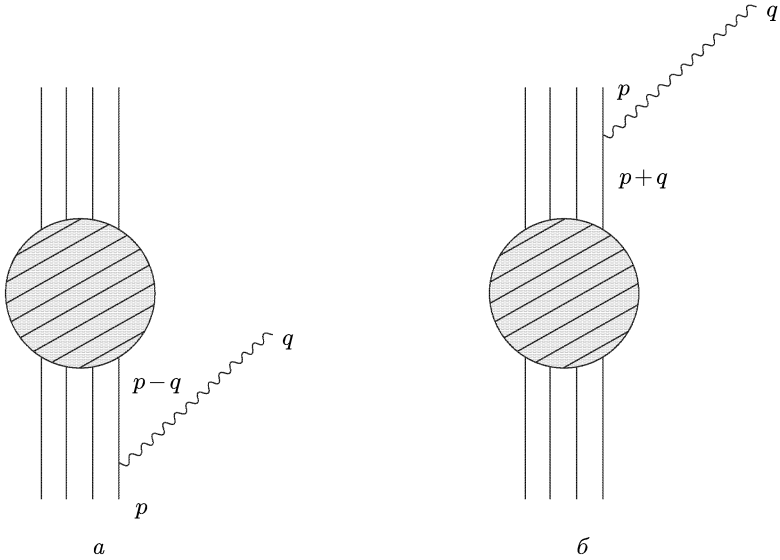


Рис. 19.2. Фейнмановские диаграммы для полюсных вкладов в матричный элемент тока $J^\mu(x)$ между состояниями α и β ; состояния, соответствующие внутренним линиям, находятся возле массовой оболочки. Жирные линии обозначают “жесткие” внешние частицы, волнистая линия обозначает вставку тока $J^\mu(x)$; заштрихованный диск представляет собой сумму всех диаграмм с соответствующими внешними линиями

где $i(2\pi)^4 \delta^4(p_\alpha - p_\beta - q) M_{\beta\alpha} / (2\pi)^{3/2} (2q^0)^{1/2}$ — элемент S -матрицы, соответствующий излучению при переходе $\alpha \rightarrow \beta$ голдстоуновского бозона с 4-импульсом q . Таким образом, можно записать следующее соотношение:

$$\langle \beta | J^\mu(0) | \alpha \rangle \equiv N_{\beta\alpha}^\mu + \frac{iFq^\mu}{q^2} M_{\beta\alpha}, \quad (19.2.48)$$

где $N_{\beta\alpha}^\mu$ определяется как сумма всех вкладов в матричный элемент тока, не имеющих особенностей типа полюса. Из уравнения (19.2.45) можно видеть, что поскольку имеет место закон сохранения $\partial_\mu J^\mu = 0$ тока J^μ , то свернутое с q^μ выражение (19.2.48) обращается в нуль и справедливо равенство

$$M_{\beta\alpha} = \frac{i}{F} q_\mu N_{\beta\alpha}^\mu. \quad (19.2.49)$$

Отсюда незамедлительно следует, что если $N_{\beta\alpha}^\mu$ не имеет полюса при $q \rightarrow 0$, матричный элемент, соответствующий излучению голдстоуновского бозона при переходе $\alpha \rightarrow \beta$ обращается при $q \rightarrow 0$ в нуль. Это утверждение получило название “нуля Адлера” [6].

На самом деле часто получается так, что $N_{\beta\alpha}^\mu$ имеет полюс при $q = 0$. Это объясняется тем, что в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ вершину для тока $J^\mu(x)$ можно присоединить к внешней линии (см. рис. 19.2).

Например, если 4-импульс q^μ уносится током J^μ , присоединенным к внешней линии, соответствующей частице с 4-импульсом p и массой m в начальном или конечном состоянии, то через внешнюю линию, соединяющую диаграмму с токовой вершиной, течет 4-импульс $p^\mu + q^\mu$ или $p^\mu - q^\mu$. Следовательно, соответствующий пропагатор будет вносить в $N_{\beta\alpha}^\mu$ множитель

$$[(p \pm q)^2 + m^2]^{-1} = [\pm 2p \cdot q + q^2]^{-1} \rightarrow \pm \frac{1}{2p \cdot q}. \quad (19.2.50)$$

Если фиксировать направление $\mathbf{q}$, множитель $1/|\mathbf{q}|$ в уравнении (19.2.50) сократится с множителем в уравнении (19.2.49), и окончательный ответ в пределе $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$ будет конечным (хотя и зависящим от направления $\mathbf{q}$). С другой стороны, вклад в $N_{\beta\alpha}^\mu$ от диаграмм, в которых ток J^μ присоединен к внешней линии процесса $\alpha \rightarrow \beta$, не является сингулярным при $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$ и поэтому сокращается с множителем $|\mathbf{q}|$ в уравнении (19.2.49). Таким образом, уравнение (19.2.49) имеет следующий смысл: *амплитуду излучения очень мягкого голдстоуновского бозона в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ можно вычислить, учитывая лишь диаграммы, для которых голдстоуновский бозон взаимодействует с внешними линиями процесса; вершину этого взаимодействия можно найти, если применить уравнение (19.2.49) к переходу между одночастичными состояниями.*

Если воспользоваться формализмом эффективного действия, можно получить некоторые интересные результаты, касающиеся взаимодействия голдстоуновских бозонов друг с другом и другими скалярными полями. Для этой цели заметим, что определяя набор перенормированных голдстоуновских бозонных полей π_a , для которых

$$\langle B_a | \pi_b(x) | \text{BAK} \rangle = \frac{e^{ip_B \cdot x} \delta_{ab}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_B^0}}, \quad (19.2.51)$$

из уравнения (19.2.39) получим

$$\phi_n(x) = \sum_a Z_{an} \pi_a(x) + \dots, \quad (19.2.52)$$

где многоточие обозначает поля, не взаимодействующие с голдстоуновскими бозонами. Однако как можно видеть из уравнения (19.2.40), имеет место соотношение

$$Z_{an} = \sum_b F_{ab}^{-1} (it_b \bar{\phi})_n,$$

поэтому амплитуду любой реакции между N имеющими нулевой 4-импульс голдстоуновскими бозонами можно вычислить, если рассмотреть динамику теории с взаимодействием

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{N!} g_{a_1 \dots a_N} \pi_{a_1} \dots \pi_{a_N}, \quad (19.2.53)$$

где

$$g_{a_1 \dots a_N} = \sum_{b_1 \dots b_N} F_{a_1 b_1}^{-1} \dots F_{a_N b_N}^{-1} (it_{b_1} \bar{\phi})_{n_1} \dots (it_{b_N} \bar{\phi})_{n_N} \frac{\partial^N V(\phi)}{\partial \phi_{n_1} \dots \partial \phi_{n_N}} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} \quad (19.2.54)$$

в древесном приближении. Тогда из уравнения (19.2.4) (если положить $\phi = \bar{\phi}$) следует, что сумма всех диаграмм типа “головастика”, соответствующих переходу одночастичного голдстоуновского состояния в вакуум, должна обращаться в нуль, а из уравнения (19.2.6) — что обращаются в нуль амплитуды переходов голдстоуновских бозонов с нулевым 4-импульсом в любые другие скалярные поля. Чтобы продвинуться несколько дальше, можно продолжить дифференцирование полученных уравнений по скалярным полям. Например, взяв производную от уравнения (19.2.5), можно найти, что для любого генератора симметрии t имеет место тождество

$$\sum_n \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} t_{nl} + \sum_n \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_l} t_{nm} + \sum_{n,k} \frac{\partial^3 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m \partial \phi_l} t_{nk} \phi_k = 0. \quad (19.2.55)$$

Взяв в качестве t один из нарушенных генераторов t_a , положив $\phi = \bar{\phi}$, свернув это тождество с $(t_b \bar{\phi})_m (t_c \bar{\phi})_l$ и воспользовавшись уравнением (19.2.6), можно найти, что

$$\sum_{n,m,l} \frac{\partial^3 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m \partial \phi_l} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} (t_a \bar{\phi})_n (t_b \bar{\phi})_m (t_c \bar{\phi})_l = 0, \quad (19.2.56)$$

поэтому сумма всех диаграмм, содержащих три внешние голдстоуновские линии, через которые течет нулевой 4-импульс, равна нулю. Отсюда, в частности, следует, что ни в каких процессах низкоэнергетические голдстоуновские бозоны не могут излучаться внешними голдстоуновскими линиями (через которые течет малый 4-импульс)²⁾.

§ 19.3. Спонтанное нарушение приближенных симметрий

Рассматривая в предыдущем параграфе точные симметрии действия, относительно которых вакуум не оставался инвариантным, мы говорили о явлении спонтанного нарушения этих симметрий. Исследуем теперь, что произойдет, если добавить в действие исходной теории малые члены, которые разрушают симметрию с самого начала.

²⁾ Это утверждение справедливо с точностью до ведущего порядка в разложении по малым энергиям голдстоуновских бозонов.

Такие спонтанно нарушенные приближенные симметрии оказываются важными в теории сильных взаимодействий и некоторых областях физики конденсированного состояния. Как мы увидим, спонтанное нарушение приближенной симметрии приводит не к появлению безмассовых голдстоуновских бозонов, а к возникновению в спектре теории частиц с малой массой и нулевым спином, которые часто называют *псевдоголдстоуновскими бозонами* [7].

Здесь мы продолжим рассмотрение трансляционно-инвариантных теорий, для которых эффективное действие может быть выражено посредством (19.2.3) через эффективный потенциал $V(\phi)$, который в свою очередь зависит только от набора не зависящих от координат вакуумных средних скалярных полей ϕ_n . Если действие инвариантно относительно некоторого набора приближенных непрерывных симметрий с генераторами t_α , эффективный потенциал может быть переписан в виде

$$V(\phi) = V_0(\phi) + V_1(\phi), \quad (19.3.1)$$

где $V_0(\phi)$ удовлетворяет условию инвариантности¹⁾

$$\sum_{nm} \frac{\partial V_0(\phi)}{\partial \phi_n} (t_\alpha)_{nm} \phi_m = 0, \quad (19.3.2)$$

а $V_1(\phi)$ представляет собой малую поправку, связанную с нарушением симметрии действия. Предположим, что это возмущение перемещает минимум возмущенного потенциала из точки ϕ_0 , соответствующей минимуму $V_0(\phi)$, в точку $\bar{\phi} = \phi_0 + \phi_1$, где величина ϕ_1 мала (имеет первый порядок по возмущению, разрушающему симметрию). Условие стабильности вакуума тогда имеет вид

$$\left. \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi=\phi_0+\phi_1} = 0. \quad (19.3.3)$$

Член слева, имеющий нулевой порядок, равен $[\partial V_0(\phi)/\partial \phi_n]_{\phi=\phi_0}$, он обращается в нуль, поскольку ϕ_0 осуществляет минимум $V_0(\phi)$. Таким образом, члены первого порядка тоже должны зануляться, т. е. имеет место равенство

$$\sum_m \frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \Big|_{\phi=\phi_0} \phi_{1m} + \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \Big|_{\phi=\phi_0} = 0. \quad (19.3.4)$$

Кроме того, соблюдается уравнение (19.2.6) (с точностью до замены V на инвариантный член V_0 и замены $\bar{\phi}$ на ϕ_0):

$$\sum_{nl} \frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \Big|_{\phi=\phi_0} (t_\alpha)_{nl} \phi_{0l} = 0. \quad (19.3.5)$$

¹⁾ Мы обозначаем генераторы симметрии буквами t_α , t_β и т. д., чтобы отличать их от генераторов t_a , t_b нарушенных симметрий и т. д.

Таким образом, если умножить уравнение (19.3.4) на $(t_\alpha \phi_0)_n$ и просуммировать по всем n , то мы получим следующее соотношение:

$$\sum_n (t_\alpha \phi_0)_n \left. \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi=\phi_0} = 0. \quad (19.3.6)$$

Вспоминая, что $V(\phi)$ можно интерпретировать как производящий функционал для одночастично-неприводимых диаграмм и замечая, что в отсутствие возмущения V_1 голдстоуновскими компонентами ϕ_n являются те, которые направлены вдоль $t_\alpha \phi_0$ (см. уравнение (19.2.33)), мы видим, что левая часть уравнения (19.3.6) пропорциональна сумме всех диаграмм типа головастика, для которых псевдоголдстоуновский бозон переходит в вакуумное состояние. Другими словами, уравнение (19.3.6) означает, что в первом порядке по V_1 для псевдоголдстоуновских бозонов нет диаграмм типа головастика.

Вывод, который можно сделать из этого рассуждения, состоит в том, что если вакуумное среднее нулевого порядка не удовлетворяет уравнению (19.3.6), то даже малое возмущение приводит к настолько большому изменению $\bar{\phi}$, что разложение $\bar{\phi}$ возле ϕ_0 перестает работать. К счастью, в случае компактных групп Ли ϕ_0 можно выбрать так, что уравнение (19.3.6) будет удовлетворяться. Чтобы убедиться в этом, заметим, что инвариантность потенциала $V_0(\phi)$ относительно действительных линейных преобразований $\phi \rightarrow L\phi$ означает, что если ϕ_* осуществляет минимум потенциала, то его осуществляет и $L\phi_*$. В случае непрерывных групп преобразования $L(\theta)$ всегда можно параметризовать так, что будет выполнено условие

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^\alpha} L^{-1}(\theta) = iN_{\alpha\beta}(\theta)t_\beta, \quad (19.3.7)$$

где $N_{\alpha\beta}$ — некоторая несингулярная матрица, зависящая от параметра на группе θ_α . (Вспомним, что для действительного представления именно it_α , а не t_α оказывается действительной величиной.) Рассмотрим теперь функцию $V_1(L(\theta)\phi_*)$. Если группа компактна, $L(\theta)\phi_*$ покрывает компактное многообразие по мере того, как θ пробегает по объему группы, и если функция $V_1(\phi)$ непрерывна, она должна достигать своего минимума на любом таком многообразии. Пусть для определенности это происходит в точке $L(\theta_*)\phi_*$. Производная $V_1(L(\theta)\phi_*)$ по θ_α равна

$$\frac{\partial V_1(L(\theta)\phi_*)}{\partial \theta_\alpha} = \sum_n \left. \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi=L(\theta)\phi_*} N_{\alpha\beta}(\theta) (it_\beta L(\theta)\phi_*)_n. \quad (19.3.8)$$

В точке θ_* , соответствующей минимуму, она должна обращаться в нуль. В случае для несингулярной матрицы N_{ab} это означает, что

$$0 = \sum_n \left. \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi=L(\theta_*)\phi_*} (t_\beta L(\theta_*)\phi_*)_n. \quad (19.3.9)$$

Но тогда уравнению (19.3.6) можно удовлетворить, если выбрать $\phi_0 = L(\theta_*)\phi_*$.

Уравнение (19.3.6) получило название условия *подстройки вакуума* [8], поскольку оно связывает выбор направления, в котором вакуумом нарушается симметрия, со структурой разрушающих симметрию членов в гамильтониане теории. Рассмотрим, например, обсуждавшийся в предыдущем параграфе случай спонтанного нарушения симметрии $SO(N)$ до $SO(N-1)$. В отсутствие разрушающих симметрию членов в исходном гамильтониане невозможно указать, *какая* из подгрупп $SO(N-1)$ остается ненарушенной; если динамика теории устроена так, что ее основное состояние инвариантно относительно той подгруппы $SO(N-1)$ группы $SO(N)$, преобразования которой не меняют некоторый N -вектор ϕ_{0n} , то посредством действия поворота из $SO(N)$ мы можем найти основное состояние, инвариантное относительно подгруппы $SO(N-1)$, которая не меняет любой другой N -вектор. Если добавить в теорию возмущение, которое под действием преобразований $SO(N)$ ведет себя, например, как компонента $\sum_n u_n \phi_n$ некоторого N -вектора ϕ_n (и не обязательно состоит

из элементарных скаляров), то гамильтониан оказывается инвариантным относительно *той* $SO(N-1)$ -подгруппы $SO(N)$, которая оставляет инвариантным вектор u . В отсутствие условия подстройки вакуума можно было бы думать, что остающейся точной симметрией является подгруппа $SO(N-2)$, состоящая из тех поворотов, которые оставляют инвариантными и вектор u , и вектор ϕ_0 . Однако в случае $V_1(\phi) = \sum_n u_n \phi_n$ из условия (19.3.6) следует, что для истинного

вакуума и произвольных генераторов t_α группы $SO(N)$ имеет место соотношение $\sum_n (t_\alpha \phi_0)_n u_n = 0$. Генераторы t_α группы $SO(N)$ являются

базисом в пространстве всех антисимметричных матриц размера $N \times N$, и из этого условия следует, что векторы u и ϕ_0 должны быть сонаправлены. Вот почему группой ненарушенной симметрии является $SO(N-1)$, а не $SO(N-2)$.

Согласно § 16.1 массовая матрица M_{ab} псевдоголдстоуновских бозонов в первом порядке имеет вид

$$M_{ab}^2 = \sum_{mn} Z_{an} Z_{bm} \left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_m \partial \phi_n} \right|_{\phi=\phi_0+\phi_1}, \quad (19.3.10)$$

где Z_{an} — константа, определяющая перенормировку поля; ее можно найти из уравнения (19.2.39). В нулевом порядке массовая матрица (19.3.10) обращается в нуль, а члены первого порядка имеют вид

$$M_{ab}^2 = \sum_{mn} Z_{an} Z_{bm} \left[\sum_l \left. \frac{\partial^3 V_0(\phi)}{\partial \phi_l \partial \phi_m \partial \phi_n} \right|_{\phi=\phi_0} \phi_{1l} + \left. \frac{\partial^2 V_1(\phi)}{\partial \phi_m \partial \phi_n} \right|_{\phi=\phi_0} \right], \quad (19.3.11)$$

где Z_{an} можно получить из уравнения (19.2.40):

$$Z_{an} = \sum_b F_{ab}^{-1} (it_b \phi_0)_n. \quad (19.3.12)$$

Для того чтобы вычислить массовую матрицу (19.3.11), в уравнении (19.2.55) выберем в качестве t один из генераторов t_a нарушенной симметрии, положим $\phi = \phi_0$ и свернем получившееся выражение с $(t_b \phi_0)_m \phi_{1l}$:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{nml} \frac{\partial^3 V_0(\phi)}{\partial \phi_l \partial \phi_m \partial \phi_n} \Big|_{\phi=\phi_0} \phi_{1l} (t_a \phi_0)_n (t_b \phi_0)_m + \\ & + \sum_{nm} \frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \Big|_{\phi=\phi_0} (t_a \phi_1)_n (t_b \phi_0)_m + \sum_{nl} \frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_l} \Big|_{\phi=\phi_0} (t_a t_b \phi_0)_n \phi_{1l}. \end{aligned}$$

Согласно уравнению (19.2.6) второй член в правой части обращается в нуль, а третий член можно переписать, воспользовавшись уравнением (19.3.4), так что в результате мы получим следующее соотношение:

$$\sum_{nml} \frac{\partial^3 V_0(\phi)}{\partial \phi_l \partial \phi_m \partial \phi_n} \Big|_{\phi=\phi_0} \phi_{1l} (t_a \phi_0)_n (t_b \phi_0)_m = \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \Big|_{\phi=\phi_0} (t_a t_b \phi_0)_n. \quad (19.3.13)$$

Теперь из уравнения (19.3.11) легко найти выражение для массовой матрицы псевдоголдстоуновских бозонов как функционала от V_1 :

$$\begin{aligned} M_{cd}^2 = & - \sum_{ab} F_{ca}^{-1} F_{db}^{-1} \left[(t_a \phi_0)_n (t_b \phi_0)_m \frac{\partial^2 V_1(\phi)}{\partial \phi_m \partial \phi_n} \Big|_{\phi=\phi_0} + \right. \\ & \left. + (t_a t_b \phi_0)_n \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n} \Big|_{\phi=\phi_0} \right]. \quad (19.3.14) \end{aligned}$$

Чтобы убедиться в ее положительной определенности, удобно переписать (19.3.14) через производные по групповым параметрам θ_a . Взяв производную уравнения (19.3.8) по θ_β , положив $\theta = \theta_*$, воспользовавшись уравнениями (19.3.9) и $\phi_0 = L(\theta_*)\phi_*$, получим, что

$$M_{ab}^2 = \sum_{cd\alpha\beta} N_{a\alpha}^{-1}(\theta_*) N_{b\beta}^{-1}(\theta_*) F_{ac}^{-1} F_{bd}^{-1} \frac{\partial^2 V_1(L(\theta)\phi_*)}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta} \Big|_{\theta=\theta_*}. \quad (19.3.15)$$

Матрица справа положительно определена, поскольку в точке θ_* осуществляется минимум функции $V_1(L(\theta)\phi_*)$.

Более известной является другая версия этой формулы, когда массовая матрица выражается через двойной коммутатор генераторов симметрии с разрушающим симметрию возмущением. Предположим, что возмущение H_1 , разрушающее симметрию исходного гамильтониана, является линейной комбинацией

$$H_1 = \sum_n u_n \Phi_n \quad (19.3.16)$$

операторов Φ_n (не обязательно элементарных скалярных полей), которые осуществляют представление группы симметрии с генераторами t_α в том смысле, что

$$[T_\alpha, \Phi_n] = -(t_\alpha)_{nm} \Phi_m, \quad (19.3.17)$$

где T_α — квантово-механические генераторы группы симметрии. Согласно § 16.3 разрушающая симметрию часть потенциала имеет вид

$$V_1(\phi) = \langle H_1 \rangle_{\langle \Phi \rangle = \phi} = \sum_n u_n \phi_n, \quad (19.3.18)$$

где индекс в промежуточном выражении означает, что среднее должно браться по состоянию с минимальной энергией, для которого $\langle \Phi \rangle = \phi$. Из условия подстройки вакуума (19.3.6) тогда имеем

$$0 = \sum_n u_n (t_\alpha \phi_0)_n,$$

или, если воспользоваться уравнением (19.3.17),

$$0 = \langle [T_\alpha, H_1] \rangle_0, \quad (19.3.19)$$

где индекс 0 теперь означает, что среднее берется по вакуумному состоянию, для которого $\langle \Phi \rangle = \phi_{0n}$. Из уравнения (19.3.14) следует, что

$$M_{cd}^2 = - \sum_{ab} F_{ca}^{-1} F_{db}^{-1} \sum_n u_n (t_a t_b \phi_0)_n,$$

и поэтому, воспользовавшись уравнением (19.3.17), окончательно получаем

$$M_{cd}^2 = - \sum_{ab} F_{ca}^{-1} F_{db}^{-1} \langle [T_a, [T_b, H_1]] \rangle_0. \quad (19.3.20)$$

Это выражение симметрично относительно перестановки индексов c и d . Чтобы убедиться в этом, нужно вычислить разность между уравнением (19.3.20) и таким же уравнением с переставленными c и d , воспользовавшись тождествами Якоби, групповыми коммутационными соотношениями и условием подстройки вакуума (19.3.19). Также легко видеть, что массовая матрица положительно определена, поскольку точка $\theta = 0$ осуществляет минимум энергии вакуума $\langle \exp(-i\theta_a T_a) H_1 \exp(i\theta_a T_a) \rangle_0$ для “повернутых” вакуумных состояний $\exp(i\theta_a T_a)|0\rangle$.

§ 19.4. Пионы как голдстоуновские бозоны

Классическим примером нарушенной симметрии в физике является приближенная киральная $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия сильного взаимодействия. Согласно современным представлениям она в самом деле должна иметь место, поскольку массы кварков u и d относительно

малы (см. оценку в § 19.7). В приближении безмассовых u - и d -кварков лагранжиан (18.7.5) квантовой хромодинамики имеет вид

$$\mathcal{L} = -\bar{u}\gamma^\mu D_\mu u - \bar{d}\gamma^\mu D_\mu d - \dots, \quad (19.4.1)$$

где D_μ — ковариантная производная (см. уравнение (15.1.10)), а многоточие обозначает члены, отвечающие за динамику глюонов и/или кварковых полей остальных ароматов. Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \exp(i\vec{\theta}^V \cdot \vec{t} + i\gamma_5 \vec{\theta}^A \cdot \vec{t}) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (19.4.2)$$

где $\vec{t}$ — 3-вектор¹⁾, компонентами которого являются изоспиновые матрицы

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а $\vec{\theta}^V$ и $\vec{\theta}^A$ — линейно-независимые действительные 3-векторы²⁾. Эту алгебру Ли можно переписать как произведение двух коммутирующих подалгебр $SU(2)$, действующих соответственно только на левополяризованную и правополяризованную части кварковых полей, с генераторами

$$\vec{t}_L = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \vec{t}, \quad \vec{t}_R = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \vec{t}, \quad (19.4.3)$$

удовлетворяющими следующим коммутационным соотношениям:

$$[t_{Li}, t_{Lj}] = i\epsilon_{ijk} t_{Lk}, \quad (19.4.4)$$

$$[t_{Ri}, t_{Rj}] = i\epsilon_{ijk} t_{Rk}, \quad (19.4.5)$$

$$[t_{Li}, t_{Rj}] = 0. \quad (19.4.6)$$

Таким образом, группой, отвечающей данной симметрии лагранжиана, является $SU(2) \times SU(2)$. Как легко видеть, она имеет подгруппу

¹⁾ Мы используем стрелку над буквой для обозначения 3-векторов в изоспиновом пространстве, отличая их от обычных 3-векторов, обозначаящих жирной буквой.

²⁾ Лагранжиан (19.4.1) в самом деле обладает этой симметрией, поскольку $\bar{\gamma}_5 \psi \gamma^\mu = -\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu = +\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5$. Кроме того, он инвариантен относительно еще двух непрерывных внутренних симметрий. Одна из них — инвариантность относительно одновременного фазового преобразования кварковых полей u и d , т.е. сохранение числа барионов. Эта симметрия остается ненарушенной, коммутирует с остальными симметриями и поэтому не влияет на выводы, которые будут сделаны в этом параграфе. Другая симметрия связана с инвариантностью относительно умножения кваркового дублета на $\exp(i\alpha\gamma_5)$. Как будет показано в § 23.5, эта $U(1)$ -симметрия оказывается сильно нарушенной из-за непертурбативных эффектов, связанных с инстантонами.

$SU(2)$, состоящую из обычных преобразований изоспина с $\vec{\theta}^A = 0$; ее генераторы равны

$$\vec{t} = \vec{t}_L + \vec{t}_R. \quad (19.4.7)$$

Алгебру $SU(2) \times SU(2)$ можно переписать через $\vec{t}$ и другой триплет генераторов

$$\vec{x} = \vec{t}_L - \vec{t}_R = \gamma_5 \vec{t}. \quad (19.4.8)$$

Коммутационные соотношения для них оказываются следующими:

$$[t_i, t_j] = i\epsilon_{ijk} t_k, \quad (19.4.9)$$

$$[t_i, x_j] = i\epsilon_{ijk} x_k, \quad (19.4.10)$$

$$[x_i, x_j] = i\epsilon_{ijk} t_k. \quad (19.4.11)$$

Как мы увидим, $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия спонтанно нарушается, тогда как изоспиновая подгруппа, генераторами которой являются $\vec{t}$, обычно остается ненарушенной (хотя и оказывается лишь приближенной).

Воспользовавшись методом Нетер (см. § 7.3), найдем сохраняющиеся в теории с лагранжианом (19.4.1) векторный и аксиальный токи:

$$\vec{V}^\mu = i\bar{q}\gamma^\mu \vec{t}q, \quad \vec{A}^\mu = i\bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \vec{t}q, \quad (19.4.12)$$

$$\partial_\mu \vec{V}^\mu = \partial_\mu \vec{A}^\mu = 0, \quad (19.4.13)$$

где q — кварковый дублет,

$$q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (19.4.14)$$

Соответствующие сохраняющиеся заряды являются генераторами изоспиновой и оставшейся симметрий:

$$\vec{T} = \int d^3x \vec{V}^0, \quad (19.4.15)$$

$$\vec{X} = \int d^3x \vec{A}^0. \quad (19.4.16)$$

Токи (19.4.12) нормированы таким образом, что квантовые операторы $\vec{T}$ и $\vec{X}$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и матрицы $\vec{t}$ и $\vec{x}$:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k, \quad (19.4.17)$$

$$[T_i, X_j] = i\epsilon_{ijk} X_k, \quad (19.4.18)$$

$$[X_i, X_j] = i\epsilon_{ijk} T_k. \quad (19.4.19)$$

Действуя на кварковые поля, эти операторы индуцируют преобразование (19.4.2), а именно

$$[\vec{T}, q] = -\vec{t}q, \quad (19.4.20)$$

$$[\vec{X}, q] = -\vec{x}q. \quad (19.4.21)$$

Если эта симметрия является точной и ненарушенной, любое адронное одночастичное состояние $|h\rangle$ и состояние $\bar{X}|h\rangle$ с теми же спином, барионным числом и странностью, но противоположной четностью³⁾ будут соответствовать одной и той же физической ситуации. В реальном спектре адронов нет вырождения по четности, поэтому мы должны заключить, что если $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия все же имеет место, она должна спонтанно нарушаться до изоспиновой подгруппы $SU(2)$. В этом случае оператор $\vec{X}$ переводит адронное одночастичное состояние $|h\rangle$ в состояние, описывающее адрон h и безмассовый псевдоскалярный голдстоуновский бозон, и, таким образом, в спектре адронов нет удвоения по четности.

Вопрос о том, действительно ли в КХД имеет место такое нарушение симметрии, связан со всеми аспектами динамики сильных взаимодействий. Как мы увидим в § 19.9, в самом деле имеются серьезные основания верить, что в квантовой хромодинамике изоспиновая симметрия $SU(2)$ не нарушена спонтанно. Однако довольно трудно показать, что *должна быть* спонтанно нарушена киральная часть $SU(2) \times SU(2)$. (Согласно аргументу, приведенному в § 22.5, обязательно должна быть спонтанно нарушена симметрия $SU(3) \times SU(3)$ квантовой хромодинамики с *тремя* безмассовыми кварками.) В 1960-е годы стало ясно, что на самом деле детальный механизм спонтанного нарушения киральной симметрии не так уж и нужен: наиболее интересные следствия этого нарушения мы выводим, просто *предполагая*, что $SU(2) \times SU(2)$ спонтанно нарушается до $SU(2)$.

Кварки u и d имеют малые, но все же не равные нулю массы. Это означает, что симметрия $SU(2) \times SU(2)$ не может быть точной. Спонтанное нарушение *приближенной* киральной симметрии приводит к необходимости существования голдстоуновского бозона с малой массой и такими же квантовыми числами, какими обладает генератор нарушенной симметрии $\vec{X}$: голдстоуновский бозон должен описываться состоянием с отрицательной четностью, нулевым спином, изоспином, равным единице, и нулевыми барионным числом и странностью. В реальности легчайшим из всех адронов оказывается пион, причем он имеет в точности такие квантовые числа. Поэтому мы идентифицируем его как голдстоуновский бозон, возникающий в результате

³⁾ Один из способов удовлетворить этому условию состоит в том, чтобы положить массу адрона равной нулю. Тогда состояния $|\pm\rangle$ со спиральностью $\pm 1/2$ будут иметь одинаковые спин, барионное число и странность, а их линейные комбинации $|+\rangle + |-\rangle$ и $|+\rangle - |-\rangle$ — отличаться четностью. Утверждение о необходимости равенства массы нуклона нулю, вообще говоря, оказывается несправедливым, если не делать дальнейших предположений о структуре матричных элементов аксиального и векторного токов. Однако как будет показано в § 22.5, массы *некоторых* барионов в самом деле должны быть положены равными нулю.

спонтанного нарушения приближенной киральной симметрии. Как будет показано ниже, пропорциональным линейной комбинации m_u и m_d оказывается квадрат массы пиона m_π^2 , а не сама масса m_π . Поскольку величина $m_\pi^2/m_N^2 \simeq 0,022$ чрезвычайно мала, следствия, которые мы выведем из предположения о спонтанном нарушении симметрии $SU(2) \times SU(2)$, имеют достаточную точность.

Полезно заметить, что хотя киральная симметрия сильных взаимодействий никоим образом не может зависеть от слабых взаимодействий, оказывается, что токи симметрии $\vec{V}^\mu$ и $\vec{A}^\mu$ входят в сохраняющие странность слабые взаимодействия лептонов, такие как, например, бета-распад ядер. Как мы увидим в § 21.3, в рамках стандартной модели электрослабого взаимодействия соответствующий эффективный лагранжиан должен иметь следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\text{wk}} = -\frac{iG_{\text{wk}}}{\sqrt{2}} (V_+^\lambda + A_+^\lambda) \sum_l \bar{l} \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \nu_l + \text{эрмит. сопр.}, \quad (19.4.22)$$

где индекс l обозначает перенормированные поля трех заряженных лептонов e , μ и τ , индекс ν_l — поля соответствующих нейтрино, а $V_\pm^\lambda$ и $A_\pm^\lambda$ — заряженные токи:

$$V_\pm^\lambda = V_1^\lambda \pm iV_2^\lambda, \quad A_\pm^\lambda = A_1^\lambda \pm iA_2^\lambda. \quad (19.4.23)$$

Постоянная⁴⁾ G_{wk} может быть найдена из результатов измерений вероятности бета-переходов между состояниями нулевого спина, принадлежащими одному изотопическому мультиплету, например в переходах $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ и $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^* + e^+ + \nu_e$. Передача импульса в таких процессах очень мала, поэтому из сохранения четности (в сильных взаимодействиях) и инвариантности относительно вращений следует, что в S -матрицу таких распадов дает вклад лишь ток $\int d^3x V_-^0 = T_1 - iT_2$. Матричные элементы этого оператора между состояниями, принадлежащими одному изотопическому мультиплету, совпадают с коэффициентами Клебша–Гордана, поэтому из выражений для сечений процессов типа “ $0 \rightarrow 0$ ” можно найти значение [9] постоянной взаимодействия в (19.4.22): $G_{\text{wk}} \simeq 1,14959(38) \times 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$. С другой стороны, единственным матричным элементом тока, который нам нужен при вычислении вероятности распада пиона $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, является матричный элемент A_-^λ между одночастичным пионным состоянием и вакуумом:

$$\langle \text{BAK} | A_i^\mu(x) | \pi_j \rangle = \frac{iF_\pi \delta_{ij} p_\pi^\mu e^{ip_\pi \cdot x}}{2(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0}}. \quad (19.4.24)$$

⁴⁾ Постоянная G_{wk} связана с постоянной Ферми G_F и углом Кабиббо θ_C посредством соотношения $G_{\text{wk}} = G_F \cos \theta_C$; см. § 21.3.

В этом выражении неизвестна лишь величина F_π . Скорость распада пиона оказывается равной

$$\Gamma(\pi \rightarrow \mu + \nu) = \frac{G_{\text{wk}}^2 F_\pi^2 m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{16\pi m_\pi^3}. \quad (19.4.25)$$

Зная скорость распада $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, $\Gamma = (2,6033(24) \times 10^{-8} \text{ с})^{-1}$ и величину G_{wk} , легко найти⁵⁾, что

$$F_\pi \simeq 184 \text{ МэВ}. \quad (19.4.26)$$

Рассмотрим теперь матричный элемент $\bar{A}^\mu$ между одночастичными нуклонными состояниями. Он интересен и сам по себе, поскольку, как указано в § 19.2, несет информацию, которая нужна для вычисления вероятности испускания низкоэнергетических пионов в столкновениях нуклонов. Как можно показать, следуя аналогии с электромагнитным током (см. § 10.6), из лоренц-инвариантности и сохранения четности следует, что этот матричный элемент должен иметь вид⁶⁾

$$\begin{aligned} \langle p | A_+^\mu(x) | n \rangle &= (2\pi)^{-3} e^{iq \cdot x} \times \\ &\times \bar{u}_p [-i\gamma^\mu \gamma_5 f(q^2) + q^\mu \gamma_5 g(q^2) + iq_\nu [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \gamma_5 h(q^2)] u_n, \end{aligned} \quad (19.4.27)$$

где $q \equiv p_n - p_p$. В приближении точной $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии из сохранения тока следует, что

$$q_\mu \langle p | A_+^\mu(x) | n \rangle = 0. \quad (19.4.28)$$

Используя уравнения, определяющие дираковские спиноры u_p и u_n ,

$$\bar{u}_p (i\not{p}_p + m_N) = (i\not{p}_p + m_N) u_n = 0,$$

мы видим, что

$$q_\mu \bar{u}_p [-i\gamma^\mu \gamma_5] u_n = -2m_N \bar{u}_p \gamma_5 u_n.$$

Следовательно, из уравнения (19.4.28) имеем

$$2m_N f(q^2) = q^2 g(q^2). \quad (19.4.29)$$

Если бы множитель $g(q^2)$ не имел сингулярности при $q^2 = 0$, то из уравнения (19.4.29) следовало бы, что $m_N = 0$ (это неверно) или $f(0) = 0$ (это также неверно). Величина $f(0)$ может быть измерена в низкоэнергетических ядерных бета-распадах, например в распаде

⁵⁾ Чаше вместо F_π используют константу f_π , которая в разных работах определяется как F_π , $F_\pi/\sqrt{2}$ или $F_\pi/2$

⁶⁾ Благодаря свойствам зарядового сопряжения токов $A_\pm^\mu$ в стандартной модели коэффициент $h(q^2)$ обращается в нуль. Возможно, что существуют члены “второго типа” [10], которые обладают другими свойствами, не приводящими к обращению $h(q^2)$ в нуль, но аргументов, доказывающих их существование, нет. Как мы увидим, учет ненулевого коэффициента $h(q^2)$ не оказывает влияния на следствия киральной симметрии.

нейтрона (в этом случае ее обычно обозначают буквой g_A); оказывается, что она равна

$$f(0) \equiv g_A = 1,2573(28). \quad (19.4.30)$$

Из того что ни m_N , ни $f(0) = g_A$ не являются малыми, следует, что в приближении точной $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии функция $g(q^2)$ должна иметь полюс при $q^2 \rightarrow 0$:

$$g(q^2) \rightarrow \frac{2m_N g_A}{q^2}. \quad (19.4.31)$$

Такой полюс естественно возникает в случае, если масса пиона равна нулю, т. е. в случае спонтанного нарушения $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии. Предположим, что пион взаимодействует с некоторым одночастичным нуклонным состоянием так, что вершина этого взаимодействия имеет вид⁷⁾ $-2iG_{\pi N} \vec{\pi} \vec{N} \gamma_5 \vec{t} N$. Матричный элемент тока между одночастичным пионным состоянием и вакуумом можно найти из уравнения (19.4.24), если $\vec{A}^\mu(x)$ поменять на $F_\pi \partial^\mu \vec{\pi}/2$. Следовательно, в пределе $q^2 \rightarrow 0$ матричный элемент (19.4.27) имеет полюс:

$$\langle p | A_+^\mu(x) | n \rangle \rightarrow \left[\frac{e^{iq \cdot x}}{(2\pi)^3} \right] [i(2\pi)^4 2G_{\pi N} \bar{u}_p(i\gamma_5) u_n] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4 q^2} \right] [iq^\mu F_\pi/2].$$

Сравнивая это выражение с уравнением (19.4.27), мы находим, что благодаря обмену пионом при $q^2 \rightarrow 0$ в функции $g(q^2)$ возникает полюс

$$g(q^2) \rightarrow \frac{G_{\pi N} F_\pi}{q^2}. \quad (19.4.32)$$

Таким образом, из уравнений (19.4.31) и (19.4.32) следует, что

$$G_{\pi N} = \frac{2m_N g_A}{F_\pi}. \quad (19.4.33)$$

Это выражение называется соотношением Голдбергера–Треймана [11]. Оно имеет довольно большую область применимости: положив $m_N = (m_p + m_n)/2 = 938,9$ МэВ, $g_A = 1,257$ и $F_\pi = 184$ МэВ, можно получить, что $G_{\pi N} \simeq 12,7$ в неплохом согласии со значением⁸⁾ $G_{\pi N} = 13,5$, полученным в разных экспериментах (например, при изучении влияния однопионного полюса в рассеянии нуклонов на ядрах и нуклонного полюса в рассеянии пионов на нуклонах).

В реальности масса пиона не равна нулю, и симметрия $SU(2) \times SU(2)$ не является точной (даже в той фазе, когда остается не

⁷⁾ Так выглядит стандартное определение вершины взаимодействия псевдоскалярного пиона и нуклона $G_{\pi N}$. Множитель 2 был добавлен для того, чтобы сократить $1/2$ в изоспиновых матрицах.

⁸⁾ В учебнике [12] приводится значение $G_{\pi N}^2 = 14,3$, или $G_{\pi N} = 13,4$. Последние измерения [13] сечения рассеяния протона на нейтроне при 162 МэВ дают ответ $G_{\pi N}^2 = 14,6 \pm 0,3$, или $G_{\pi N} = 13,5$.

нарушенной спонтанно). Это обстоятельство можно анализировать, пользуясь формализмом, развитым в предыдущем параграфе. Из структуры лагранжиана (19.4.1) следует, что в гамильтониане теории содержится нарушающий киральную симметрию член

$$H_1 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d = (m_u + m_d)\Phi_4^+ + (m_u - m_d)\Phi_3^-, \quad (19.4.34)$$

где

$$\Phi_4^+ \equiv \frac{1}{2}(\bar{u}u + \bar{d}d), \quad \Phi_3^- \equiv \frac{1}{2}(\bar{u}u - \bar{d}d). \quad (19.4.35)$$

Операторы Φ_4^+ и Φ_3^- являются пространственными скалярами, относительно группы $SU(2) \times SU(2)$ они преобразуются как компоненты независимых киральных 4-векторов $\Phi_n^\pm$:

$$\vec{\Phi}^+ = i\bar{q}\gamma_5 \vec{t}q, \quad \Phi_4^+ = \frac{1}{2}\bar{q}q, \quad (19.4.36)$$

$$\vec{\Phi}^- = \bar{q}\vec{t}q, \quad \Phi_4^- = -\frac{1}{2}i\bar{q}\gamma_5 q, \quad (19.4.37)$$

являясь киральными 4-векторами в том смысле, что

$$[\vec{T}, \Phi_n^\pm] = -\sum_m (\vec{\mathcal{T}})_{nm} \phi_m^\pm, \quad (19.4.38)$$

$$[\vec{X}, \Phi_n^\pm] = -\sum_m (\vec{\mathcal{X}})_{nm} \phi_m^\pm, \quad (19.4.39)$$

где $\vec{\mathcal{T}}$ и $\vec{\mathcal{X}}$ — эрмитовы матрицы размера 4×4 , которые осуществляют 4-векторное представление алгебры $SU(2) \times SU(2) \equiv SO(4)$:

$$(\mathcal{T}_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc}, \quad (\mathcal{T}_a)_{b4} = (\mathcal{T}_a)_{4b} = (\mathcal{T}_a)_{44} = 0, \quad (19.4.40)$$

$$(\mathcal{X}_a)_{b4} = -(\mathcal{X}_a)_{4b} = -id_{ab}, \quad (\mathcal{X}_c)_{ab} = (\mathcal{X}_c)_{44} = 0. \quad (19.4.41)$$

В данных обозначениях становится ясно, что условия подстройки вакуума для генераторов T_1, T_2, X_1, X_2 и X_3 имеют вид

$$0 = \langle \Phi_2^- \rangle_0 = \langle \Phi_1^- \rangle_0 = \langle \Phi_1^+ \rangle_0 = \langle \Phi_2^+ \rangle_0 = \\ = (m_u + m_d)\langle \Phi_3^+ \rangle_0 + (m_d - m_u)\langle \Phi_4^- \rangle_0. \quad (16.4.42)$$

Мы предполагали, что при равенстве нулю масс u - и d -кварков симметрия $SU(2) \times SU(2)$ спонтанно нарушается таким образом, что $SU(2)$ -симметрия с генераторами $\vec{T}$ и четность остаются ненарушенными. В этом случае вектор $\langle \Phi_n^+ \rangle_0$ оказывается направленным вдоль четвертой оси, а $\langle \Phi_n^- \rangle_0$ обращается в нуль. Таким образом, условия (19.4.42) выполняются. Однако если $m_u = m_d = 0$, можно найти другие решения, нарушающие симметрию, для которых четность определена по-другому (подействуем, например, на найденное решение произвольным преобразованием из $SU(2) \times SU(2)$). Мы видим, что невозможно указать, каково направление $\langle \Phi_n^+ \rangle_0$, или, что равносильно, какая $SU(2)$ -подгруппа группы $SU(2) \times SU(2)$ остается ненарушенной, хотя во всех случаях $\langle \Phi_n^- \rangle_0 = 0$. Из условия подстройки

вакуума (19.4.42) следует, что если симметрия нарушается автоматически возмущением вида (19.4.34) или спонтанным образом (выполнено соотношение $\langle \Phi_n^- \rangle_0 = 0$), вакуум должен быть устроен так, чтобы вектор $\langle \Phi_n^+ \rangle_0$ был направлен вдоль четвертой оси и ненарушенной оставалась $SU(2)$ -симметрия относительно вращений изотопического спина.

Воспользовавшись развитым формализмом, можно вычислить массу пиона. Из уравнений (19.4.39)–(19.4.41) находим, что

$$[X_a, [X_b, \Phi_4^+]] = \delta_{ab} \Phi_4^+, \quad [X_a, [X_b, \Phi_3^-]] = \Phi_a^- \delta_{b3}. \quad (19.4.43)$$

Кроме того, из инвариантности относительно вращений изоспина следует, что введенный в § 19.2 параметр F_{ab} пропорционален δ_{ab} , а соответствующий коэффициент пропорциональности согласно (19.4.24) равен $F_\pi/2$. Таким образом,

$$F_{ab} = \delta_{ab} F_\pi/2. \quad (19.4.44)$$

Тогда из уравнения (19.3.20) находим массовую матрицу пионов

$$m_{ab}^2 = \delta_{ab} m_\pi^2, \quad (19.4.45)$$

где

$$m_\pi^2 = -4(m_u + m_d) \langle \Phi_4^+ \rangle_0 / F_\pi^2. \quad (19.4.46)$$

Замечательно, что массы заряженных и нейтральных пионов оказываются равными, хотя не было сделано никаких предположений об отношении масс m_u и m_d . Как мы увидим ниже, это отношение не слишком близко к единице; изоспин является хорошим квантовым числом не потому, что массы m_u и m_d оказываются близкими друг к другу, а потому что они *малы*. Кроме того, можно видеть, что именно квадрат массы пиона пропорционален сумме масс кварков. Таким образом, эти массы должны быть достаточно малы (см. оценку в § 19.7). Наблюдаемая разница масс пионов возникает не из-за того, что массы u - и d -кварков различны, а из-за электромагнитных эффектов. Мультиплет пионов оказался единственным, для вычисления разницы масс в котором потребовалось учесть лишь однофотонный обмен [14].

Конечно, даже если учесть массы кварков, для определения F_π все еще можно пользоваться уравнением (19.4.24); взяв дивергенцию от него, имеем

$$\langle \text{BAK} | \partial_\mu A_i^\mu(x) | \pi_j \rangle = \frac{F_\pi \delta_{ij} m_\pi^2 e^{ip_\pi \cdot x}}{2(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0}}. \quad (19.4.47)$$

Вместо того чтобы предполагать, что $\partial_\mu \vec{A}^\mu$ обращается в нуль, будем считать, что эта величина *мала* (порядка m_π^2) везде за исключением области, где вклад пионного полюса компенсирует малость m_π^2 . Согласно уравнению (19.4.47) поведение матричных элементов оператора $\partial_\mu \vec{A}^\mu$ возле одночастичного пионного полюса выглядит так, как если бы оператор $\partial_\mu \vec{A}^\mu$ был равен константе $F_\pi m_\pi^2$, умноженной на

соответствующим образом нормированное пионное поле. Например, однонуклонный матричный элемент $\partial_\mu A_+^\mu$ должен иметь вид

$$\langle p | \partial_\mu A_+^\mu(0) | n \rangle \simeq \frac{F_\pi m_\pi^2}{2} \left[\frac{-i}{(2\pi)^4 (q^2 + m_\pi^2)} \right] [i(2\pi)^4 2G_{\pi N} \bar{u}_p(-i\gamma_5) u_n], \quad (19.4.48)$$

или, если использовать формфакторы (см. уравнение (19.4.27)),

$$q^2 g(q^2) - 2m_N f(q^2) \simeq -\frac{G_{\pi N} F_\pi m_\pi^2}{q^2 + m_\pi^2}. \quad (19.4.49)$$

Это выражение справедливо не только в пределе $q^2 \rightarrow -m_\pi^2$, но и при квадратах импульса q^2 порядка m_π^2 , поскольку в этой области пионный полюс дает главный вклад в матричные элементы $\partial_\mu A^\mu$. Кроме того, при таких q^2 вместо выражения (19.4.32) имеем

$$g(q^2) \simeq \frac{G_{\pi N} F_\pi}{q^2 + m_\pi^2}. \quad (19.4.50)$$

Из уравнений (19.4.49) и (19.4.50) находим, что при q^2 порядка m_π^2 имеет место соотношение

$$f(q^2) \simeq G_{\pi N} F_\pi / 2m_N. \quad (19.4.51)$$

Не следует удивляться тому, что в области значений q^2 от нуля до m_π^2 эта функция ведет себя приблизительно как константа — у нее нет полюса и на таком малом интервале q^2 существенного изменения функции никаким иным образом получить невозможно. Постоянное значение приближенно равно $f(0) \equiv g_A$, и из уравнения (19.4.51) мы получаем соотношение Голдбергера–Треймана.

Воспользуемся теперь результатами § 19.2 и вычислим амплитуду излучения низкоэнергетического пиона в некотором процессе $\alpha \rightarrow \beta$. Было показано, что такая амплитуда может быть вычислена посредством учета фейнмановских диаграмм, для которых пион испускается только внешней линией. Из уравнения (19.2.49) легко видеть, что вклад от таких диаграмм можно вычислить, если положить, что взаимодействие пиона с внешним полем имеет вид $\partial \vec{\pi} \cdot \vec{A}_N / F_\pi$, где индекс N означает, что из матричных элементов аксиально-векторного тока необходимо выбросить член с одночастичным пионным полюсом. Из уравнения (19.4.27) (учитывая изоспиновую инвариантность) можно сделать вывод, что для испускания мягких пионов внешней нуклонной линией это взаимодействие выглядит как

$$-\frac{ig_A}{F_\pi} \partial_\mu \vec{\pi} \bar{N} \gamma^\mu \gamma_5 \vec{t} N.$$

Используя уравнение Дирака для свободной частицы, легко понять, что если нуклон находится на массовой оболочке (т. е. если система находится возле нуклонного полюса на рис. 19.2) взаимодействие эквивалентно псевдоскалярному взаимодействию $-2im_N g_A \vec{\pi} \times \bar{N} \gamma_5 \vec{t} N / F_\pi$.

Это еще одна иллюстрация к применению соотношения Голдбергера–Треймана.

* * *

Ход нашего обсуждения не соответствовал историческому развитию представленных идей: на самом деле оно протекало в порядке, почти противоположном изложенному. Идеи, связанные с нарушением симметрий в физике частиц, берут свое начало с соотношений Голдбергера–Треймана (19.4.33), выведенных [11] в 1957 г. на основе вычислений, связанных с распадом пиона. Для того чтобы объяснить удивительный успех этой работы, позднее была предложена [15] идея “частичного сохранения аксиального векторного тока” (ЧСАТ). Ее смысл заключается в предположении о том, что, хотя аксиально-векторный ток не сохраняется (поскольку существуют процессы распада пионов), его дивергенция $\partial_\mu A_\pm^\mu$ пропорциональна амплитуде пионного поля. Такое предположение само по себе не имеет смысла — как было показано в гл. 10, *любое* поле с ненулевым матричным элементом между вакуумом и однопионным состоянием может рассматриваться как пионное. В работе [15] предполагалось, что дивергенция аксиально-векторного тока везде кроме малой окрестности пионного полюса остается *малой* (порядка m_π^2), однако это предположение казалось необоснованным. Проблема была полностью решена в 1960 г., в работе Намбу [16], который отметил, что в пределе нулевой массы пиона аксиально-векторные токи можно считать точно сохраняющимися. В этом случае соотношение Голдбергера–Треймана выводится так, как это было сделано нами. В этой и последующей, совместной с Йона–Ласинио, статье [17] Намбу также установил, что появление безмассового (или почти безмассового) пиона является признаком нарушения точной (или соответственно приближенной) симметрии. В работе [18] также было показано, каким образом можно вычислять вероятность испускания одного мягкого пиона для различных процессов. Впоследствии Голдстоун отметил [4], что нарушение симметрии всегда сопровождается появлением безмассовых бозонов. В 1962 г. этот факт был строго доказан Голдстоуном, Саламом и автором [5] примерно так, как это было сделано в § 19.2.

Ни в одной из ранних работ о пионах не делалось никаких специальных предположений о группе нарушенной симметрии. Ею могла быть, например, группа $U(1) \times U(1) \times U(1)$ с генераторами, образующими вектор изотопического спина, или некомпактная группа $SO(3,1)$, для которой в правой части коммутационных соотношений (19.4.19) появляется знак “—”. Выбор группы нарушенной симметрии становится важным только при рассмотрении процессов с участием нескольких пионов (см. работу [19], в которой было выведено правило сумм Адлера–Вайсбергера, а также следующий параграф). Далее стало ясно, что исходной группой в самом деле являет-

ся $SU(2) \times SU(2)$. Это привело к смещению акцентов с изучения токов самих по себе к изучению проявлений киральной симметрии в физике сильных взаимодействий [20].

Вся эта информация была получена в отсутствие какой-либо определенной теории сильных взаимодействий. Одной из причин быстрого признания квантовой хромодинамики в 1973 г. в качестве правильной теории сильных взаимодействий стало простое объяснение $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии как следствия малости масс u - и d -кварков.

§ 19.5. Эффективные теории поля: пионы и нуклоны

Как было показано в § 19.2, воспользовавшись условием сохранения тока, можно вычислить амплитуду испускания низкоэнергетического голдстоуновского бозона B в процессе $\alpha \rightarrow \beta + B$. При этом нет необходимости привлекать дополнительную информацию о деталях структуры нарушенной группы симметрии; условие сохранения тока — единственное, что нам нужно. Дело обстоит иначе, если мы хотим вычислить матричный элемент испускания или поглощения *двух* голдстоуновских бозонов, как, например, при изучении процесса их рассеяния. Теперь необходимо рассматривать матричный элемент вида

$$\langle \beta | T \{ J_1^{\lambda_1}(x_1), J_2^{\lambda_2}(x_2) \} | \alpha \rangle,$$

где состояния α и β , помимо двух голдстоуновских бозонов, принимающих участие в реакции, включают и другие частицы. Действуя на этот матричный элемент оператором $\partial/\partial x_1^{\lambda_1}$, мы получим ненулевой вклад от производных функций $\theta(x_1^0 - x_2^0)$ и $\theta(x_2^0 - x_1^0)$, возникающих при определении хронологического упорядочения $T\{\dots\}$. Этот вклад равен матричному элементу одновременного коммутатора $\delta(x_1^0 - x_2^0)[J_1^0(x_1), J_2^{\lambda_2}(x_2)]$, значение которого зависит от коммутационных отношений алгебры группы симметрии. Поэтому процессы с участием большого числа голдстоуновских бозонов особенно интересны — зная их характеристики, можно выяснить, какова природа нарушенной группы симметрии. Такой подход к изучению явления спонтанного нарушения симметрии получил название метода *алгебры токов* [21].

Метод алгебры токов использовался в ранних работах по вычислению амплитуд процессов с участием большого числа голдстоуновских бозонов [22]. К сожалению, вычисления в рамках этого метода оказывались довольно длинными, в особенности в том случае, когда нужно было иметь дело с тремя и более голдстоуновскими бозонами. Кроме того, в рамках метода алгебры токов оставалось неясным, как можно работать с приближенными симметриями типа киральной в квантовой хромодинамике. По этой причине была предложена другая вычислительная техника [23], основанная на использовании

эффективных лагранжианов. Суть ее в том, что амплитуды процессов с участием голдстоуновских бозонов можно вычислять методами теории возмущений, выбрав для теории некий лагранжиан, имеющий нужную симметрию.

Первоначально обоснование метода эффективных лагранжианов было основано на алгебре токов. Легко видеть, что если заданы одновременные коммутационные соотношения токов, связанных с нарушенными симметриями, матричный элемент процесса $\alpha \rightarrow \beta$ и матричные элементы токов между различными одночастичными состояниями, амплитуда испускания некоторого числа низкоэнергетических голдстоуновских бозонов в процессе $\alpha \rightarrow \beta + B_1 + B_2 + \dots$ оказывается фиксированной. Как известно, по эффективному лагранжиану теории можно, воспользовавшись теоремой Нетер, построить сохраняющиеся токи. Вычисляя амплитуды процессов в теории с таким лагранжианом и подставляя правильные выражения для матрицы $M_{\beta\alpha}$ и одночастичных матричных элементов токов, мы в итоге должны получить такой же ответ, какой дает применение метода алгебры токов. В том случае, если взаимодействие между голдстоуновскими бозонами — единственное взаимодействие в теории, оба состояния α и β можно рассматривать как вакуумные. Поэтому матричный элемент F между голдстоуновским состоянием и вакуумом полностью определяет значения всех наблюдаемых.

Первым примером эффективной теории такого рода [23] в физике стала σ -модель [24]. В пределах бозонного сектора этой модели $SO(4)$ -инвариантный лагранжиан теории имеет вид (см. § 19.2):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - \frac{\mathcal{M}^2}{2} \phi_n \phi_n - \frac{\lambda}{4} (\phi_n \phi_n)^2, \quad (19.5.1)$$

где подразумевается суммирование по $n = 1, 2, 3, 4$, $\vec{\phi}$ — изовекторное псевдоскалярное поле, а ϕ_4 — изоскалярное поле.

Используя эффективный лагранжиан при вычислении амплитуд рассеяния, необходимо либо учитывать фейнмановские диаграммы во всех порядках теории возмущений, либо находить причины, по которым диаграммами высших порядков можно пренебречь. Для лагранжиана вида (19.5.1), в котором нарушенная симметрия реализуется посредством линейных преобразований различных полей, такие причины отсутствуют. К счастью, любой такой лагранжиан можно переписать так, что амплитуды рассеяния будут представлены в виде ряда по степеням энергий голдстоуновских бозонов. Для этого нужно выполнить преобразование симметрии в каждой точке пространства–времени, устраняющее голдстоуновские поля. В результате голдстоуновские степени свободы будут проявляться как параметры этого преобразования. Однако поскольку лагранжиан инвариантен относительно преобразований симметрии, не зависящих явно от координат, он не может содержать новые голдстоуновские поля, если они

постоянны. Это означает, что любые вклады новых голдстоуновских полей в лагранжиан должны быть пропорциональны одной или нескольким пространственно-временным производным новых голдстоуновских полей. Эти производные приводят к появлению в элементах S -матрицы дополнительных множителей, соответствующих энергии голдстоуновских бозонов, т. е. эффективный лагранжиан можно использовать для представления элементов S -матрицы в виде ряда по степеням энергий голдстоуновских бозонов.

Чтобы привести лагранжиан (19.5.1) к более простому виду, представим 4-вектор ϕ_n как результат действия оператора кирального вращения R на 4-вектор $\{0, 0, 0, \sigma\}$, первые три компоненты которого (голдстоуновская часть ϕ_n) обращаются в нуль:

$$\phi_n(x) = R_{n4}(x)\sigma(x), \quad (19.5.2)$$

где $R_{nm}(x)$ — ортогональная матрица,

$$R^T(x)R(x) = 1, \quad (19.5.3)$$

и, таким образом,

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_n \phi_n(x)^2}. \quad (19.5.4)$$

Тогда лагранжиан (19.5.1) приобретает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 (R_{n4}\partial_\mu\sigma + \sigma\partial_\mu R_{n4})^2 - \frac{1}{2} \mathcal{M}^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4. \quad (19.5.5)$$

Поскольку матрица R является ортогональной, член $\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma$ не зависит от R , а перекрестный член обращается в нуль:

$$\sum_n R_{n4}^2 = 1, \quad \sum_n R_{n4}\partial_\mu R_{n4} = \frac{1}{2} \partial_\mu \sum_n R_{n4}^2 = 0.$$

Тогда

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{n=1}^4 \partial^\mu R_{n4}\partial_\mu R_{n4} - \frac{1}{2} \mathcal{M}^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4. \quad (19.5.6)$$

Если постоянная $\mathcal{M}^2$ отрицательна, вакуумное среднее поля σ не равно нулю; оно задается положением минимума суммы двух последних членов в лагранжиане и оказывается равным $\sigma = |\mathcal{M}|/\sqrt{\lambda}$.

Вместо полевых переменных ϕ_n теперь основную роль играют переменные $\sigma - |\mathcal{M}|/\sqrt{\lambda}$ и переменные, задающие параметризацию вращения R . Например, в качестве таких параметров можно выбрать сами величины R_{a4} (где $a, b, \dots$ с этого момента обозначают изовекторные индексы, пробегающие значения 1, 2, 3), где R_{44} задается условием ортогональности R . Однако существует другая параметризация, для которой окончательный ответ оказывается более простым;

исторически она была первой, использовавшейся в этой задаче:

$$\zeta_a \equiv \frac{\phi_a}{\phi_4 + \sigma}, \quad (19.5.7)$$

$$R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1 + \vec{\zeta}^2} = -R_{4a}, \quad R_{44} = \frac{1 - \vec{\zeta}^2}{1 + \vec{\zeta}^2}, \quad R_{ab} = \delta_{ab} - \frac{2\zeta_a \zeta_b}{1 + \vec{\zeta}^2}, \quad (19.5.8)$$

$$\phi_a/\sigma = R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1 + \vec{\zeta}^2}, \quad \phi_4/\sigma = R_{44} = \frac{1 - \vec{\zeta}^2}{1 + \vec{\zeta}^2}. \quad (19.5.9)$$

Лагранжиан (19.5.6) в этом случае приобретает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - 2\sigma^2 \vec{D}_\mu \cdot \vec{D}^\mu - \frac{1}{2} \mathcal{M}^2 \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4, \quad (19.5.10)$$

где

$$\vec{D}_\mu \equiv \frac{\partial_\mu \vec{\zeta}}{1 + \vec{\zeta}^2}. \quad (19.5.11)$$

Какую бы параметризацию мы не использовали, очевидно, что поля $\vec{\zeta}$ описывают частицы нулевой массы, взаимодействие которых устроено так, что его лагранжиан содержит производные полей. Эти поля (с точностью до нормировки) играют роль пионов.

Лагранжиан теории по-прежнему остается инвариантным относительно преобразований группы $SO(4)$, однако представление группы $SO(4)$ теперь оказывается нелинейным. Под действием преобразования изоспина с бесконечно малыми параметрами $\vec{\theta}$ поле $\vec{\zeta}$ ведет себя как обычный изовектор, а σ — как изоскаляр:

$$\delta \vec{\zeta} = \vec{\theta} \times \vec{\zeta}, \quad \delta \sigma = 0, \quad (19.5.12)$$

поэтому лагранжиан (19.5.10) инвариантен относительно вращений изоспина. С другой стороны, под действием преобразований нарушенной симметрии, параметризующихся бесконечно малыми векторами $\vec{\epsilon}$, первоначальные поля преобразуются как

$$\delta \vec{\phi} = 2\vec{\epsilon} \phi_4, \quad \delta \phi_4 = -2\vec{\epsilon} \cdot \vec{\phi}. \quad (19.5.13)$$

Из уравнения (19.5.7) тогда находим

$$\delta \vec{\zeta} = \vec{\epsilon}(1 - \vec{\zeta}^2) + 2\vec{\zeta}(\vec{\epsilon} \cdot \vec{\zeta}), \quad \delta \sigma = 0. \quad (19.5.14)$$

Лагранжиан (19.5.10) инвариантен (19.5.14), поскольку $\vec{D}_\mu$ под его действием преобразуется следующим образом:

$$\delta \vec{D}_\mu = 2(\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}) \times \vec{D}_\mu. \quad (19.5.15)$$

Благодаря правилу (19.5.15) $\vec{D}_\mu$ часто называют *ковариантной производной* пионного поля.

Правилами преобразования (19.5.12) и (19.5.14) определяется так называемое *нелинейное представление* группы $SU(2) \times SU(2)$ [25].

Общая теория нелинейных представлений групп Ли будет представлена в следующем параграфе; здесь мы покажем, что с точностью до переопределения полей преобразования (19.5.12) и (19.5.14) задают наиболее общее представление $SU(2) \times SU(2)$, причем изоспиновая подгруппа $SU(2)$ реализуется линейно по $\vec{\zeta}$.

Как можно видеть, любое взаимодействие новых пионных полей устроено так, что соответствующая вершина содержит пространственно-временную производную: такое взаимодействие является слабым, если малы энергии пионов (мы дадим более строгую формулировку этого утверждения ниже). Таким образом, при достаточно малых энергиях пионов эффективный лагранжиан можно использовать для воспроизведения в древесном приближении низкоэнергетических теорем алгебры токов. Единственное условие, необходимое для этого, — $SO(4)$ -инвариантность эффективного лагранжиана. Поскольку поле σ ведет себя как скаляр относительно преобразований $SO(4)$, оно не играет никакой роли в обеспечении $SO(4)$ -инвариантности эффективного лагранжиана и может быть просто опущено¹⁾. Конечно, такая процедура меняет физическое содержание теории, но выражения для амплитуд, которые дают низкоэнергетические пионные теоремы, остаются неизменными. Лагранжиан (19.5.10) в этом случае может быть приведен к виду

$$\mathcal{L} = -\frac{F^2}{2} \vec{D}_\mu \vec{D}^\mu = -\frac{F^2}{2} \frac{\partial_\mu \vec{\zeta} \cdot \partial^\mu \vec{\zeta}}{(1 + \vec{\zeta}^2)^2}, \quad (19.5.16)$$

где $F = 2\langle\sigma\rangle = 2|\mathcal{M}|/\sqrt{\lambda}$ (как мы увидим ниже, константа F совпадает с константой F_π , введенной в предыдущем параграфе). Часто оказывается удобным работать с пионным полем, обладающим следующей нормировкой:

$$\vec{\pi} \equiv F\vec{\zeta}, \quad (19.5.17)$$

в этом случае лагранжиан (19.5.16) приобретает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}}{(1 + \vec{\pi}^2/F^2)^2}. \quad (19.5.18)$$

Множитель $1/F$ играет роль вершины взаимодействия, проявляющегося при учете каждого дополнительного пиона. Лагранжиан (19.5.18) описывает теорию, которую называют “нелинейной σ -моделью” (для случая симметрии $SU(2) \times SU(2)$, спонтанно нарушенной до $SU(2)$).

Важное замечание: для вывода уравнения (19.5.18) необязательно начинать с лагранжиана (19.5.1) “линейной σ -модели”. Более того, вообще нет необходимости выбирать *какую-либо* теорию специального вида. Уравнение (19.5.18) можно использовать просто потому, что оно инвариантно относительно преобразований (19.5.12), (19.5.14) груп-

¹⁾ Можно рассмотреть предел, в котором $\mathcal{M}$ и λ одновременно стремятся к бесконечности, а вакуумное среднее σ остается постоянным.

пы $SO(4)$. Из алгебры токов следует, что этого достаточно, чтобы получить правильные выражения для амплитуд процессов с участием низкоэнергетических пионов.

Через несколько лет после того, как была разработана техника эффективных лагранжианов для процессов с участием низкоэнергетических пионов, появилось другое обоснование ее применения [26], не опирающееся на алгебру токов. Благодаря ему стало возможно выполнять вычисления, выходящие за рамки низкоэнергетического приближения для пионов. Это обоснование опирается на предположение (к настоящему моменту еще не ставшему строгой теоремой) о том, что при вычислении некоторой физической амплитуды в теории общего вида, лагранжиан которой включает нужные нам степени свободы и удовлетворяет предполагаемым симметриям, просто придется конструировать выражение для амплитуды общего вида, которое согласовано с общими принципами относительности и квантовой механики, а так же с предполагаемыми симметриями теории. Именно этой точки зрения мы придерживались в томе I. В данном случае нужными нам степенями свободы являются сами голдстоуновские бозоны, частицы, которые описываются состояниями α и β , а также любые другие частицы, которые могут быть рождены в процессах с участием низкоэнергетических голдстоуновских бозонов. Если принять такое обоснование использования техники эффективных лагранжианов, исчезает необходимость бороться с трудностями метода алгебры токов. Более важным является то, что такой подход позволяет получать результаты, выходящие за пределы низкоэнергетического приближения и позволяющие изучать любое нарушение внутренней симметрии.

Согласно этому подходу, для того чтобы вычислить амплитуды взаимодействия пионов в произвольном порядке по энергии пионов, необходимо использовать лагранжиан наиболее общего вида, включающий пионное поле $\vec{\zeta}$, преобразующееся согласно (19.5.12) и (19.5.14):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{F^2}{2}\vec{D}_\mu\vec{D}^\mu - \frac{c_4}{4}(\vec{D}_\mu\vec{D}^\mu)^2 - \frac{c'_4}{4}(\vec{D}_\mu\cdot\vec{D}_\nu)(\vec{D}^\mu\cdot\vec{D}^\nu) - \dots \quad (19.5.19)$$

Обозначенные троеточием члены будут содержать высшие степени ковариантной производной $\vec{D}_\mu$ или высшие ковариантные производные, общая структура которых описана в следующем параграфе. Коэффициенты c_4 и c'_4 являются безразмерными, а любые члены высшего порядка будут содержать коэффициенты с размерностью отрицательных степеней энергии.

Рассмотрим процесс общего вида, содержащий в начальном и конечном состояниях произвольное число пионов. Будем предполагать, что их энергии и импульсы имеют по меньшей мере порядок Q , малый по сравнению с типичным масштабом энергий квантовой хромодинамики (например, по сравнению с массой нуклона или ρ -частицы).

Хотя лагранжианы типа (19.5.19) неперенормируемы в обычном смысле, в § 12.3 было показано, что они могут обеспечивать конечные ответы для амплитуд, если содержат все возможные члены, которые позволяет симметрия, поскольку в этом случае для каждой возникающей бесконечности будет существовать контрчлен. Если определить перенормированные значения констант F^2 , c_4 , c'_4 , ... фиксируя различные амплитуды рассеяния голдстоуновских бозонов при энергиях порядка Q , то основной вклад в фейнмановские диаграммы будут давать виртуальные импульсы, также имеющие порядок Q (поскольку перенормировка делает их конечными и в теории нет никакой другой величины, способной сыграть роль параметра ультрафиолетового обрезания). Далее можно развивать теорию возмущений в виде разложения по степеням Q .

Каждая производная, и, следовательно, каждая ковариантная производная $\vec{D}_\mu$ в вершине взаимодействия, изменяет порядок величины диаграммы на лишний множитель Q ; каждый внешний пионный пропагатор вносит множитель Q^{-2} ; каждое интегрирование по фазовому пространству d^4q (петли в диаграмме) дает множитель Q^4 . Таким образом, связанная диаграмма общего вида оказывается пропорциональной Q^ν , где

$$\nu = \sum_i V_i d_i - 2I + 4L. \quad (19.5.20)$$

Здесь d_i — число производных в вершине взаимодействия i , V_i — число вершин взаимодействия типа i в диаграмме, I — число внутренних пионных линий, а L — число петель. Эти величины связаны известным топологическим соотношением (см. уравнение (4.4.7)):

$$L = I - \sum_i V_i + 1, \quad (19.5.21)$$

поэтому I можно исключить. В результате мы получим, что

$$\nu = \sum_i V_i (d_i - 2) + 2L + 2. \quad (19.5.22)$$

Главная особенность этого выражения состоит в том, что каждый член в нем положителен: любая вершина взаимодействия в (19.5.19) содержит по меньшей мере две производные и, кроме того, $L \geq 0$. Таким образом, ведущий член в любом процессе имеет порядок Q^2 и возникает исключительно на *древесном* уровне теории возмущений (т.е. в случае $L = 0$) для диаграмм, построенных с использованием члена в (19.5.19), содержащего две производные (т.е. $V_i = 0$ для $d_i \neq 2$):

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{F^2}{2} \vec{D}_\mu \vec{D}^\mu = -\frac{1}{2} \frac{\partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}}{(1 + \vec{\pi}^2/F^2)^2}. \quad (19.5.23)$$

Например, инвариантная амплитуда M , возникающая при учете S -матричного элемента пион-пионного рассеяния

$$S = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) M(2\pi)^{-6} (16E_A E_B E_C E_D)^{-1/2}, \quad (19.5.24)$$

в ведущем порядке имеет вид

$$M_{abcd}^{(\nu=2)} = 4F^{-2} [\delta_{ab}\delta_{cd}(-p_A \cdot p_B - p_C \cdot p_D) + \delta_{ac}\delta_{bd}(p_A \cdot p_C + p_B \cdot p_D) + \delta_{ad}\delta_{bc}(p_A \cdot p_D + p_B \cdot p_C)], \quad (19.5.25)$$

где a, b, c, d — изовекторные индексы пионов A, B, C, D соответственно (влияние ненулевой массы пиона будет в этом параграфе учтено чуть ниже). Использование выражения (19.5.25) в качестве ведущего члена не подразумевает ни малости константы взаимодействия λ в первоначальном лагранжиане (19.5.1), ни даже справедливости этой формулы для лагранжиана (19.5.1). Все, что оказывается нужным, — малость характерной энергии пионов Q в процессе.

Следующий член в амплитуде любого процесса с участием голдстоуновских бозонов будет иметь порядок Q^4 . Подобный вклад в амплитуду возникает от однопетлевых диаграмм для лагранжиана (19.5.16) и от древесных диаграмм, построенных с учетом вершин в (19.5.16) и вершины, возникающей из-за членов в уравнении (19.5.19) с $d = 4$:

$$M_{abcd}^{(\nu=4)} = \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{F^4} \left[-\frac{1}{2\pi^2} s^2 \ln(-s) - \frac{1}{12\pi^2} (u^2 - s^2 + 3t^2) \ln(-t) - \frac{1}{12\pi^2} (t^2 - s^2 + 3u^2) \ln(-u) + \frac{1}{3\pi^2} (s^2 + t^2 + u^2) \ln \Lambda^2 - \frac{1}{2} c_4 s^2 - \frac{1}{4} c'_4 (t^2 + u^2) \right] + \text{перекрестные члены}, \quad (19.5.26)$$

где “перекрестные члены” получаются заменами $B \rightarrow C, C \rightarrow B$ и $B \rightarrow D, D \rightarrow B$, а s, t и u — мандельштамовские переменные

$$s = -(p_A + p_B)^2, \quad t = -(p_A - p_C)^2, \quad u = -(p_A - p_D)^2.$$

Зависимость этого результата от параметра обрезания Λ можно исключить, если переопределить константы c_4 и c'_4 . Перенормированные вершины имеют следующий вид:

$$c_{4R} = c_4 - \frac{2}{3\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right), \quad (19.5.27)$$

$$c'_{4R} = c'_4 - \frac{4}{3\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right), \quad (19.5.28)$$

где μ — произвольный масштаб порядка Q , добавленный для того, чтобы сделать логарифмы хорошо определенными. Если выразить

ответ через перенормированные величины, мы получим

$$M_{abcd}^{(\nu=4)} = \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{F^4} \left[-\frac{1}{2\pi^2} s^2 \ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right) - \frac{1}{12\pi^2} (u^2 - s^2 + 3t^2) \ln\left(\frac{-t}{\mu^2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12\pi^2} (t^2 - s^2 + 3u^2) \ln\left(\frac{-u}{\mu^2}\right) - \frac{1}{2} c_{4R} s^2 - \frac{1}{4} c'_{4R} (t^2 + u^2) \right] + \\ + \text{перекрестные члены.} \quad (19.5.29)$$

Такого рода вычисления можно выполнять в сколь угодно высоком порядке по Q , в результате в каждом порядке мы всегда будем получать конечное число новых констант взаимодействия, перенормировка которых приведет к исчезновению зависимости физических амплитуд от параметра обрезания. Заметим, что отношение ведущих поправок с $\nu = 2$ и $\nu = 4$ имеет порядок $Q^2/8\pi^2 F^2$, поэтому это разложение остается полезным, пока энергии пионов остаются много меньшими, чем $2\pi F$.

Такое разложение может также быть использовано для того, чтобы связать параметр F с амплитудой распада пиона F_π . Вспомня правило преобразования (19.5.14) для $\vec{\zeta}$, мы получим следующее выражение для аксиально-векторного тока:

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{A}^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \vec{\zeta})} \cdot \delta \vec{\zeta},$$

и, таким образом,

$$\vec{A}^\mu = -(1 - \vec{\zeta}^2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \vec{\zeta})} - 2\vec{\zeta} \vec{\zeta} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \vec{\zeta})} \right) \quad (19.5.30)$$

(величина $\vec{A}^\mu$ является нетеровским током, соответствующим симметрии, генерируемой оператором $2\vec{x}$). Интегрируя по всем другим полям и используя уравнение (19.5.17), чтобы выразить $\vec{\zeta}$ через канонически нормированное пионное поле π , мы найдем, что

$$\vec{A}^\mu = F \left[\partial^\mu \vec{\pi} \frac{(1 - \vec{\pi}^2/F^2)}{(1 + \vec{\pi}^2/F^2)} + \frac{2\vec{\pi}(\vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi})}{F^2(1 + \vec{\pi}^2/F^2)^2} \right] + \dots \quad (19.5.31)$$

Если воспользоваться разложением по степеням энергии пиона и вычислить амплитуду $\langle \text{BAK} | \vec{A}^\mu | \pi \rangle$, можно убедиться в том, что в низшем порядке амплитуда распада пиона равна

$$F_\pi = F. \quad (19.5.32)$$

Более того, из лоренц-инвариантности и уравнения (19.5.22) следует, что поправки высшего порядка должны быть пропорциональны степеням величины p_π^2/F_π^2 , обращающейся в нуль в пределе нулевой массы пиона. Поэтому уравнение (19.5.32) в пределе $m_\pi \rightarrow 0$ на самом деле оказывается точным. Таким образом, можно предположить, что наше

разложение должно работать при энергиях пионов, много меньших чем $2\pi F_\pi = 1200$ МэВ.

Для того чтобы понять связь этих результатов с экспериментом, необходимо принять, что масса пиона не равна нулю. Временная компонента 4-импульса пиона не может оказаться меньше чем m_π , если пион находится на массовой оболочке. Поэтому считая степени характерной энергии пиона и его импульса Q , мы должны принять, что m_π имеет порядок Q . Как было показано в предыдущем параграфе, величина m_π^2 пропорциональна некоторой линейной комбинации масс кварков, поэтому формула (19.5.22) для вклада порядка Q^ν в заданную фейнмановскую диаграмму должна быть переписана в следующем виде:

$$\nu = \sum_i V_i(d_i + 2m_i - 2) + 2L + 2, \quad (19.5.33)$$

где m_i — число множителей, пропорциональных кварковым массам во взаимодействии типа i .

Взаимодействия, включающие кварковые массы, можно отличать по их трансформационным свойствам относительно $SU(2) \times SU(2)$ или, что эквивалентно, $SO(4)$. Из уравнения (19.4.34) следует, что члены первого порядка по кварковым массам преобразуются как линейные комбинации двух скаляров, четвертой компоненты кирального 4-вектора Φ_n^+ с коэффициентом $m_u + m_d$ и третьей компоненты другого кирального 4-вектора Φ_n^- с коэффициентом $m_u - m_d$. Таким образом, члены $\Delta\mathcal{L}^+$ и $\Delta\mathcal{L}^-$ первого порядка по $m_u + m_d$ и $m_u - m_d$ в эффективном лагранжиане должны иметь такие же трансформационные свойства, как у четвертой и третьей компоненты кирального 4-вектора соответственно, и, кроме того, должны являться лоренцевыми скалярами. Одним из киральных 4-векторов с четвертой компонентой, преобразующейся как скаляр, является вектор ϕ_n , о котором упоминалось в начале параграфа. Согласно уравнению (19.5.9) его четвертая компонента равна $\sigma(1 - \tilde{\zeta}^2)/(1 + \tilde{\zeta}^2)$. Множитель σ можно отбросить, поскольку он является киральным скаляром и не оказывает влияния на трансформационные свойства четвертой компоненты относительно киральных преобразований. Нормировку можно зафиксировать требованием, чтобы коэффициент при $\tilde{\pi}^2 = F_\pi^2 \tilde{\zeta}^2$ был равен $-m_\pi^2/2$, и поэтому с точностью до аддитивной постоянной

$$\Delta\mathcal{L}^+ = -\frac{m_\pi^2 F_\pi^2}{2} \frac{\tilde{\zeta}^2}{1 + \tilde{\zeta}^2} = -\frac{m_\pi^2}{2} \frac{\tilde{\pi}^2}{1 + \tilde{\pi}^2/F_\pi^2}. \quad (19.5.34)$$

В следующем параграфе будет показано, что такой вид имеет единственная скалярная функция пионного поля, не содержащая производных и преобразующаяся как четвертая компонента кирального 4-вектора. С другой стороны, *не существует* скалярных функций пионного поля, не содержащих производных и преобразующихся как

третья компонента кирального 4-вектора, поскольку такая функция должна быть нечетной относительно изменения знака пионного поля, т. е. преобразовываться как псевдоскаляр, а не скаляр. Таким образом, взаимодействие (19.5.34) является единственным, для которого $d_i = 0$ и $m_i = 1$. Замечательно, что разрушающая изоспиновую симметрию разница между массами u - и d -кварков не только не оказывает никакого влияния на массы пионов, как было показано в предыдущем параграфе, но и не влияет на мультипионные взаимодействия, не содержащие производных.

Теперь мы готовы получить выражения для ведущих членов с $\nu = 2$ в пион-пионной амплитуде рассеяния. Согласно уравнению (19.5.33) такие члены могут возникать только для древесных диаграмм с вершиной взаимодействия для $d = 2$, $m = 0$, заданной уравнением (19.5.23), или с вершиной взаимодействия для $d = 0$, $m = 0$, заданной уравнением (19.5.34). В данном порядке амплитуда M , определенная в уравнении (19.5.24), имеет вид

$$M_{abcd}^{(\nu=2)} = 4F_\pi^{-2} [\delta_{ab}\delta_{cd}(s - m_\pi^2) + \delta_{ac}\delta_{bd}(t - m_\pi^2) + \delta_{ad}\delta_{bc}(u - m_\pi^2)]. \quad (19.5.35)$$

В частности, возле порога реакции $s = 4m_\pi^2$, $t = u = 0$ и

$$\begin{aligned} M_{abcd}^{(\nu=2)}(\text{порог}) &= 4m_\pi^2 F_\pi^{-2} [3\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}] = \\ &= 4m_\pi^2 F_\pi^{-2} [7M_{ab,cd}^{(0)} - 2M_{ab,cd}^{(2)}], \end{aligned} \quad (19.5.36)$$

где $M^{(0)}$ и $M^{(2)}$ — соответствующие тензоры, представляющие двухпионные состояния с изоспином $T = 0$ и $T = 2$:

$$M_{ab,cd}^{(0)} = \frac{1}{3} \delta_{ab}\delta_{cd}, \quad (19.5.37)$$

$$M_{ab,cd}^{(2)} = \frac{1}{2} (\delta_{ac}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} - \frac{2}{3} \delta_{ab}\delta_{cd}), \quad (19.5.38)$$

нормированные так, что $\text{Tr } M^{(T)} = 2T + 1$. Этот результат обычно выражают через длины рассеяния. Согласно, §§ 3.6, 3.7 длина рассеяния a_T для двух пионов в состоянии с изоспином T равна [27] величине $1/32\pi m_\pi$, умноженной на коэффициент при $M^{(T)}$ в уравнении (19.5.36):

$$a_0 = \frac{7m_\pi}{8\pi F_\pi^2} = 0,16 m_\pi^{-1}, \quad a_2 = -\frac{m_\pi}{4\pi F_\pi^2} = -0,046 m_\pi^{-1}.$$

Пионные длины рассеяния довольно трудно измерить, но точные измерения различных физических величин для процессов, подобных $\pi + N \rightarrow \pi + \pi + N$ и $K \rightarrow \pi + \pi + e + \nu$ дают следующий результат: $a_0 = (0,26 \pm 0,05)m_\pi^{-1}$, $a_2 = (-0,028 \pm 0,012)m_\pi^{-1}$, что вполне согласуется со значениями длин рассеяния, предсказанными теорией. Имеет смысл предполагать, что высшие поправки по $m_\pi/2\pi F_\pi$ позволяют улучшить это соответствие.

Этот формализм можно расширить так, чтобы научиться описывать взаимодействия пионов с нуклонами и другими частицами. Простейший способ сделать это состоит в том, чтобы добавить в лагранжиан член, содержащий нуклонное дублетное поле N :

$$\mathcal{L}_N = -\bar{N}(\not{\partial} + g[\phi_4 + 2i\vec{t} \cdot \vec{\phi}\gamma_5])N, \quad (19.5.39)$$

где $\vec{t}$ — изоспиновый матричный вектор для изоспина $1/2$ (т. е. половина спинора Паули $\vec{\tau}$). Такое взаимодействие инвариантно относительно преобразований группы $SU(2) \times SU(2)$:

$$\delta\vec{\phi} = 2\vec{\epsilon}\phi_4, \quad \delta\phi_4 = -2\vec{\epsilon} \cdot \vec{\phi}, \quad (19.5.40)$$

$$\delta N = -2i\gamma_5\vec{\epsilon} \cdot \vec{t}N. \quad (19.5.41)$$

Теперь нужно представить нуклонное поле N как поворот R из группы $SO(4)$ в представлении (19.5.41), действующий на новое нуклонное поле $\tilde{N}$:

$$N \equiv \frac{(1 - 2i\gamma_5\vec{t} \cdot \vec{\zeta})}{\sqrt{1 + \vec{\zeta}^2}} \tilde{N}, \quad (19.5.42)$$

где $\vec{\zeta}$ вновь задается уравнением (19.5.7). Член в (19.5.39), не содержащий производных, зависит только от $\tilde{N}$ и σ :

$$\bar{N}[\phi_4 + 2i\vec{t} \cdot \vec{\phi}\gamma_5]N = \sigma\tilde{N}\tilde{N}.$$

С другой стороны, член с производными содержит производные от матрицы, фигурирующей в уравнении (19.5.41), поэтому лагранжиан нуклонов должен иметь вид

$$\mathcal{L}_N = -\tilde{N}\left[\not{\partial} + g\sigma + 2i\frac{\vec{t} \cdot (\vec{\zeta} \times \not{\partial}\vec{\zeta})}{1 + \vec{\zeta}^2} + 2i\gamma_5\vec{t} \cdot \not{\vec{\phi}}\right]\tilde{N}, \quad (19.5.43)$$

или, если выразить его через канонически нормированное пионное поле (19.5.17),

$$\mathcal{L}_N = -\tilde{N}\left[\not{\partial} + g\sigma + \frac{2i\vec{t} \cdot (\vec{\pi} \times \not{\partial}\vec{\pi})}{F_\pi^2[1 + \vec{\pi}^2/F_\pi^2]} + \frac{2i\gamma_5\vec{t} \cdot \not{\partial}\vec{\pi}}{F_\pi[1 + \vec{\pi}^2/F_\pi^2]}\right]\tilde{N}. \quad (19.5.44)$$

Поскольку вакуумное среднее σ не равно нулю, мы видим, что масса покоя нуклона также не равна нулю; это невозможно в том случае, если симметрия относительно преобразований (19.5.40), (19.5.41) не нарушена.

По построению лагранжиан (19.5.44) является кирально-инвариантным. В этом можно убедиться непосредственно, воспользовавшись ранее полученными трансформационными свойствами полей σ и $\vec{\pi}$ относительно киральной симметрии, а также замечая, что под действием киральных преобразований (19.5.40), (19.5.41) новое нуклонное поле, определенное согласно (19.5.42), преобразуется как

$$\delta\tilde{N} = 2i\vec{t} \cdot [\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}]\tilde{N}. \quad (19.5.45)$$

Таким образом, киральное преобразование поворачивает поле $\tilde{N}$ (см. (19.5.15)) так же, как величину $\vec{D}_\mu$, но теперь речь идет о представлении $T = 1/2$. Параметр изоспинового вращения $\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}$ зависит от положения в пространстве–времени, поэтому производные $\tilde{N}$ имеют другие трансформационные свойства относительно киральных преобразований. Однако легко проверить, что комбинация первого и третьего членов в уравнении (19.5.43) ведет себя как кирально-ковариантная производная:

$$\delta \mathcal{D}_\mu \tilde{N} = 2i\vec{t} \cdot [\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}] \mathcal{D}_\mu \tilde{N}, \quad (19.5.46)$$

где

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{N} \equiv \left[\partial_\mu + 2i \frac{\vec{t} \cdot (\vec{\zeta} \times \partial_\mu \vec{\zeta})}{1 + \vec{\zeta}^2} \right] \tilde{N}. \quad (19.5.47)$$

Таким образом, лагранжиан (19.5.43) (и, следовательно, (19.5.44)) инвариантен относительно киральных преобразований, поскольку он инвариантен относительно вращений изоспина и построен исключительно из компонент $\tilde{N}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{N}$, σ и $\vec{D}_\mu$, а для каждой из этих величин изоспин под действием киральных преобразований поворачивается одним и тем же образом.

В этом случае исходный вид лагранжиана вновь оказывается неважен. Как и в случае чисто пионной теории, рассмотренной выше, единственным существенным обстоятельством оказывается его киральная инвариантность. Лагранжиан должен сохранять изоспин и состоять из компонент $\tilde{N}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{N}$ и $\vec{D}_\mu$ (и ковариантных производных этих величин). Кирально-инвариантный лагранжиан наиболее общего вида, являющийся билинейным по новому нуклонному полю и содержащий не более чем одну производную, имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{N,0} = -\tilde{N}[\not{\partial} + m_N + 2ig_A\gamma_5\vec{t} \cdot \vec{\not{D}}]\tilde{N}, \quad (19.5.48)$$

или, если переписать его через пионное поле (19.5.17):

$$\mathcal{L}_{N,0} = -\tilde{N} \left[\not{\partial} + m_N + \frac{2i\vec{t} \cdot (\vec{\pi} \times \not{\partial} \vec{\pi})}{F_\pi^2[1 + \vec{\pi}^2/F_\pi^2]} + \frac{2ig_A\gamma_5\vec{t} \cdot \not{\partial} \vec{\pi}}{F_\pi[1 + \vec{\pi}^2/F_\pi^2]} \right] \tilde{N}. \quad (19.5.49)$$

Заметим, что в последний член в уравнении (19.5.48) была вставлена произвольная константа g_A . Дело в том, что он инвариантен сам по себе, и киральная симметрия не позволяет зафиксировать значение коэффициента перед ним (например, коэффициент перед третьим членом в уравнении (19.5.43) определен тем требованием, чтобы первый и третий члены вместе давали кирально-инвариантную величину). Построив возникающий из нуклонного лагранжиана (19.5.48) дополнительный вклад в аксиально-векторный ток, можно проверить, что постоянная g_A играет роль константы аксиально-векторного взаимодействия, отвечающего за бета-распад. Интегрируя по частям

и используя уравнение Дирака, мы найдем, что пион-нуклонное взаимодействие $-2ig_A \bar{N} \gamma_5 \vec{t} (\gamma^\mu \partial_\mu \vec{\pi}) \tilde{N} / F_\pi$ эквивалентно на массовой оболочке взаимодействию $-4im_N g_A \bar{N} \gamma_5 \vec{t} \cdot \vec{\pi} \tilde{N} / F_\pi$, соответственно, константа пион-нуклонного взаимодействия равна

$$G_{\pi N} = 2m_N g_A / F_\pi.$$

Это уравнение — не что иное, как соотношение Голдбергера–Треймана (19.4.33).

Если бы в этом вычислении использовался лагранжиан (19.5.44), мы бы получили соотношение Голдбергера–Треймана с $g_A = 1$. Однако так получается только тогда, когда взаимодействие имеет вид (19.5.39). Можно было бы также добавить неперенормируемое взаимодействие, содержащее производные²⁾:

$$\mathcal{L}'_N = ig' \bar{N} [(\vec{t} \cdot \vec{\phi} \partial \phi_4 - \phi_4 \vec{t} \cdot \vec{\partial} \cdot \vec{\phi}) \gamma_5 + \vec{t} \cdot (\vec{\phi} \times \vec{\partial} \phi)] N. \quad (19.5.50)$$

Легко непосредственно показать, что его можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{L}'_N = -8i\sigma^2 g' \bar{N} \vec{t} \cdot \vec{\partial} \gamma_5 \tilde{N}.$$

Поскольку вакуумное среднее σ не равно нулю, это взаимодействие дает вклад в константу пион-нуклонного взаимодействия и в постоянную g_A . Следовательно нарушенная симметрия $SU(2) \times SU(2)$ не фиксирует значение $g_A = 1$, добавлением взаимодействия (19.5.50) и последующей подстройкой g' можно сделать константу g_A какой угодно величины.

Рассмотрим теперь, как можно использовать этот лагранжиан для вычисления амплитуд реакций с участием пионов и нуклонов. Особенное внимание необходимо обратить на структуру пропагаторов нуклонов, поскольку нуклон ни при каких обстоятельствах не становится, подобно пиону, “мягкой” частицей. Нуклонной линии, которая несет 4-импульс p порядка m_N , входит в диаграмму и затем поглощает во взаимодействиях с пионами суммарный 4-импульс q , компоненты которого много меньше m_N , соответствует пропагатор

$$\frac{-i(\not{p} + \not{q}) + m_N}{(p + q)^2 + m_N^2} \xrightarrow{q \rightarrow 0} \frac{-i\not{p} + m_N}{2p \cdot q} \quad (19.5.51)$$

²⁾ Левая и правая части нуклонного дублета преобразуются соответственно по представлениям $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ группы $SU(2) \times SU(2)$. Билинейная форма $\bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 N$ равна сумме членов, квадратичных по $(1/2, 0)$ - и $(0, 1/2)$ -представлениям, поэтому она преобразуется как прямая сумма $(1, 0)$ -, $(0, 0)$ - и $(0, 1)$ -представлений. В уравнении (19.5.50) мы имеем $(1, 0) + (0, 1)$ -члены в $\bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 N$, спаренные с антисимметричным тензором, построенным из $SU(2) \times SU(2)$ 4-векторов ϕ_n и $\partial_\mu \phi_n$. В их инвариантности относительно преобразований (19.5.40), (19.5.41) можно убедиться непосредственно.

(те вклады, которыми мы пренебрегли, можно учесть добавлением в нуклонный лагранжиан членов с высшими производными). Снова предположим, что внешние 4-импульсы пионов имеют порядок Q и определим все перенормированные постоянные в точках нормировки порядка Q . Тогда все интегралы будут сходиться таким образом, что внутренние пионные линии также будут нести импульс Q . Из уравнения (19.5.51) следует, что внутренние нуклонные линии дают вклад порядка $1/Q$. Фейнмановская диаграмма общего вида для любого такого процесса будет давать вклад в инвариантную амплитуду порядка Q^ν , где теперь

$$\nu = \sum_i V_i(d_i + 2m_i) - 2I_\pi - I_N + 4L. \quad (19.5.52)$$

Здесь V_i — число вершин, связанных со взаимодействиями типа i , d_i — число производных в каждом таком взаимодействии, m_i — число множителей в каждом взаимодействии, содержащих массы кварков, I_π и I_N — числа внутренних пионных и нуклонных линий, а L — число петель в данной диаграмме. Удобно воспользоваться известными топологическими соотношениями для связных графов:

$$L = I_\pi + I_N - \sum_i V_i + 1 \quad (19.5.53)$$

и

$$2I_N + E_N = \sum_i V_i n_i, \quad (19.5.54)$$

где n_i — число нуклонных полей, участвующих во взаимодействии типа i , а E_N — число внешних нуклонных линий. Исключая I_N и I_π , получаем

$$\nu = \sum_i V_i \left(d_i + 2m_i + \frac{n_i}{2} - 2 \right) + 2L - \frac{E_N}{2} + 2. \quad (19.5.55)$$

Важно, что коэффициент $d_i + 2m_i + \frac{1}{2}n_i - 2$ в первом члене всегда положителен или равен нулю. Уже было показано, что для чисто пионных взаимодействий с $n_i = 0$ имеет место соотношение $d_i + 2m_i \geq 2$; если теперь внимательно посмотреть на уравнение (19.5.49), то можно понять, что для пион-нуклонных взаимодействий с $n_i = 2$ и $m_i = 0$ справедливо неравенство $d_i \geq 2$. Следовательно, ведущими членами при $Q \ll 2\pi F_\pi$ являются древесные диаграммы (т. е. $L = 0$), для которых

$$d_i + 2m_i + \frac{n_i}{2} - 2 = 0.$$

Взаимодействия, удовлетворяющие этому соотношению, представлены уравнениями (19.5.23), (19.5.34) и (19.5.49), кроме того, необходимо учесть все возможные взаимодействия с $d_i = 0$ и $n_i = 4$:

$$(\bar{\tilde{N}}\Gamma_\alpha\tilde{N})(\bar{\tilde{N}}\tilde{N}^\alpha\tilde{N}), \quad (19.5.56)$$

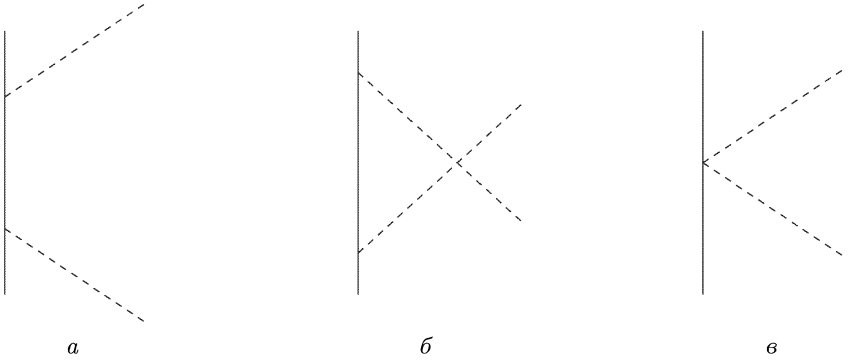


Рис. 19.3. Фейнмановские диаграммы, которые вместе с эффективным киральным лагранжианом используются для вычисления амплитуды рассеяния пиона на нуклоне. Пунктирные линии соответствуют пионам, сплошные линии — нуклонам

где Γ_α и Γ^α — произвольные матрицы в спиновом и изоспиновом пространствах, которые позволяют построить инвариантные относительно преобразований Лоренца, пространственной инверсии и вращения изоспина четырехфермионные взаимодействия. Эти взаимодействия оказываются важными в мультинуклонных процессах [29], которые здесь рассматриваться не будут.

Применим теперь развитый метод к пион-нуклонному рассеянию. Когда энергии пионов имеют порядок m_π , амплитуда рассеяния пиона на нуклоне приближенно равна сумме диаграмм, изображенных на рис. 19.3; каждая из этих диаграмм дает в инвариантную амплитуду вклад порядка m_π . Однако возле порога реакции ведущим оказывается вклад диаграммы, изображенной на рис. 19.3 (в), другие вклады оказываются подавленными, благодаря дополнительному множителю m_π/m_N . Он возникает за счет того, что возле порога в покоящейся системе отсчета импульсы q, q' пионов в начальном и конечном состояниях и импульсы нуклонов p, p' связаны следующим соотношением:

$$q = q' = (0, 0, 0, m_\pi) = \left(\frac{m_\pi}{m_N}\right)p = \left(\frac{m_\pi}{m_N}\right)p'. \quad (19.57)$$

Тогда вклад в инвариантную амплитуду от диаграмм, изображенных на рис. 19.3 (а) или рис. 19.3 (б) пропорционален

$$\begin{aligned} \bar{u}\gamma_5 \not{q} \frac{(-i(\not{p} \pm \not{q}) + m_N)}{(p \pm q)^2 + m_N^2} \gamma_5 \not{q} u &= \frac{m_\pi^2 \bar{u}\gamma_5(-i\not{p}(1 \pm m_\pi/m_N) + m_N)\gamma_5 u}{(\mp 2m_\pi m_N - m_\pi^2)} = \\ &= \frac{\mp m_\pi}{2m_N \pm m_\pi} \bar{u}(i\not{p}(1 \pm m_\pi/m_N) + m_N)u = \frac{m_\pi^2}{2m_N \pm m_\pi}, \end{aligned}$$

где u — дираковский спинор, удовлетворяющий условию $\bar{u}u = 1$. Диаграмма, изображенная на рис. 19.3 (в) дает в M вклад порядка m_π . Амплитуду можно переписать в виде матрицы 2×2 , описывающей

различные состояния изоспина нуклона:

$$M_{ba} = \frac{-2i}{F_\pi^2} t_c \epsilon_{abc} \bar{u}(-i\not{q} - i\not{q}')u,$$

где q' и q — 4-импульсы пиона в начальном и конечном состояниях, b и a — соответствующие изовекторные индексы. Если воспользоваться уравнением (19.5.57) и уравнением Дирака в импульсном пространстве: $(i\gamma_\mu p^\mu + m_N)u = 0$, это выражение можно переписать в виде

$$M_{ba} = \frac{-4im_\pi}{F_\pi^2} t_c \epsilon_{abc} = \frac{-4m_\pi}{F_\pi^2} \vec{t} \cdot [\vec{t}'^{(\pi)}]_{ba}, \quad (19.5.58)$$

где $[t_c^{(\pi)}]_{ba} \equiv -i\epsilon_{bac}$ — пионная изовекторная матрица. Собственные значения матрицы $\vec{t} \cdot \vec{t}'^{(\pi)}$ для состояний с полным изоспином T равны

$$\frac{1}{2} \left(T(T+1) - 2 - \frac{3}{4} \right),$$

поэтому для состояний с изоспинами $T = 1/2$ и $T = 3/2$ инвариантные амплитуды имеют вид [30]

$$M_{1/2} = 4m_\pi/F_\pi^2, \quad M_{3/2} = -2m_\pi/F_\pi^2.$$

Обычно ответ выражают через длины рассеяния, которые определяются как инвариантные амплитуды, деленные на $4\pi(1 + m_\pi/m_N)$:

$$a_{1/2} = \frac{m_\pi}{\pi F_\pi^2(1 + m_\pi/m_N)} = 0,15 \, m_\pi^{-1}, \quad (19.5.59)$$

$$a_{3/2} = -\frac{m_\pi}{2\pi F_\pi^2(1 + m_\pi/m_N)} = -0,075 \, m_\pi^{-1}. \quad (19.5.60)$$

Эти результаты находятся в разумном согласии с экспериментальными данными [12]: $a_{1/2} = (0,173 \pm 0,003)m_\pi^{-1}$ и $a_{3/2} = (-0,101 \pm \pm 0,004)m_\pi^{-1}$ (выражения (19.5.59) и (19.5.60) справедливы лишь в низшем порядке по m_π/m_N , тем не менее мы удерживаем множитель $1 + m_\pi/m_N$, поскольку он возникает из определения длины рассеяния).

Существует несколько источников поправок следующего порядка по m_π к длинам рассеяния. Одним из таких источников являются диаграммы, изображенные на рис. 19.3 (а) и 19.3 (б), которые номинально имеют ведущий порядок, но оказываются подавленными возле порога благодаря дополнительному множителю m_π/m_N . Существуют, кроме того, древесные диаграммы, содержащие вершину с двумя производными. Особенный интерес представляют диаграммы в древесном порядке, содержащие вершину без производных, возникающую благодаря пропорциональному m_π^2 вкладу в лагранжиан, нарушающему симметрию. Это взаимодействие должно иметь такие же трансформационные свойства относительно киральных и пространственно-временных преобразований, какими обладают операторы в уравнении (19.4.34): они преобразуются как четвертая и третья компоненты двух различных киральных 4-векторов Φ_n^+ и Φ_n^- .

Существуют два очевидных кандидата на роль таких операторов, билинейные относительно нуклонных полей. Вклад в лагранжиан, преобразующийся как Φ_4^+ , имеет вид

$$\bar{N}N = \left(\frac{1 - \vec{\zeta}^2}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \bar{N}\tilde{N} - 4i\left(\frac{\vec{\zeta}}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \cdot \bar{N}\gamma_5\vec{t}\tilde{N},$$

а вклад, преобразующийся как Φ_3^- , выглядит следующим образом:

$$\bar{N}t_3N = \bar{N}\tilde{t}_3\tilde{N} - 2\left(\frac{\zeta_3}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \bar{N}\vec{t} \cdot \vec{\zeta}\tilde{N} - i\left(\frac{\zeta_3}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \bar{N}\gamma_5\tilde{N}.$$

Киральные преобразования действуют на $\tilde{N}$ как обычные вращения изоспина, поэтому они не могут перемешивать скаляр и псевдоскаляр. Таким образом, в самом деле существуют два независимых оператора, преобразующиеся как Φ_4^+ :

$$\left(\frac{1 - \vec{\zeta}^2}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \bar{N}\tilde{N} \quad (19.5.61)$$

и

$$i\left(\frac{\vec{\zeta}}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \cdot \bar{N}\gamma_5\vec{t}\tilde{N}, \quad (19.5.62)$$

и два независимых оператора, преобразующиеся как Φ_3^- :

$$\bar{N}t_3\tilde{N} - 2\left(\frac{\zeta_3}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \bar{N}\vec{t} \cdot \vec{\zeta}\tilde{N}, \quad (19.5.63)$$

$$i\left(\frac{\zeta_3}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \bar{N}\gamma_5\tilde{N}. \quad (19.5.64)$$

В следующем параграфе мы покажем, что эти операторы оказываются единственными билинейными по нуклонным полям формами, которые обладают такими же трансформационными свойствами, как и члены в уравнении (19.4.34). Очевидно, что операторы (19.5.62) и (19.5.64) дают соответственно сохраняющие изоспин и нарушающие изоспиновую симметрию поправки к формуле Голдбергера–Треймана для пион-нуклонного взаимодействия. Рассматривая их вклад в массу нуклона, можно видеть, что в эффективном лагранжиане они проявляются следующим образом (заменим теперь $\vec{\zeta}$ на пионное поле, нормированное обычным образом):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\text{eff}} = & -\frac{\delta m_p + \delta m_n}{2} \left(\frac{1 - \vec{\pi}^2/F_\pi^2}{1 + \vec{\pi}^2/F_\pi^2}\right) \bar{N}\tilde{N} - \\ & - (\delta m_p - \delta m_n) \left[\bar{N}\tilde{t}_3\tilde{N} - \frac{2}{F_\pi^2} \left(\frac{\pi_3}{1 + \vec{\pi}^2/F_\pi^2}\right) \bar{N}\vec{t} \cdot \vec{\pi}\tilde{N} \right], \end{aligned} \quad (19.5.65)$$

где δm_p и δm_n — вклады кварковых массовых членов (19.4.34) в массу протона и нейтрона. Поправка к пион-нуклонной амплитуде рассеяния (снова представленной в виде матрицы в изоспиновом пространст-

ве нуклона) оказывается следующей:

$$\delta M_{ba} = \frac{2[\delta m_p + \delta m_n]}{F_\pi^2} \delta_{ab} + \frac{2[\delta m_p - \delta m_n]}{F_\pi^2} (t_a \delta_{3b} + t_b \delta_{3a}). \quad (19.5.66)$$

Первый член в уравнении (19.5.65) часто называют “ σ -членом”. Второй член играет роль нарушающей изоспиновую симметрию поправки к σ -члену. Он проявляется только в процессах с участием нейтральных пионов, таких как, например, процессы, в которых происходит обмен электрическим зарядом: $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$ и $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$. Хотя поправки к массе нуклона $\delta m_{p,n}$ непосредственно измерить нельзя, в § 19.7 будет показано, что можно вычислить их разницу, зная разницу масс гиперонов и воспользовавшись $SU(3)$ -симметрией. Результат оказывается следующим: $\delta m_p - \delta m_n = -2,5$ МэВ. К сожалению, до сих пор не существует надежной теоретической оценки для коэффициента $\delta m_p + \delta m_n$ перед первым членом в уравнении (19.5.65).

Из уравнения (19.4.34) следует, что в квантовой хромодинамике коэффициенты $\delta m_p + \delta m_n$ и $\delta m_p - \delta m_n$ в уравнении (19.5.66) пропорциональны $m_u + m_d$ и $m_u - m_d$ соответственно. Как мы увидим в § 19.7, m_u и m_d , строго говоря, не совпадают, и эти коэффициенты оказываются величинами одного порядка; нарушающие изоспиновую симметрию поправки к σ -члену оказываются не намного меньше, чем сам σ -член. Таким образом, мы снова убеждаемся в том, что причина, по которой сохранение изоспина оказывается в физике адронов хорошим приближением, состоит не в том, что массы u - и d -кварков приближенно равны, а в том, что они малы.

Использование в этом параграфе лагранжианов (19.5.19) или (19.5.49) является одним из примеров применения метода *эффективных теорий поля*, о котором уже говорилось в § 12.3. Аналогичные подходы были развиты для изучения мезонных и барионных взаимодействий, включающих странные частицы (см. § 19.7), кварковых и лептонных взаимодействий при энергиях, много меньших, чем масштаб, на котором нарушается электрослабая симметрия (см. § 21.3), и даже при изучении сверхпроводимости (см. § 21.6). Во всех этих случаях применение эффективных теорий поля оказывается наиболее удобным методом для получения следствий симметрий и общих принципов, лежащих в основе квантовой теории поля.

* * *

Из низкоэнергетических теорем, справедливых для систем с нарушенной симметрией, и дисперсионных соотношений можно получить полезные правила сумм. Покажем, как это сделать в случае нарушенной киральной симметрии, причем массы пионов, u - и d -кварков будем считать равными нулю. Рассмотрим рассеяние вперед пиона с изовекторным индексом a и 4-импульсом q на нуклоне с 4-импульсом p .

Пион в конечном состоянии будет нести изовекторный индекс b . Амплитуда рассеяния M , определенная согласно равенству

$$S_{fi} = -2\pi i \delta^4(P_f - P_i) M_{fi}$$

в первом порядке по q дается диаграммами, изображенными на рис. 19.3:

$$\begin{aligned} -2\pi i M = & \frac{1}{(2\pi)^6 (2q^0)} \times \\ & \times \bar{u} \left[\left(-i \frac{(2\pi)^4 2g_A \gamma_5 t_b \not{q}}{F_\pi} \right) \left(\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\not{p} + \not{q}) + m_N}{(p+q)^2 + M^2} \right) \left(i \frac{(2\pi)^4 2g_A \gamma_5 t_a \not{q}}{F_\pi} \right) + \right. \\ & + \left(i \frac{(2\pi)^4 2g_A \gamma_5 t_a \not{q}}{F_\pi} \right) \left(\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\not{p} - \not{q}) + m_N}{(p-q)^2 + M^2} \right) \left(-i \frac{(2\pi)^4 2g_A \gamma_5 t_b \not{q}}{F_\pi} \right) - \\ & \left. - 4i \frac{t_c \epsilon_{abc} \not{q}}{F_\pi^2} \right] u. \quad (19.5.67) \end{aligned}$$

В ведущем порядке по q пропагатор нуклона в первых двух членах в квадратных скобках можно переписать в следующем виде:

$$\frac{-i(\not{p} \pm \not{q}) + m_N}{(p \pm q)^2 + M^2} \approx \frac{-i\not{p} + m_N}{\pm 2p \cdot q}.$$

Уравнение (19.5.67) можно еще более упростить, если воспользоваться соотношениями $\gamma_\mu q^\mu \gamma_\nu q^\nu = q^2 = 0$, $\bar{u} \gamma^\mu u = -i p \cdot q / m_N$ и $[t_a, t_b] = i \epsilon_{abc} t_c$. Кроме того, в лабораторной системе отсчета (для малых q она совпадает с системой центра масс) мы имеем $p \cdot q = -m_N \omega$, где $\omega \equiv q^0$ — энергия покоя в такой системе отсчета, где нуклон покоится. Амплитуда рассеяния вперед (квадрат модуля которой равен дифференциальному сечению рассеяния вперед) согласно уравнению (3.6.9) равна $f \equiv -4\pi^2 \omega M$, и окончательно получаем, что амплитуда рассеяния на нулевой угол для энергии пиона $\omega \ll m_N$ дается выражением

$$f_{ba}(\omega) \rightarrow -i \frac{\omega}{\pi F_\pi^2} (1 - g_A^2) \epsilon_{abc} t_c. \quad (19.5.68)$$

В частности, если мы хотим вычислить амплитуду рассеяния π^+ на протоне, необходимо свернуть уравнение (19.5.68) с произведением $v_b^* v_a$, где $\vec{v}$ — нормированный изовектор $(1, i, 0)/\sqrt{2}$, и положить $t_3 = +1/2$. Ответ оказывается следующим:

$$f_{\pi^+ p}(\omega) \rightarrow -\frac{\omega}{2\pi F_\pi^2} (1 - g_A^2). \quad (19.5.69)$$

Дисперсионное соотношение для рассеяния вперед безмассового пиона π^+ на протоне задается уравнением (10.8.24):

$$f_{\pi^+ p}(\omega) = R + \frac{i\omega}{4\pi} \sigma_{\pi^+ p}(\omega) + \frac{\omega}{4\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{\sigma_{\pi^+ p}(E)}{E - \omega} - \frac{\sigma_{\pi^- p}(E)}{E + \omega} \right] dE, \quad (19.5.70)$$

где R — некоторая константа, а ω и E — энергии пиона в системе отсчета, для которой протон покоится. Сравнение этого дисперсионного соотношения с низкоэнергетическим пределом (19.5.69) показывает, что $R = 0$ и

$$g_A^2 = 1 + \frac{F_\pi^2}{2\pi} \int_0^\infty [\sigma_{\pi^+p}(E) - \sigma_{\pi^-p}(E)] dE/E. \quad (19.5.71)$$

Это соотношение называется правилом сумм Адлера–Вайсбергера [19] для случая точной киральной симметрии с $m_\pi = 0$. Аналогичное правило сумм можно вывести для рассеяния пионов на любом барионе или мезоне, включая сам пион [30a].

§ 19.6. Эффективные теории поля: нарушенные симметрии общего вида

Техника, развитая в предыдущем параграфе для построения эффективного лагранжиана в случае симметрии $SU(2) \times SU(2)$, нарушенной до $SU(2)$, вскоре была обобщена [31] на случай симметрии с произвольной группой Ли G общего вида, нарушенной до подгруппы H . Рассмотрим некоторую квантовую теорию поля, лагранжиан которой инвариантен относительно произвольной компактной группы Ли G не зависящих от положения в пространстве–времени линейных преобразований g полей $\psi_n(x)$:

$$\psi_n(x) \rightarrow \sum_m g_{nm} \psi_m(x). \quad (19.6.1)$$

Будем предполагать, что эта симметрия спонтанно нарушена до некоторой подгруппы $H \subset G$ преобразований, оставляющих инвариантными все вакуумные средние: для любого $h \in H$

$$\sum_m h_{nm} \langle \psi_m(x) \rangle_{\text{ВАК}} = \langle \psi_m(x) \rangle_{\text{ВАК}} \quad (19.6.2)$$

(нет необходимости в том, чтобы все ψ были скалярами, хотя, конечно, только скаляры могут иметь ненулевое вакуумное среднее). В примере, который был приведен в начале предыдущего параграфа, роль G играла группа $SO(4)$, поля ψ_n осуществляли 4-векторное представление этой группы и их вакуумные средние нарушали $SO(4)$ до подгруппы $H = SO(3)$, состоящей из вращений, оставляющих четвертую ось неподвижной. В общем случае поля ψ_n могут осуществлять приводимое представление группы G , как в случае нуклонных полей, обсуждавшемся в предыдущем параграфе. Представим “точку” ψ_n в пространстве полей как некоторое преобразование из группы G , действующее на поля $\tilde{\psi}_n$, из числа которых исключена безмассовая

голдстоуновская мода:

$$\psi_n(x) = \sum_m \gamma_{nm}(x) \tilde{\psi}_m(x). \quad (19.6.3)$$

Например, в предыдущем параграфе роль γ играл поворот из $SO(4)$, который мы обозначали как R , а условие, накладываемое на ψ_n , состояло в том, что первые три компоненты 4-вектора должны были обращаться в нуль.

Для того чтобы обобщить это условие, предположим, что мы работаем с некоторым действительным представлением G (здесь нет потери общности, поскольку мы не настаиваем на том, чтобы это представление было неприводимым: если начать с набора полей, осуществляющих комплексное представление G , в качестве ψ_n можно выбрать действительные или мнимые части этих комплексных полей). Как показано в § 19.2, собственные векторы массовой матрицы, соответствующие нулевым массам, являются независимыми линейными комбинациями векторов $\sum_m [t^\alpha]_{nm} \langle \psi_m(0) \rangle_{\text{ВЭК}}$, где t^α — генераторы G

(действительность представления означает, что действительным является it^α , а компактность G означает, что можно выбрать унитарное и, следовательно, ортогональное представление с мнимыми и антисимметричными t^α). Тогда условие отсутствия среди полей $\tilde{\psi}_n$ гольдстоуновских бозонов можно сформулировать следующим образом:

$$\sum_{nm} \tilde{\psi}_n(x) [t^\alpha]_{nm} \langle \psi_m(0) \rangle_{\text{ВЭК}} = 0. \quad (19.6.4)$$

Число независимых условий здесь равно размерности группы G за вычетом размерности подгруппы H , генераторы которой уничтожают $\langle \psi_m(0) \rangle_{\text{ВЭК}}$. Как и в предыдущем параграфе, гольдстоуновские бозоны, исключенные из числа полей $\tilde{\psi}_n$, вновь возникнут среди $\dim(G) - \dim(H)$ полей, которые нужны для параметризации преобразований $\gamma_{nm}(x)$. Вообще говоря, в число $\tilde{\psi}_n$ входят все тяжелые поля, которые существуют в теории, включая те (например, нуклоны из предыдущего параграфа), которые имеют трансформационные свойства относительно преобразований пространства-времени, отличные от свойств гольдстоуновских бозонов.

Необходимо показать, что преобразование γ_{nm} всегда можно выбрать так, чтобы оно удовлетворяло уравнению (19.6.4). Для этого рассмотрим величину

$$V_\psi(g) \equiv \sum_{nm} \psi_n g_{nm} \langle \psi_m(0) \rangle_{\text{ВЭК}}, \quad (19.6.5)$$

где g пробегает по всей группе G в действительном ортогональном представлении, осуществляемом полями ψ_n . Очевидно, что это непрерывная действительная функция g , а поскольку группа G компактна,

$V_{\psi(x)}(g)$ является ограниченной функцией. Таким образом, в любой точке пространства–времени x функция $V_{\psi(x)}$ достигает максимума на некотором элементе группы, который мы будем обозначать как $\gamma(x)$. Если $g = \gamma(x)$, $V_{\psi(x)}(g)$ не должна меняться при произвольных вариациях g . Но любой бесконечно малый сдвиг элемента группы g может быть представлен в виде линейной комбинации:

$$\delta g = i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} g t^{\alpha},$$

где действительные бесконечно малые параметры ϵ_{α} могут зависеть от g . Таким образом, условие неизменности $V_{\psi(x)}(g)$ при вариациях δg в окрестности $g = \gamma(x)$ означает, что

$$\begin{aligned} 0 = \delta V_{\psi(x)}(\gamma(x)) &= i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \sum_{nml} \psi_n(x) \gamma_{nl}(x) t_{lm}^{\alpha} \langle \psi_m(0) \rangle_{\text{BAK}} = \\ &= i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \sum_{nml} [\gamma^{-1}(x)]_{ln} \psi_n(x) t_{lm}^{\alpha} \langle \psi_m(0) \rangle_{\text{BAK}}. \end{aligned}$$

Это уравнение должно быть справедливым для любых вариаций, т.е. для любых ϵ_{α} . Поэтому уравнение (19.6.4) верно для $\tilde{\psi}(x) = \gamma^{-1}(x)\psi(x)$, что и требовалось доказать. В случае чисто бозонной теории с лагранжианом (19.4.1) величина $\tilde{\psi}_n$ представляла собой 4-векторное поле $(0, 0, 0, \sigma)$. В данном случае этот вектор сонаправлен вакуумному среднему $\langle \psi_n \rangle$, однако, вообще говоря, это не обязательно так.

Оказывается, что имея дело с комплексными полями, нет необходимости формулировать условие на $\tilde{\psi}$, непосредственно выделяя его действительную и мнимую части. Если набор полей $\chi(x)$ преобразуется по некоторому комплексному представлению группы G с эрмитовыми генераторами T^{α} , то в действительном представлении

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \text{Re } \chi(x) \\ \text{Im } \chi(x) \end{pmatrix}$$

генераторы имеют вид

$$it^{\alpha} = \begin{pmatrix} -\text{Im } T^{\alpha} & -\text{Re } T^{\alpha} \\ \text{Re } T^{\alpha} & -\text{Im } T^{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Условие (19.6.4) можно непосредственно выразить через T^{α} и $\chi(x)$:

$$\text{Im}(\tilde{\chi}(x)^{\dagger} T^{\alpha} \langle \chi(0) \rangle_{\text{BAK}}) = 0.$$

Поскольку считается, что лагранжиан инвариантен только относительно не зависящих от положения в пространстве–времени преобразований из G , после преобразования (19.6.3) он будет зависеть от $\gamma(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$, причем в каждом зависящем от γ члене будет стоять как минимум одна производная. Как уже было отмечено, зависящие от точки

в пространстве–времени параметры, которые нужны для определения $\gamma(x)$, будут играть роль голдстоуновских бозонов. Рассмотрим теперь, как можно параметризовать $\gamma(x)$.

С самого начала необходимо принять во внимание, что выбор γ в уравнении (19.6.3) не является единственным. Поскольку вакуумное среднее $\langle \psi_m(0) \rangle_{\text{ВАК}}$ инвариантно относительно преобразований из подгруппы H в том смысле, что выполняется уравнение (19.6.2), величина $V_\psi(g)$, определенная согласно (19.6.5), является инвариантной относительно правого умножения g на произвольный элемент h ненарушенной подгруппы H :

$$V_\psi(g) = V_\psi(gh) \quad \text{для} \quad h \in H. \quad (19.6.6)$$

Если γ осуществляет максимум $V_\psi(g)$, то его осуществляет и γh , поэтому условие (19.6.4) выполняется для $\tilde{\psi} = h^{-1}\gamma^{-1}\psi$ и $\tilde{\psi} = \gamma^{-1}\psi$. Таким образом, величина γ определена с точностью до правого умножения на произвольный элемент H (в примере из предыдущего параграфа мы могли умножить справа четырехмерный поворот R на произвольный поворот, действующий лишь на первые три компоненты 4-векторов). Два элемента группы, γ_1 и γ_2 , можно считать эквивалентными, если $\gamma_1 = \gamma_2 h$ для некоторого $h \in H$. Это соотношение в самом деле можно считать соотношением эквивалентности, поскольку оно рефлексивно (если элемент группы γ_1 эквивалентен γ_2 , то γ_2 эквивалентен γ_1), симметрично (γ эквивалентен самому себе) и транзитивно (если γ_1 эквивалентен γ_2 , а γ_2 эквивалентен γ_3 , то γ_1 эквивалентен γ_3). Таким образом, все элементы группы G можно разбить на непересекающиеся “классы эквивалентности”, каждый из которых состоит из элементов γ , отличающихся друг от друга правым умножением на некоторый элемент подгруппы H . Эти классы получили название *правосторонних смежных классов* G по отношению к H , и мы фактически ищем параметризацию пространства смежных классов (его обозначают G/H).

Для того чтобы построить такую параметризацию, нам нужно выбрать один из элементов в каждом правом смежном классе. В случае $SO(4)$ -симметрии, нарушенной до $SO(3)$, который рассматривался в предыдущем параграфе, было удобно выбрать повороты R , параметризованные 3-вектором $\vec{\zeta}$. Существует еще один способ выбрать эти элементы, пригодный для любой компактной группы G , нарушенной до подгруппы H . Приспособим сначала наши обозначения генераторов G к случаю нарушенной симметрии. Будем обозначать набор независимых генераторов H символом t_i . Согласно уравнению (19.6.2) они удовлетворяют следующему условию:

$$\sum_m (t_i)_{nm} \langle \psi_m \rangle_{\text{ВАК}} = 0. \quad (19.6.7)$$

Поскольку H — подгруппа, t_i образуют подалгебру:

$$[t_i, t_j] = i \sum_k C_{ijk} t_k. \quad (19.6.8)$$

Будем обозначать символом x_a *остальные* независимые генераторы G в произвольном базисе, для которого структурные константы полностью антисимметричны (такой базис всегда существует в случае компактных групп, см. § 15.2). Поскольку в правой части уравнения (19.6.8) генераторы x_a не возникают, все структурные константы вида C_{ija} обращаются в нуль, а поскольку они полностью антисимметричны, то $C_{iaj} = 0$. Следовательно,

$$[t_i, x_a] = i \sum_b C_{iab} x_b. \quad (19.6.9)$$

Однако коммутаторы генераторов x друг с другом *не обязательно* будут равны линейным комбинациям генераторов t ; это зависит от природы G и H , а также от того, каким образом H погружена в G (в том случае, если C_{abc} обращается в нуль, пространство G/H называется *симметричным пространством*). Вообще говоря, имеет место следующее тождество:

$$[x_a, x_b] = i \sum_i C_{abit} t_i + i \sum_c C_{abc} x_c. \quad (19.6.10)$$

Любой набор генераторов с коммутационными соотношениями вида (19.6.8)–(19.6.10) называется *картановским разложением* алгебры Ли. Одним из его примеров является киральная алгебра Ли $SU(2) \times \times SU(2)$ (19.4.9)–(19.4.11), для которой C_{abc} в самом деле обращаются в нуль.

Поскольку t_i и x_a являются базисом алгебры группы Ли G , любой конечный элемент G может быть представлен в виде

$$g = \exp \left[i \sum_a \xi_a x_a \right] \exp \left[i \sum_i \theta_i t_i \right], \quad (19.6.11)$$

где ξ_a и θ_i — некоторый набор действительных параметров. Так как преобразование $\gamma(x)$ в уравнении (19.6.3) определено только с точностью до правого умножения на произвольный элемент H , мы можем переопределить γ следующим образом:

$$\gamma(x) = \exp \left[i \sum_a \xi_a(x) x_a \right]. \quad (19.6.12)$$

Поля $\xi_a(x)$ можно с точностью до нормировки считать голдстоуновскими бозонами.

Предположим, что из каждого правостороннего смежного класса был выбран один элемент, затем они были представлены как непрерывные функции $\gamma(\xi)$ от параметров ξ_a . Уравнение (19.6.12) дает

один из примеров такой параметризации, однако мы не станем им ограничиваться.

Предположим, что, воспользовавшись уравнением (19.6.3), мы заменили все поля $\psi(x)$ в лагранжиане на $\gamma(x)\tilde{\psi}(x)$. Производные полей имеют следующий вид:

$$\partial_\mu \psi(x) = \gamma(x)[\partial_\mu \tilde{\psi}(x) + (\gamma^{-1}(x)\partial_\mu \gamma(x))\tilde{\psi}(x)]. \quad (19.6.13)$$

Таким образом, если выразить лагранжиан через поля $\tilde{\psi}$, голдстоуновские поля появятся благодаря зависимости $\gamma^{-1}(x)\partial_\mu \gamma(x)$ от $\xi_a(x)$ и их производных.

Любую вариацию элемента группы, подобного $\gamma(x)$, можно представить как элемент группы, умноженный на линейную комбинацию генераторов группы. В нашем случае имеем

$$\gamma^{-1}(x)\partial_\mu \gamma(x) = i \sum_a x_a D_{a\mu}(x) + i \sum_i t_i E_{i\mu}(x), \quad (19.6.14)$$

где $D_{a\mu}$ и $E_{i\mu}$ определяются согласно

$$D_{a\mu}(x) = \sum_b D_{ab}(\xi(x))\partial_\mu \xi_b(x), \quad (19.6.15)$$

$$E_{i\mu}(x) = \sum_b E_{ib}(\xi(x))\partial_\mu \xi_b(x). \quad (19.6.16)$$

Таким образом, голдстоуновские бозоны войдут в лагранжиан через величины $D_{a\mu}(x)$ и $E_{i\mu}(x)$ (и их производные). Заметим, что в случае точных нарушенных симметрий каждое взаимодействие полей ξ должно содержать как минимум одну производную, поэтому в лагранжиане не могут возникнуть массовые члены вида $m_{ab}^2 \xi_a \xi_b$. Таким образом, при стремлении 4-импульсов голдстоуновских бозонов к нулю все такие взаимодействия должны исчезать.

Даже в том случае, если неизвестны детали устройства лагранжиана теории, лежащей в основе явления, из трансформационных свойств $D_{a\mu}$ и $E_{i\mu}$ мы можем получить достаточно много информации о том, каким образом эти величины входят в преобразованный лагранжиан. Под действием произвольного элемента g группы G поле ψ преобразуется согласно уравнению (19.6.1):

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = g\psi(x) = g\gamma(\xi(x))\tilde{\psi}(x). \quad (19.6.17)$$

Поскольку $g\gamma(\xi)$ — элемент группы G , он должен принадлежать тому же правостороннему смежному классу, что и $\gamma(\xi')$. Следовательно, его можно представить в виде

$$g\gamma(\xi(x)) = \gamma(\xi'(x))h(\xi(x), g), \quad (19.6.18)$$

где h — некоторый элемент ненарушенной подгруппы H . Используя это представление в уравнении (19.6.17), мы найдем, что $\psi'(x)$ имеет

вид (19.6.3):

$$\psi'(x) = \gamma(\xi'(x))\tilde{\psi}'(x), \quad (19.6.19)$$

где $\xi'(x)$ определяется уравнением (19.6.18), и

$$\tilde{\psi}'(x) \equiv h(\xi(x), g)\tilde{\psi}(x). \quad (19.6.20)$$

В примере, приведенном в начале предыдущего параграфа, поле $\tilde{\psi}$ имело единственную отличную от нуля компоненту — псевдоскаляр σ . Поскольку это поле инвариантно относительно ненарушенной подгруппы изоспиновой симметрии, оно кирально инвариантно. Здесь мы покажем, что поле $\tilde{\psi}$ в общем случае не обязательно инвариантно относительно преобразований группы G , однако его преобразование само может зависеть только от преобразований ненарушенной подгруппы H . В предыдущем параграфе было показано, что это в самом деле так, когда рассматриваются нуклонные поля; под действием бесконечно малого преобразования нарушенной киральной симметрии поля $\tilde{N}$ преобразуются как под действием зависящего от полей изоспинового вращения (19.5.45).

Правила преобразования $\xi \rightarrow \xi'$ и $\tilde{\psi} \rightarrow \tilde{\psi}'$, определенные согласно уравнениям (19.6.18) и (19.6.20), никак не связаны с трансформационными свойствами полей ψ_n под действием линейных преобразований из G . В самом деле, для того чтобы получить эти правила, не нужно было начинать с лагранжиана, инвариантного относительно линейных преобразований группы G . Имея любой набор полей, на которые группа G действует линейным или нелинейным образом, информацию о подгруппе H , которая оставляет инвариантными вакуумные средние этих полей, всегда можно (во всяком случае в малой окрестности вакуума) выразить через набор параметров ξ_a и $\tilde{\psi}_n$, преобразующийся под действием G по правилам $\xi_a \rightarrow \xi'_a$, $\tilde{\psi} \rightarrow \tilde{\psi}'$, определенным согласно уравнениям (19.6.18) и (19.6.20). Единственность определения этих правил была сначала доказана [25] для симметрии $SU(2) \times SU(2)$, нарушенной до $SU(2)$, а затем — для любой группы Ли, нарушенной до произвольной подгруппы [31]. Одним из простейших аргументов в пользу единственности является следующий: заметим, что для любого набора полей, преобразующихся по нелинейному представлению произвольной компактной группы Ли G , всегда возможно определить функции этих полей (и возможно дополнительные поля¹⁾), которые под действием элементов группы G преобразуются линейно [32].

¹⁾ Например, полярный и азимутальный углы θ и ϕ осуществляют нелинейное представление $SO(3)$; добавляя переменную r , мы можем построить величины x_1 , x_2 и x_3 , которые под действием $SO(3)$ преобразуются линейно.

Начиная с такого линейного представления, мы можем построить поля ξ и $\tilde{\psi}$ с трансформационными свойствами (19.6.18) и (19.6.20).

Хотя преобразование $\xi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ для произвольного элемента $g \in G$ является довольно сложным, оно сильно упрощается в том случае, когда сам элемент g принадлежит ненарушенной подгруппе H . Голдстоуновские поля $\xi_a(x)$ всегда можно выбрать так, чтобы они преобразовывались по *линейному* представлению $\mathcal{D}_{ab}(h)$ ненарушенной подгруппы H :

$$h\gamma(\xi)h^{-1} = \gamma(\mathcal{D}(h)\xi). \quad (19.6.21)$$

Например, для параметризации пространства смежного класса $SO(4)/SO(3)$, использованной в предыдущем параграфе, голдстоуновские бозоны ζ_a образовывали изоспиновый 3-вектор. В случае более общей параметризации, основанной на уравнении (19.6.12), из коммутационных соотношений (19.6.9) следует, что под действием H величины x_a преобразуются линейно:

$$hx_b h^{-1} = \sum_a \mathcal{D}_{ba}(h)x_a, \quad (19.6.22)$$

откуда незамедлительно следует уравнение (19.6.21). Сравнивая уравнения (19.6.21) и (19.6.18), мы видим, что для $g = h \in H$ имеют место соотношения

$$\xi'_a(x) = \sum_b \mathcal{D}_{ab}(h)\xi_b(x), \quad (19.6.23)$$

$$\tilde{\psi}'_n(x) = \sum_m h_{nm}\tilde{\psi}_m(x). \quad (19.6.24)$$

Другими словами, ξ_a и $\tilde{\psi}_n$ преобразуются под действием элементов H согласно представлениям $\mathcal{D}_{ab}(h)$ и h_{nm} соответственно.

Рассмотрим теперь, как построить лагранжиан наиболее общего вида, инвариантный относительно преобразований (19.6.18) и (19.6.20). Преобразование $\xi \rightarrow \xi'$ при произвольном $g \in G$, вообще говоря, нелинейно и довольно сложно, поэтому поля $\xi_a(x)$ в лагранжиан могут входить только через $D_{a\mu}(x)$ и $E_{i\mu}(x)$. К счастью, обе эти величины имеют довольно простые трансформационные свойства. Продифференцируем уравнение (19.6.18) по x^μ , а затем умножим результат слева на уравнение, обратное (19.6.18):

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\xi(x))\partial_\mu\gamma(\xi(x)) &= [g\gamma(\xi(x))]^{-1}\partial_\mu[g\gamma(\xi(x))] = \\ &= h^{-1}(\xi(x), g)\gamma^{-1}(\xi'(x))\partial_\mu[\gamma(\xi'(x))h(\xi(x), g)] = \\ &= h^{-1}(\xi(x), g)[\gamma^{-1}(\xi'(x))\partial_\mu\gamma(\xi'(x))]h(\xi(x), g) + \\ &\quad + h^{-1}(\xi(x), g)\partial_\mu h(\xi(x), g), \end{aligned}$$

тогда

$$\gamma^{-1}(\xi'(x))\partial_\mu\gamma(\xi'(x)) = h(\xi(x), g)[\gamma^{-1}(\xi(x))\partial_\mu\gamma(\xi(x))]h^{-1}(\xi(x), g) - \\ - [\partial_\mu h(\xi(x), g)]h^{-1}(\xi(x), g). \quad (19.6.25)$$

Благодаря уравнению (19.6.14) величину $\gamma^{-1}\partial_\mu\gamma$ можно представить в виде линейной комбинации различных x и t . Кроме того, второй член в правой части уравнения (19.6.25) является линейной комбинацией только величин t . Поскольку все x_a и t_i независимы, коэффициенты перед каждым генератором в правой и левой частях уравнения (19.6.25) должны совпадать:

$$\sum_a x_a D'_{a\mu} = h(\xi, g) \left(\sum_a x_a D_{a\mu} \right) h^{-1}(\xi, g), \quad (19.6.26)$$

$$\sum_i t_i E'_{i\mu} = h(\xi, g) \left(\sum_i t_i E_{i\mu} \right) h^{-1}(\xi, g) + i[\partial_\mu h(\xi, g)]h^{-1}(\xi, g), \quad (19.6.27)$$

или, более детально,

$$D'_{a\mu}(x) = \sum_b \mathcal{D}_{ab}(h(\xi(x), g)) D_{b\mu}(x), \\ E'_{i\mu}(x) = \sum_j \mathcal{E}_{ij}(h(\xi(x), g)) E_{j\mu}(x) - \sum_b \mathcal{H}_{ib}(h(\xi(x), g)) \partial_\mu \xi_b(x), \quad (19.6.28)$$

где $D_{a\mu}$ и $E_{i\mu}$ определены согласно уравнениям (19.6.15) и (19.6.16) и, кроме того,

$$[\partial_\mu h(\xi(x), g)]h^{-1}(\xi(x), g) = i \sum_{ib} \mathcal{H}_{ib}(\xi(x)) t_i \partial_\mu \xi_b(x),$$

$$ht_j h^{-1} = \sum_i \mathcal{E}_{ij}(h) t_i,$$

где $\mathcal{D}_{ab}$ находится из уравнения (19.6.22). Мы видим, что величины $D_{a\mu}(x)$ играют роль “ковариантных производных” голдстоуновских бозонных полей, преобразующихся под действием произвольного элемента группы gG аналогично полям ψ : и поля, и ковариантные производные оказываются подверженными одному и тому же преобразованию $h(\xi(x, g))$ из H , но в различных представлениях. Например, в случае $SO(4)$ -теории, обсуждавшемся в предыдущем параграфе, роль ковариантной производной пионного поля $\vec{\zeta}$ играла величина $\partial_\mu \vec{\zeta} / (1 + \vec{\zeta}^2)$, которая под действием бесконечно малого кирального преобразования поворачивалась в изоспиновом пространстве согласно (19.5.15).

С другой стороны, величина $E_{j\mu}(x)$ преобразуется неоднородным образом, что больше похоже на свойства калибровочного поля. Благодаря дополнительному члену в уравнении (19.6.28) неоднородный вклад в производные $\tilde{\psi}$ можно убрать. Дифференцируя уравнение (19.6.20), имеем

$$\partial_\mu \tilde{\psi}'(x) = h(\xi(x), g)[\partial_\mu \tilde{\psi}(x) + h^{-1}(\xi(x), g)\partial_\mu h(\xi(x), g)\tilde{\psi}(x)],$$

и, комбинируя это выражение с уравнением (19.6.27), затем получаем

$$(\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}(x))' = h(\xi(x), g)\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}(x), \quad (19.6.29)$$

где $\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}$ — ковариантная производная полей тяжелых частиц:

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}(x) \equiv \partial_\mu \tilde{\psi}(x) + i \sum_i t_i E_{i\mu}(x) \tilde{\psi}(x) \quad (19.6.30)$$

(уравнение (19.5.47) дает пример такой ковариантной производной для случая симметрии $SO(4)$, нарушенной до $SO(3)$). Любой инвариантный относительно ненарушенной подгруппы H лагранжиан, который построен из $\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}$ и $D_{a\mu}$, будет также инвариантен относительно полной группы G .

Поскольку мы не требуем здесь перенормируемости, то можно также рассматривать величины, содержащие более чем одну пространственно-временную производную. Одна такая величина имеет вид $\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}$. Явное выражение для нее можно получить, воспользовавшись уравнением (19.6.30):

$$\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \tilde{\psi} = \left[\partial_\nu + i \sum_j t_j E_{j\nu} \right] \left[\partial_\mu + i \sum_i t_i E_{i\mu} \right] \tilde{\psi}. \quad (19.6.31)$$

Эта величина преобразуется точно так же, как $\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}$:

$$(\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \tilde{\psi})' = h(\xi, g)\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}. \quad (19.6.32)$$

Другую такую величину можно получить, если ковариантно продифференцировать производную (19.6.15), которая определена аналогично (19.6.30) с точностью до замены t_i на соответствующую матрицу в представлении H , осуществляемом x_a :

$$\mathcal{D}_\nu D_{a\mu} = \partial_\nu D_{a\mu} + \sum_{ib} C_{iab} E_{i\nu} D_{b\mu}. \quad (19.6.33)$$

Она преобразуется так же, как $D_{a\mu}$:

$$(\mathcal{D}_\nu D_{a\mu})' = \sum_b \mathcal{D}_{ab}(h, g) \mathcal{D}_\nu D_{b\mu}. \quad (19.6.34)$$

Кроме того, антисимметризуя производную $E_{i\mu}$, мы можем исключить в (19.6.27) неоднородный член. В результате получаем “кривизну”

$$R_{i\mu\nu} \equiv \partial_\nu E_{i\mu} - \partial_\mu E_{i\nu} - i \sum_{j,k} C_{ijk} E_{j\mu} E_{k\nu}. \quad (19.6.35)$$

Однако эта величина не является новой; как нетрудно видеть, антисимметризованная двойная ковариантная производная поля “материи” $\tilde{\psi}$ пропорциональна этой кривизне:

$$[\mathcal{D}_\nu, \mathcal{D}_\mu] \tilde{\psi} = \sum_i t_i R_{i\mu\nu} \tilde{\psi}. \quad (19.6.36)$$

Конечно же, можно продолжать данный процесс и строить новые ковариантные величины путем повторного ковариантного дифференцирования $\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}$ и $D_{a\mu}$.

Полезно заметить, что $D_{a\mu}$ и $E_{i\mu}$ можно вычислить, если знать группы G и H и выбрать параметризацию пространства G/H ; эти величины никак не зависят от трансформационных свойств ψ_n или выбора матриц x_a и t_i , использующихся для представления алгебры Ли нарушенной группы симметрии. Например, для экспоненциальной параметризации (19.6.12) первые несколько членов в разложении экспоненты для этих ковариантных величин могут быть легко вычислены из уравнений (19.6.12) и (19.6.14):

$$\begin{aligned} D_{a\mu} &= \partial_\mu \xi_a + \frac{1}{2} \sum_{bc} C_{abc} \xi_b \partial_\mu \xi_c + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{bcd} \left[\sum_e C_{cde} C_{bea} + \sum_i C_{cdi} C_{bia} \right] \xi_b \xi_c \partial_\mu \xi_d + O(\xi^3 \partial_\mu \xi), \end{aligned} \quad (19.6.37)$$

$$E_{i\mu} = \frac{1}{2} \sum_{ab} C_{abi} \xi_a \partial_\mu \xi_b + \frac{1}{6} \sum_{abcd} C_{acd} C_{bdi} \xi_a \xi_b \partial_\mu \xi_c + O(\xi^3 \partial_\mu \xi). \quad (19.6.38)$$

Все, что нужно знать для того, чтобы построить лагранжиан наиболее общего вида, содержащий голдстоуновские бозонные поля ξ_a и набор полей тяжелых частиц, — это каким образом симметрия G нарушается до H и как тяжелые поля преобразуются под действием элементов H (не G !). Лагранжиан будет иметь вид инвариантной относительно элементов H функции общего вида от $\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}$, $D_{a\mu}$ и членов с высшими производными.

Рассмотрим теперь тот случай, когда симметрия G не только спонтанно нарушена, но и исходно не является точной. Предположим, что существует вклад в лагранжиан $\Delta \mathcal{L}$, не инвариантный относительно группы G линейных преобразований $\psi \rightarrow g\psi$. Пусть он, однако, преобразуется под действием элементов этой группы как линейная комбинация компонентов некоторого представления (приводимого или

неприводимого) группы G :

$$\Delta\mathcal{L} = \sum_A c_A \mathcal{O}_A, \quad (19.6.39)$$

где $\mathcal{O}_A$ преобразуется под действием G по некоторому представлению $D[g]_{AB}$,

$$\mathcal{O}_A \rightarrow \sum_B D[g]_{AB} \mathcal{O}_B. \quad (19.6.40)$$

Если теперь заменить поля ψ на набор $\xi_a, \tilde{\psi}$, этот вклад в лагранжиан сохранит форму (19.6.39), однако уравнение (19.6.40) приобретет вид

$$\mathcal{O}_A[f_a(\xi, g), h(\xi, g)\tilde{\psi}] = \sum_B D[g]_{AB} \mathcal{O}_B[\xi, \tilde{\psi}], \quad (19.6.41)$$

где $f_a(\xi, g)$ — результат применения преобразования g к ξ_a , определенный согласно уравнению (19.6.18):

$$g\gamma(\xi) = \gamma(f(\xi, g))h(\xi, g). \quad (19.6.42)$$

Как мы увидим, легко найти набор операторов, удовлетворяющих уравнению (19.6.41), причем решение оказывается единственным с точностью до выбора определенных H -инвариантных функций $\tilde{\psi}$.

Рассмотрим сначала случай $\xi_a = 0$ с $g = \gamma(\xi')$. Тогда $g\gamma(\xi) = \gamma(\xi')$ и

$$f_a(0, \gamma(\xi')) = \xi'_a, \quad h(0, \gamma(\xi')) = 1.$$

Применяя эти соотношения к уравнению (19.6.41), можно найти (опуская штрихи), что

$$\mathcal{O}_A[\xi_a, \tilde{\psi}] = \sum_B D[\gamma(\xi)]_{AB} \mathcal{O}_B[0, \tilde{\psi}]. \quad (19.6.43)$$

Это уравнение позволяет восстановить операторы $\mathcal{O}_A[\xi_a, \tilde{\psi}]$ для любых ξ_a , если известен их вид при $\xi_a = 0$.

Возьмем теперь $\xi_a = 0$ с $g = h$ — элементом h ненарушенной подгруппы H . Теперь $g\gamma(\xi) = h$ и

$$f_a(0, h) = 0, \quad h(0, h) = h.$$

Применяя эти соотношения к уравнению (19.6.41), мы найдем, что

$$\mathcal{O}_A[0, h\tilde{\psi}] = \sum_B D[h]_{AB} \mathcal{O}_B[0, \tilde{\psi}]. \quad (19.6.44)$$

Другими словами, под действием линейных преобразований из H оператор $\mathcal{O}_A$ при $\xi = 0$ должен изменяться по представлению (19.6.40) группы G (это условие не фиксирует нормировку различных неприводимых представлений H , найденных в представлении G (19.6.40); некоторые из них могут даже полностью отсутствовать).

Наконец заметим, что любой удовлетворяющий (19.6.44) набор операторов $\mathcal{O}$ позволяет посредством уравнения (19.6.43) построить

операторы, преобразующиеся согласно общим правилам группы G (19.6.40). Используя уравнения (19.6.43) и (19.6.44), левую часть уравнения (19.6.41) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_A[f_a(\xi, g), h(\xi, g)\tilde{\psi}] &= \sum_B D[\gamma(f(\xi, g))]_{AB} \mathcal{O}_B[0, h(\xi, g)\tilde{\psi}] = \\ &= \sum_{BC} D[\gamma(f(\xi, g))]_{AB} D[h(\xi, g)]_{BC} \mathcal{O}_C[0, \tilde{\psi}] = \\ &= \sum_B D[\gamma(f(\xi, g))h(\xi, g)]_{AB} \mathcal{O}_B[0, \tilde{\psi}] = \\ &= \sum_B D[g\gamma(\xi)]_{AB} \mathcal{O}_B[0, \tilde{\psi}] = \sum_B D[g]_{AB} \mathcal{O}_B[\xi, \tilde{\psi}],\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В качестве примера будем рассматривать группу $SO(4)$, спонтанно нарушенную до $SO(3)$, о которой говорилось в предыдущем параграфе. Предположим, что нам нужно построить зависящие от $\vec{\zeta}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ операторы, преобразующиеся по 4-векторному представлению группы $SO(4)$. Согласно уравнению (19.6.43) они должны иметь вид

$$\mathcal{O}_n[\vec{\zeta}, \tilde{\psi}] = R_{nm}(\vec{\zeta}) \mathcal{O}_m[0, \tilde{\psi}],$$

где R — $SO(4)$ -поворот, определенный согласно уравнениям (19.5.8) и (19.5.9):

$$R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1 + \vec{\zeta}^2}, \quad R_{44} = \frac{1 - \vec{\zeta}^2}{1 + \vec{\zeta}^2}.$$

Матрица R будет ортогональной, если выбрать ее компоненты в следующем виде:

$$R_{ab} = \delta_{ab} - \frac{2\zeta_a \zeta_b}{1 + \vec{\zeta}^2}, \quad R_{4a} = -\frac{2\zeta_a}{1 + \vec{\zeta}^2}.$$

Таким образом, любые скалярные (в отличие от псевдоскалярных) операторы, преобразующиеся как четвертая и третья компоненты киральных 4-векторов, будут входить в лагранжиан в виде

$$\Phi_4^+[\vec{\zeta}, \tilde{\psi}] = -\left(\frac{2\vec{\zeta}}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \cdot \vec{\Phi}^+[0, \tilde{\psi}] + \left(\frac{1 - \vec{\zeta}^2}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \Phi_4^+[0, \tilde{\psi}]$$

и

$$\Phi_3^-[\vec{\zeta}, \tilde{\psi}] = \left[\Phi_3^-[0, \tilde{\psi}] - \left(\frac{2\zeta_3}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \vec{\zeta} \cdot \vec{\Phi}^-[0, \tilde{\psi}]\right] + \left(\frac{2\zeta_3}{1 + \vec{\zeta}^2}\right) \Phi^-[0, \tilde{\psi}].$$

Единственное условие, накладываемое на операторы

$$\vec{\Phi}^+[0, \tilde{\psi}], \quad \Phi_4^+[0, \tilde{\psi}], \quad \vec{\Phi}^-[0, \tilde{\psi}] \quad \text{и} \quad \Phi_4^-[0, \tilde{\psi}],$$

состоит в том, чтобы они под действием группы Лоренца и изоспиновой симметрии преобразовывались как псевдоскаляр–изовектор, скаляр–изоскаляр, скаляр–изовектор и псевдоскаляр–изоскаляр соответственно; кроме того, эти операторы должны быть независимыми. Для процессов, в которых участвуют только пионы, мы используем эффективный лагранжиан, в который входят только поля $\vec{\zeta}$, и в этом случае операторы $\vec{\Phi}^+[0, \vec{\psi}]$, $\vec{\Phi}^-[0, \vec{\psi}]$ и $\Phi_4^-[0, \vec{\psi}]$ обращаются в нуль, а оператор Φ_4^+ оказывается равным численной постоянной. Как мы видим, единственный не содержащий производные оператор, входящий в лагранжиан и нарушающий его киральную симметрию, должен быть пропорционален $(1 - \vec{\zeta}^2)/(1 + \vec{\zeta}^2)$ и, следовательно, оператору (19.5.34). Для того чтобы включить нарушающие симметрию операторы, билинейные по нуклонным полям, необходимо положить (как следует из сохранения четности и изоспина)

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}^+[0, \tilde{N}] &\propto \tilde{\bar{N}}\gamma_5\tilde{t}\tilde{N}, & \Phi_4^+[0, \tilde{N}] &\propto \tilde{\bar{N}}\tilde{N}, \\ \vec{\Phi}^-[0, \tilde{N}] &\propto \tilde{\bar{N}}\tilde{t}\tilde{N}, & \Phi_4^-[0, \tilde{N}] &\propto \tilde{\bar{N}}\gamma_5\tilde{N}.\end{aligned}$$

Таким образом, как и было указано в предыдущем параграфе, единственными нарушающими симметрию вкладками в лагранжиан, не содержащими производных и билинейными по нуклонам, являются (19.6.61)–(19.5.64).

Феноменологический лагранжиан можно использовать для вычисления амплитуд процессов, включающих частицы с малыми 3-импульсами, примерно таким же образом, как было сделано в случае киральной симметрии пионов и нуклонов в предыдущем параграфе. Если вновь начать считать степени характерного малого импульса Q , то можно понять, что внутренние линии, соответствующие голдстоуновским бозонам, всегда вносят вклад порядка Q^{-2} . Кроме того, любой внутренней линии одной из тяжелых частиц (произвольного спина), описываемой полями $\tilde{\psi}$, которая получила от голдстоуновского бозонного поля суммарный 4-импульс q , будет соответствовать пропагатор

$$\frac{N(p+q)}{(p+q)^2 + M^2} \rightarrow \frac{N(p)}{2p \cdot q}$$

(где N — некоторый полином, зависящий от спина частицы и типа поля, а M — масса частицы), который дает вклад в диаграмму порядка Q^{-1} . Аналогично тому, как было выведено выражение (19.5.55), можно получить следующее соотношение для степени Q в произвольной фейнмановской диаграмме в нашем случае:

$$\nu = \sum_i V_i(d_i + h_i/2 - 2) + 2L - E_h/2 + 2, \quad (19.6.45)$$

где V_i — число вершин типа i , d_i — число производных (в случае приближенной нарушенной симметрии — число производных или масс

голдстоуновских бозонов), присутствующих в вершине типа i , h_i — число входящих в вершину типа i линий, соответствующих тяжелым частицам, L — число петель, а E_h — число внешних линий, соответствующих тяжелым частицам. Вообще говоря, коэффициент $d_i + h_i/2 - 2$ неотрицателен для любых типов взаимодействий, которым позволяет существовать киральная симметрия. Для взаимодействий только между гольдстоуновскими бозонами всегда выполнено неравенство $d_i \geq 2$, поскольку они должны быть по меньшей мере билинейными по ковариантной производной (19.6.15) или пропорциональными параметрам, нарушающим симметрию (таким, как массы кварков в случае спонтанно нарушенной киральной симметрии), которые имеют порядок квадрата массы гольдстоуновских бозонов. Во взаимодействия между гольдстоуновскими бозонами и тяжелыми частицами должны входить ковариантные производные (19.6.15) или (19.6.30), поэтому для них будут выполнены неравенства $d_i \geq 1$ и $h_i \geq 2$. Единственным типом взаимодействий, для которого $d_i + h_i/2 < 2$, могли бы быть трилинейные взаимодействия между тяжелыми частицами, однако мы должны их исключить, поскольку рассматриваем только диаграммы, для которых все тяжелые адроны остаются нерелятивистскими. Поскольку для всех взаимодействий $d_i + h_i/2 \geq 2$, ведущий порядок имеют диаграммы, построенные из взаимодействий с $d_i + h_i/2 = 2$ и не содержащие петель. Поправки к ведущему порядку вновь дают диаграммы со взаимодействиями, содержащими большее количество производных и/или большее число тяжелых полей, а также многопетлевые диаграммы.

В отсутствие нарушения симметрии на уровне лагранжиана единственная его часть с $d_i = 2$, содержащая только гольдстоуновские поля, имеет вид

$$\mathcal{L}_{GB} = -\frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}^2 D_{a\mu} D_b^\mu, \quad (19.6.46)$$

где F_{ab}^2 — некоторая действительная положительно определенная матрица. Для (19.6.12) и большого класса других параметризаций смежных классов $\gamma(\xi)$ стремится при $\xi_a \rightarrow 0$ к $1 + i\xi_a x_a$, и из уравнения (19.6.14) следует, что член, линейный по $D_{a\mu}$, имеет вид $\partial_\mu \xi_a$. Таким образом, канонически нормированные гольдстоуновские бозонные поля π_a с кинематическим лагранжианом $-\frac{1}{2} \sum_a \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a$ таковы

$$\pi_a = \sum_b F_{ab} \xi_b. \quad (19.6.47)$$

В $SO(4)$ -теории генераторы x_a и поля ξ_a преобразуются согласно неприводимому представлению ненарушенной подгруппы $H = SO(3)$, поэтому $F_{ab} = F_\pi^2 \delta_{ab}$, где F_π — константа, характеризующая масштаб энергий, на которых происходит спонтанное нарушение симметрии. В общем случае всегда можно выбрать генераторы (не меняя струк-

турные константы) так, чтобы матрица F_{ab}^2 была диагональной, причем ее диагональные элементы будут равными в пределах каждого неприводимого представления H , но в остальном независимыми.

* * *

Мы познакомились с тем, каким образом можно строить теории голдстоуновских бозонов, начиная с полей, принадлежащих линейным представлениям нарушенной группы симметрии, таких как 4-вектор $\phi_n(x)$ в теории $SU(2) \times SU(2)$, рассмотренный в § 19.5. При очень низкой энергии единственными существенными степенями свободы являются голдстоуновские бозоны, поэтому, вообще говоря, всегда можно отбрасывать неголдстоуновские поля, такие как поле $\sigma(x)$ в уравнении (19.5.4). Однако существуют обстоятельства, при которых необходимо вернуться к полным нелинейным представлениям нарушенной группы симметрии.

Это имеет место, например, в том случае, когда в результате варьирования температуры или включения некоторого внешнего поля система оказывается в окрестности точки фазового перехода второго рода и непрерывным образом переходит из состояния с нарушенной в состояние с ненарушенной симметрией. По одну сторону от перехода симметрия нарушена, и мы имеем в спектре теории безмассовые голдстоуновские бозоны и различные массивные возбуждения, не образующие, вообще говоря, полных мультиплетов, осуществляющих линейные представления нарушенной группы симметрии. По другую сторону от перехода симметрия восстанавливается, и в спектре теории имеются полные линейные мультиплеты, частицы которых имеют, вообще говоря, ненулевую массу. Если переход непрерывен, возле него голдстоуновские бозоны должны образовывать часть полного линейного мультиплета почти безмассовых полей. Во всех случаях (кроме некоторых исключительных) этот мультиплет будет формировать некоторое *неприводимое* представление нарушенной группы симметрии. Такой неприводимый мультиплет полей, которые становятся безмассовыми только в результате фазового перехода, называется *параметром порядка*.

Такое определение параметра порядка обладает более высокой строгостью, нежели обычные. Часто параметром порядка называют набор полей, ненулевые вакуумные средние которых нарушают симметрию, однако такое определение слишком нечетко — набор полей, вакуумные средние которых приводили бы к нарушению симметрии, не является единственным. Например, $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия квантовой хромодинамики с безмассовыми u - и d -кварками нарушается вакуумным средним $\bar{u}u + \bar{d}d$, которое преобразуется как четвертая компонента 4-вектора. Однако четвертая и высшие степени кварковых полей также имеют ненулевые вакуумные средние и принадлежат к другим представлениям $SU(2) \times SU(2)$. Напротив, при фа-

зовом переходе, соответствующем спонтанному нарушению $SU(2) \times SU(2)$, голдстоуновский бозон принадлежит единственному безмассовому представлению $SU(2) \times SU(2)$, что дает возможность дать определение параметра порядка, в котором нет произвола.

Очень важно правильно определять параметр порядка — во-первых, для того чтобы правильно вычислять критические экспоненты, обсуждавшиеся в § 18.5, и во-вторых, для того чтобы работать с конфигурациями, подобными вихревым линиям или магнитным монополям, в структуре которых, как будет показано в §§ 21.6, 23.3, существует сингулярность — в ее окрестности нарушенная симметрия восстанавливается. Часто предполагают, что параметром порядка для киральной $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии квантовой хромодинамики является киральный 4-вектор, но, строго говоря, это до сих пор не доказано [32a].

§ 19.7. Эффективные теории поля: $SU(3) \times SU(3)$

Приближенная изоспиновая $SU(2)$ -симметрия ядерной физики в начале 60-х годов была расширена Гелл-Маном [33] и Нееманом [34] до еще менее точной $SU(3)$ -симметрии, которая позволяет собрать известные барионы и мезоны в различные неприводимые представления; октет $1/2^+$ барионов $p, n, \Lambda^0, \Sigma^{\pm,0}, \Xi^{\pm,0}$; октет 0^- мезонов $K^{+,0}, \pi^{\pm,0}, \eta^0, \bar{K}^{\mp,0}$; октет 1^- мезонов $K^{*,+0}, \rho^{\pm,0}, \omega, \bar{K}^{*-,-0}$ и декуплет $3/2^+$ барионов $\Delta^{+++,+0,-}, \Sigma^{*+,0,-}, \Xi^{*0,-}, \Omega^-$ (частицы η и Ω были открыты позже). После успехов теории киральной $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии, достигнутых в середине 1960-х годов, было естественным предположить, что для сильных взаимодействий также приближенно выполняется $SU(3) \times SU(3)$ -симметрия, которая подобно $SU(2) \times SU(2)$ нарушается до диагональной подгруппы $SU(3)$ Гелл-Мана и Неемана. Затем, после наступления эры квантовой хромодинамики, стало ясно, что такая симметрия в самом деле может иметь место, поскольку существует не два, а три типа почти безмассовых кварков: u , d и третий кварк s , который, подобно d , имеет заряд $-1/3$. В этом случае группа $SU(3) \times SU(3)$ состоит из независимых $SU(3)$ -преобразований лево- и правополяризованных полей u -, d - и s -кварков:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \exp \left[i \sum_a (\theta_a^V \lambda_a + \theta_a^A \lambda_a \gamma_5) \right] \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad (19.7.1)$$

где λ_a — полный набор бесследовых эрмитовых матриц:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (19.7.2)$$

нормированных так, что $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$. Генераторы $SU(3) \times SU(3)$, таким образом, представлены на кварковых полях генераторами $t_a = \lambda_a$ ненарушенной $SU(3)$ -симметрии и генераторами нарушенной симметрии $x_a = \lambda_a \gamma_5$.

Чтобы определить голдстоуновские поля и найти их трансформационные свойства, заметим, что в представлении, осуществляемом кварковыми полями, любой элемент группы $SU(3) \times SU(3)$ может быть записан как результат умножения $\exp\left(-i\gamma_5 \sum_a \xi_a \lambda_a\right)$ на преобразование $\exp\left(i \sum_a \theta_a \lambda_a\right)$, принадлежащее ненарушенной подгруппе $SU(3)$ (знак “ $-$ ” перед ξ включен для того, чтобы облегчить последующее сравнение компонент этого поля с пионными полями § 19.5). Таким образом, в данном представлении всякий правосторонний смежный класс $SU(3) \times SU(3)/SU(3)$ представлен содержащейся в нем матрицей вида $\gamma(\xi) = \exp\left(-i\gamma_5 \sum_a \xi_a \lambda_a\right)$, а параметры ξ_a можно с точностью до нормировки считать голдстоуновскими бозонами. Согласно уравнению (19.6.18) правило преобразования для этих полей определено условием

$$\exp\left[i \sum_a (\theta_a^V \lambda_a + \theta_a^A \lambda_a \gamma_5)\right] \exp\left(-i\gamma_5 \sum_a \xi_a(x) \lambda_a\right) =$$

$$= \exp\left(-i\gamma_5 \sum_a \xi'_a(x) \lambda_a\right) \exp\left(i \sum_a \theta_a(x) \lambda_a\right), \quad (19.7.3)$$

где $\theta_a(x)$ зависит от θ^V , θ^A и $\xi(x)$. Кроме того, согласно уравнению (19.6.3) кварковые поля $\tilde{q}(x)$ без голдстоуновских полей, определены следующим образом:

$$q(x) \equiv \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\gamma_5 \sum_a \xi_a(x) \lambda_a\right) \tilde{q}(x). \quad (19.7.4)$$

Они имеют трансформационные свойства, которые можно найти из уравнения (19.6.24):

$$\tilde{q}'(x) = \exp\left(i \sum_a \theta_a(x) \lambda_a\right) \tilde{q}(x). \quad (19.7.5)$$

Мы можем далее начать строить ковариантные производные (19.6.15), (19.6.30) и конструировать с их помощью кирально-инвариантные плотности лагранжианов, но в случае киральной симметрии имеется более простой подход.

Заметим, что части уравнения (19.7.3), пропорциональные $(1 + \gamma_5)$ и $(1 - \gamma_5)$, имеют вид

$$\begin{aligned} \exp\left(i \sum_a \theta_a^L \lambda_a\right) \exp\left(-i \sum_a \xi_a(x) \lambda_a\right) = \\ = \exp\left(-i \sum_a \xi'_a(x) \lambda_a\right) \exp\left(i \sum_a \theta_a(x) \lambda_a\right) \end{aligned} \quad (19.7.6)$$

и

$$\begin{aligned} \exp\left(i \sum_a \theta_a^R \lambda_a\right) \exp\left(i \sum_a \xi_a(x) \lambda_a\right) = \\ = \exp\left(i \sum_a \xi'_a(x) \lambda_a\right) \exp\left(i \sum_a \theta_a(x) \lambda_a\right), \end{aligned} \quad (19.7.7)$$

где

$$\theta_a^L \equiv \theta_a^V + \theta_a^A, \quad \theta_a^R \equiv \theta_a^V - \theta_a^A.$$

Умножая уравнение (19.7.7) справа на величину, обратную (19.7.6), мы находим простое правило преобразования:

$$U'(x) = \exp\left(i \sum_a \lambda_a \theta_a^R\right) U(x) \exp\left(-i \sum_a \lambda_a \theta_a^L\right), \quad (19.7.8)$$

где $U(x)$ — унитарная унимодулярная матрица

$$U(x) \equiv \exp\left(2i \sum_a \xi_a(x) \lambda_a\right). \quad (19.7.9)$$

Другими словами, $U(x)$ преобразуется по представлению $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3})$ группы $SU(3) \times SU(3)$. Это представление все еще нелинейно, поскольку компоненты $U(x)$ не являются независимыми; на них наложены условия $U^\dagger U = 1$ и $\text{Det } U = 1$.

Единственный $SU(3) \times SU(3)$ -инвариантный член в лагранжиане голдстоуновских бозонов второго порядка по пространственно-временным производным имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{deriv}} = -\frac{1}{16} F^2 \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\}, \quad (19.7.10)$$

где F^2 — положительная константа, которая будет определена позднее. Мы можем выразить ξ_a через нормированные обычным образом

псевдоскалярные мезонные поля, написав

$$\sum_a \lambda_a \xi_a = \frac{\sqrt{2}}{F} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 & K^0 \\ \bar{K}^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \eta^0 \end{bmatrix} \equiv \frac{\sqrt{2} B}{F}, \quad (19.7.11)$$

так что кинетический член в лагранжиане (19.7.10) будет иметь стандартный вид

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 - \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- - \partial_\mu K^+ \partial^\mu \bar{K}^- - \\ - \partial_\mu K^0 \partial^\mu \bar{K}^0 - \frac{1}{2} \partial_\mu \eta^0 \partial^\mu \eta^0.$$

Чтобы определить константу F , заметим, сравнивая уравнение (19.7.4) с (19.5.42), что для бесконечно малого ξ компоненты ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 совпадают с голдстоуновскими полями ζ_1 , ζ_2 и ζ_3 , введенными в § 19.5. Тогда, сравнивая (19.7.11) с (19.5.17) и (19.5.32), мы видим, что константа F , определенная согласно (19.7.10), совпадает с $F_\pi = 184$ МэВ, введенной в § 19.4.

$SU(3) \times SU(3)$ -симметрия квантовой хромодинамики нарушается добавлением массового кваркового члена, который выражается через $\tilde{q}(x)$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\bar{q} M_q q = -\tilde{q} e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi} M_q e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi} \tilde{q}, \quad (19.7.12)$$

где

$$M_q = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix}. \quad (19.7.13)$$

Уравнение (19.7.12) содержит чисто бозонную часть, которая получается заменой кваркового билинейного члена на его вакуумное среднее, равное (как можно получить из ненарушенной $SU(3)$ -симметрии и четности¹⁾)

$$\langle \tilde{q}_n \gamma_5 \tilde{q}_m \rangle_0 = 0, \quad \langle \tilde{q}_n \tilde{q}_m \rangle_0 = -v \delta_{nm}. \quad (19.7.14)$$

¹⁾ Тот факт, что законы сохранения четности, заряда и странности, справедливые для вакуума, имеют тот же вид и для кварковой массовой матрицы, вытекает из условия подстройки вакуума, обсуждавшегося в § 19.3. Когда кварковые поля определены так, что все их массы положительны, знак “−” в уравнении (19.7.14) при $v > 0$ возникает из-за того, что истинный вакуум должен быть минимумом энергии для вакуумных состояний, которые отличаются друг от друга $SU(3) \times SU(3)$ -поворотами. Как мы увидим, именно такой выбор знака дает положительную определенность масс октета псевдоголдстоуновских бозонов.

Массовый член в лагранжиане голдстоуновских бозонов, таким образом, имеет вид

$$-\frac{v}{F_\pi^2} \text{Tr}\{B, \{B, M_q\}\} = -\frac{v}{F_\pi^2} \left[4m_u \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 \right)^2 + \right. \\ \left. + 4(m_u + m_d) \pi^+ \pi^- + 4(m_u + m_s) K^+ \bar{K}^- + 4m_d \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \pi_0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 \right)^2 + \right. \\ \left. + 4(m_d + m_s) K^0 \bar{K}^0 + \frac{8}{3} m_s (\eta^0)^2 \right]. \quad (19.7.15)$$

Отсюда можно найти, что [35]

$$m_{\pi^+}^2 = m_{\pi^0}^2 = \frac{4v}{F_\pi^2} [m_u + m_d], \\ m_{K^+}^2 = \frac{4v}{F_\pi^2} [m_u + m_s], \\ m_{K^0}^2 = \frac{4v}{F_\pi^2} [m_d + m_s], \\ m_{\eta^0}^2 = \frac{4v}{F_\pi^2} \left[\frac{4m_s + m_d + m_u}{3} \right]. \quad (19.7.16)$$

Кроме того, существует член, смешивающий поля π^0 и η^0 :

$$m_{\pi\eta}^2 = \frac{4v}{\sqrt{3} F_\pi^2} [m_u - m_d]. \quad (19.7.17)$$

Точно такие же результаты можно получить, используя операторные методы. Благодаря теореме Нетер можно построить генераторы T_a и X_a , для которых

$$[T_a, q] = -\lambda_a q, \quad [X_a, q] = -\gamma_5 \lambda_a q. \quad (19.7.18)$$

Мы можем выписать голдстоуновские поля π_a в действительном базисе, тогда $\pi^\pm = (\pi_1 \pm i\pi_2)/\sqrt{2}$, $\pi^0 = \pi_3$, $K^\pm = (\pi_4 \pm i\pi_5)/\sqrt{2}$, $K^0 = (\pi_6 + i\pi_7)/\sqrt{2}$, $\bar{K}^0 = (\pi_6 - i\pi_7)/\sqrt{2}$ и $\eta^0 = \pi_8$. Из $SU(3)$ -симметрии, которая сохраняется при спонтанном нарушении симметрии, следует, что F -матрица этих бозонов имеет вид $F_{ab} = F_\pi \delta_{ab}$. Симметрия $SU(3) \times SU(3)$ также с самого начала нарушается массовым членом в гамильтониане

$$H_1 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s = \bar{q} M_q q,$$

где M_q — кварковая массовая матрица (19.7.13). Массовая матрица для псевдоголдстоуновских бозонов может быть найдена из уравнения (19.3.20) и оказывается равной

$$M_{ab}^2 = -F_\pi^{-2} \langle \bar{q} \{ \lambda_a, \{ \lambda_b, M_q \} \} q \rangle_0. \quad (19.7.19)$$

Поскольку она имеет первый порядок по величинам масс кварков,

с точностью до этого порядка можно далее пользоваться соотношениями

$$\langle \bar{u}u \rangle_0 = \langle \bar{d}d \rangle_0 = \langle \bar{s}s \rangle_0 = -v.$$

Поэтому выражения (19.7.16) и (19.7.17) остаются верными.

Массы $M_{K^+} = 493,65$ МэВ и $m_{K^0} = 497,7$ МэВ частиц дублета каонов достаточно близки друг к другу и велики по сравнению с массой пионов, поэтому из (19.7.16) можно видеть, что массы m_u и m_d должны быть существенно меньшими, чем m_s . При вычислении величин, чувствительных к изменению m_u и m_d (например, разницы масс каонов или пионов), необходимо принимать во внимание еще одну малую поправку — влияние электромагнитных сил. Электромагнитный ток равен

$$J^0 = ie\bar{q}\gamma^\mu Qq,$$

где Q — диагональная матрица с элементами $2/3$, $1/3$ и $-1/3$. Его коммутаторы с генераторами симметрии $SU(3) \times SU(3)$ имеют вид

$$[T_a, J^\mu] = -ie \frac{1}{2} \bar{q}\gamma^\mu [Q, \lambda_a]q, \quad [X_a, J^\mu] = -ie \frac{1}{2} \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 [Q, \lambda_a]q.$$

Мы видим, что J^μ коммутирует с операторами X_3 , X_6 , X_7 и X_8 , а также с T_3 , T_6 , T_7 и T_8 , поэтому часть гамильтониана, отвечающая за электромагнетизм, оказывается инвариантной относительно подгруппы $SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$, генераторами которой являются указанные операторы. Таким образом, в пределе безмассовых кварков *электромагнитные эффекты не приводят к появлению массы у нейтральных псевдоголдстоуновских бозонов* [36] π^0 , K^0 , $\bar{K}^0$ и η^0 , связанных со спонтанным нарушением симметрий, которым соответствуют генераторы X_3 , X_6 , X_7 и X_8 . Кроме того, в пределе нулевых масс кварков сохраняется симметрия $SU(2)$ с генераторами T_6 , T_7 и $\sqrt{3}T_8 - T_3$, под действием которых K^+ и π^+ преобразуются как дублет, поэтому в этом пределе *электромагнитные поправки к массам K^+ и π^+ оказываются равными* [36]. Поскольку кварковые массовые члены и электромагнитные поправки малы, разумно рассматривать их влияние как добавление некоторых членов к эффективному гамильтониану, описывающему кварки. Как можно видеть, с учетом электромагнитных эффектов получим следующее изменение в массовых формулах (19.7.16) [37]:

$$\begin{aligned} m_{K^\pm}^2 &= 4v(m_u + m_s)/F_\pi^2 + \Delta, \\ m_{K^0}^2 &= m_{\bar{K}^0}^2 = 4v(m_d + m_s)/F_\pi^2, \\ m_{\pi^\pm}^2 &= 4v(m_d + m_u)/F_\pi^2 + \Delta, \\ m_{\pi^0}^2 &= 4v(m_d + m_u)/F_\pi^2, \\ m_\eta^2 &= 4v(m_u + m_d + 4m_s)/3F_\pi^2, \end{aligned} \tag{19.7.20}$$

где Δ — электромагнитная поправка к квадратам масс частиц K^+ и π^+ .

Из этих формул можно получить некий аналог известного соотношения Гелл-Мана–Окубо²⁾:

$$3m_\eta^2 + 2m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 = 2m_{K^+}^2 + m_{K^0}^2. \quad (19.7.21)$$

Если взять экспериментальные значения масс пионов и каонов, то на основании этого соотношения можно найти массу η . Она оказывается равной 566 МэВ, что находится в хорошем согласии с экспериментальным значением 547 МэВ. Небольшую разницу между этими двумя цифрами обычно объясняют перемешиванием состояния, описывающего частицу η , с некоторой другой псевдоскалярной частицей η' с массой 958 МэВ.

Из формул (19.7.20) можно через массы пионов и каонов выразить отношения между массами кварков [37]:

$$\begin{aligned} \frac{m_d}{m_s} &= \frac{m_{K^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{K^+}^2}{m_{K^0}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2}, \\ \frac{m_u}{m_s} &= \frac{2m_{\pi^0}^2 - m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2 + m_{K^+}^2}{m_{K^0}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2}. \end{aligned} \quad (19.7.22)$$

Полагая $m_{\pi^+} = 139,57$ МэВ, $m_{\pi^0} = 134,974$ МэВ, $m_{K^+} = 493,65$ МэВ и $m_{K^0} = 497,7$ МэВ, можно найти, что $m_d/m_s = 0,050$, а $m_u/m_s = 0,027$. Таким образом, отношение масс кварков u и d скорее ближе к 2, нежели к 1. (Более точный расчет, выполненный в 1996 г. [38a] и использующий множество других данных, привел к результату $m_d/m_s = 0,053 \pm 0,002$ и $m_u/m_s = 0,029 \pm 0,003$.)

²⁾ Это соотношение было первоначально выведено [38] для случая приближенной $SU(3)$ -симметрии Гелл-Мана–Неемана с генераторами T_a в предположении нулевой разницы масс внутри изотопических мультиплетов. На основании этого вывода невозможно понять, связывает ли это соотношение массы псевдоскалярных частиц или их квадраты, как в нашем случае. Применение этого соотношения к массам на самом деле работает довольно плохо, следующее из него значение массы η оказывается равным 613 МэВ. Тот факт, что соотношение Гелл-Мана–Окубо связывает квадраты масс, а не сами массы, говорит в пользу интерпретации этих частиц в качестве голдстоуновских бозонов, возникающих при спонтанном нарушении $SU(3) \times SU(3)$ -симметрии. Гелл-Манн и Окубо использовали приближенную $SU(3)$ -симметрию также для того, чтобы вывести соотношения между массами других частиц, например соотношение $2m_N + 2m_\Xi = 3m_\Lambda + m_\Sigma$, связывающее массы в наиболее легком барионном октете в пределе точной изоспиновой симметрии. Для таких мультиплетов средняя масса настолько превосходит разницу между массами частиц в мультиплете, что практически нет разницы, применяется ли соотношение Гелл-Мана–Окубо к самим массам или их квадратам.

Из этих данных нельзя узнать собственно значения масс кварков. На самом деле понятие кварковой массы плохо определено до тех пор, пока не определено, как перенормируются билинейные комбинации кварковых полей. Часто перенормировка выбирается так, что масса m_s оказывается равной разнице масс между разными изомультиплетами в $SU(3)$ -мультиплете, отличающимися на единицу странности. Например, самый легкий октет векторных мезонов состоит из изотопического дублета K^* с массой 892 МэВ, интерпретирующегося как связанное состояние $\bar{s}$ и u (или d), его антидублета, составленного из s и $\bar{u}$ (или $\bar{d}$), ρ -частицы с $T = 1$ и массой 770 МэВ и ω -частицы с $T = 0$ и массой 783 МэВ, которые интерпретируются как связанные состояния $\bar{u}$ (или $\bar{d}$) и u (или d). Если мы хотим объяснить разницу между массой K^* и средним значением масс ρ и ω тем, что масса s -кварка относительно велика, член в гамильтониане, билинейный по кварковым полям, должен перенормироваться так, что

$$m_s - \frac{1}{2}(m_u + m_d) = m_{K^*} - \frac{1}{2}(m_\rho + m_\omega) = 120 \text{ МэВ}$$

и $m_s = 125 \text{ МэВ}$. Если учесть полученные соотношения между массами кварков, это означает, что $m_d = 6,0 \text{ МэВ}$ и $m_u = 3,3 \text{ МэВ}$. Однако этим оценкам масс кварков можно доверять в гораздо меньшей степени, чем отношениям между массами кварков (19.7.22). Массу m_s часто считают равной [38b] 180 МэВ, а не 125 МэВ.

Массовый член (19.7.12) включает взаимодействия между мезонами. Чисто бозонную часть этого вклада в лагранжиан можно, воспользовавшись уравнениями (19.7.14), (19.7.11) и (19.7.9), записать в виде

$$\mathcal{L}_{\text{масса, бозоны}} = \frac{1}{2} v \text{Tr}\{M_q(U^\dagger + U)\}. \quad (19.7.23)$$

Эту формулу можно вывести непосредственно из симметричных соображений, которые также позволяют нам найти все возможные члены высшего порядка по M_q . Предположим, что мы ввели внешнее 3×3 -поле ξ и заменили массовый член (19.7.12) в лагранжиане квантовой хромодинамики на лагранжиан с взаимодействием кварковых полей и ξ :

$$\mathcal{L}_\chi = -\bar{q} \left[\frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \chi + \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \chi^\dagger \right] q. \quad (19.7.24)$$

Он аналогичен выражению (19.7.12) с точностью до замены $\xi = \xi^+ = M_q$. Смысл этого усложнения состоит в том, что лагранжиан теории становится инвариантным относительно группы $SU(3) \times SU(3)$, если принять правило преобразования поля χ в виде

$$\chi \rightarrow \exp\left(i \sum_a \lambda_a \theta_a^R\right) \chi \exp\left(-i \sum_a \lambda_a \theta_a^L\right). \quad (19.7.25)$$

Таким образом, можно построить все возможные бозонные члены, включающие кварковые массы, выписывая $SU(3) \times SU(3)$ -инвариантный лагранжиан самого общего вида (с точностью до заданного порядка по производным и M_q), включающий U и χ , требуя инвариантности относительно преобразования четности:

$$U(\mathbf{x}, t) \leftrightarrow U^\dagger(-\mathbf{x}, t), \quad \chi \leftrightarrow \chi^\dagger, \quad (19.7.26)$$

а затем выполняя замену

$$\chi = \chi^\dagger = M_q. \quad (19.7.27)$$

Например, взаимодействие $\text{Tr}(U^+ \xi + U \xi^+)$ инвариантно относительно преобразований $SU(3) \times SU(3)$ и четности; выполняя замену (19.7.27), мы видим, что оно сводится к вкладу (19.7.23).

Используя эту технику, Гассер и Лейтвайлер [39] построили полный эффективный лагранжиан для октета псевдоскаляров с точностью до четвертого порядка по импульсам и массам мезонов (причем кварковые массы считались порядка квадратов масс мезонов):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & L_1 \text{Tr}\{\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U\}^2 + L_2 \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger\} \text{Tr}\{\partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger\} + \\ & + L_3 \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger\} + L_4 \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\} \text{Tr}\{M_q(U + U^\dagger)\} + \\ & + L_5 \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger (M_q U + U^\dagger M_q)\} + L_6 [\text{Tr}\{M_q(U + U^\dagger)\}]^2 + \\ & + L_7 [\text{Tr}\{(U^\dagger - U)M_q\}]^2 + L_8 \text{Tr}\{((UM_q)^2 + (U^\dagger M_q)^2)\}, \end{aligned} \quad (19.7.28)$$

где постоянные $L_1, \dots, L_8$ должны быть определены из эксперимента. Полный эффективный лагранжиан (с точностью до четвертого порядка по массам мезонов и импульсам) имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4, \quad (19.7.29)$$

где $\mathcal{L}_2$ — сумма вкладов (19.7.10) и (19.7.23):

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{16} F^2 \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\} + \frac{1}{2} v \text{Tr}\{M_q(U^\dagger + U)\}. \quad (19.7.30)$$

В этот лагранжиан можно включить электрослабые взаимодействия: для этого нужно заменить обычные производные ∂_μ на ковариантные D_μ и добавить к $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ несколько дополнительных членов.

Если следовать предложенным в § 19.5 и 19.6 аргументам, основанным на подсчете степеней, для того чтобы вычислять элементы S -матрицы с точностью до четвертого порядка по массам мезонов и импульсам, мы должны рассмотреть все древесные диаграммы во всех порядках по $\mathcal{L}_2$ и в первом порядке по $\mathcal{L}_4$, а также однопетлевые диаграммы, построенные по $\mathcal{L}_2$. Изучение динамики мезонов (а также электрослабых взаимодействий, существенных в этих процессах) с использованием этого эффективного лагранжиана было выполнено Гассером, Лейтвалером и др. [40]

* * *

Массовый кварковый член (19.7.12) естественным образом влияет на другие $SU(3)$ -мультиплеты. Для любого мультиплета, отличного от псевдоскалярного октета, это влияние может быть учтено рассмотрением первого порядка теории возмущений, получающийся сдвиг массовой матрицы мультиплета $|i\rangle$ равен

$$\delta m_{ij} = \langle i | \tilde{q} M_q \tilde{q} | j \rangle. \quad (19.7.31)$$

Для того чтобы связать различные матричные элементы $\langle i | \tilde{q}_r \tilde{q}_s | j \rangle$ друг с другом, можно воспользоваться $SU(3)$ -симметрией [41]. Например, из симметричных соображений легко показать, что

$$\frac{\delta m_p - \delta m_n}{m_u - m_d} = \frac{m_\Xi - m_\Sigma}{m_s}. \quad (19.7.32)$$

Используя это выражение и уравнение (19.7.22), мы можем найти вклад кварковых масс в расщепление масс нуклонов:

$$\delta m_p - \delta m_n \simeq -2,5 \text{ МэВ}.$$

Если воспользоваться этим результатом при анализе уравнений (19.5.65) и (19.5.66), можно получить ведущий вклад в нарушение изоспиновой симметрии для низкоэнергетических взаимодействий пионов с нуклонами. Конечно, определенная таким образом величина $\delta m_p - \delta m_n$ не совпадает с полной разностью масс протона и нейтрона, в которую дают важный вклад процессы поглощения и излучения фотона. Поскольку нейтрон не имеет электрического заряда, такой электромагнитный вклад почти наверняка положителен, что находится в согласии с наблюдаемой разностью масс протона и нейтрона $-1,3 \text{ МэВ}$, на электромагнитные эффекты, таким образом, должен приходиться вклад $+1,2 \text{ МэВ}$. К сожалению, точное вычисление этого электромагнитного вклада в разность масс оказалось сложной задачей.

§ 19.8. Аномальные члены в эффективных теориях поля¹⁾

При выполнении программы построения эффективных теорий поля, рассмотренной в предыдущих трех параграфах, необходимо соблюдать условие, чтобы действие содержало все возможные члены, которые допускает симметрия теории. Развитые методы позволяют нам строить любые *явно* инвариантные члены, используя либо общий

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

формализм ковариантных производных, описанный в § 19.6, либо используя для киральных симметрий преобразующееся линейно поле, на которое наложены нелинейные связи, подобное $U(x)$ из § 19.7. Однако может оказаться, что в действии эффективной теории поля появятся дополнительные члены, которые являются аномальными. Аномальные члены определяются интегралами от четырехмерных лагранжевых плотностей, которые *не являются* инвариантными, но вариация которых вдоль группового многообразия нарушенной симметрии равна полной производной по пространству–времени, что обеспечивает инвариантность соответствующего члена в действии.

Как будет показано в § 22.7, такой член в случае симметрии $SU(3) \times SU(3)$ был найден Вессом и Зумино [42] при изучении “аномалий”, связанных с кварковыми петлями. Как должен быть устроен такой член, можно понять даже без привлечения какой-либо информации о теории кварков и глюонов.

Простейший способ описать член Весса–Зумино состоит в том, чтобы расширить пространство–время до пятимерного, что было предложено Виттенем [43]. Как только мы потребуем, чтобы поля эффективной теории поля при $x_\mu \rightarrow \infty$ стремились к одному и тому же пределу по любому направлению, можно считать, что пространство–время имеет топологию сферы S_4 , так что точка на бесконечности рассматривается как обычная точка. Как было отмечено в § 19.6, когда группа G нарушена до некоторой подгруппы H , можно считать, что возможные значения голдстоуновских бозонных полей ξ_a в любой точке пространства–времени задают точку в пространстве смежных классов G/H (пространстве G , для которого два элемента считаются совпадающими, если они отличаются умножением справа на элемент H). Поэтому набор функций $\xi_a(x)$ задает отображение пространственно-временной сферы S_4 на G/H . В зависимости от топологии G/H может оказаться возможным любую 4-сферу в G/H гладким образом деформировать в точку. Это означает следующее: вместо $\xi_a(x)$ можно рассмотреть определенную при $0 \leq s \leq 1$ непрерывную функцию $\xi_a(x; s)$ такую, что $\xi_a(x; 0) = \xi_a(x)$, а $\xi_a(x; 1)$ совпадает с любой заданной точкой на исходной сфере (например, с $\xi_a = 0$). С математической точки зрения это утверждение состоит в том, что гомотопическая группа $\pi_4(G/H)$ тривиальна. (Свойства гомотопических групп обсуждаются в § 23.2.) Известно, что именно такая ситуация реализуется в случае симметрии $SU(N) \times SU(N)$, спонтанно нарушенной до $SU(N)$, — в этом случае топология смежного класса $SU(N) \times SU(N)/SU(N)$ совпадает с топологией самой группы $SU(N)$ ²⁾. Таким образом, в физически интересном случае

²⁾ В самом деле, для представления правосторонних смежных классов $SU(N)$ в $SU(N) \times SU(N)$ мы можем использовать элементы $U(x)$ группы $SU(N)$.

$G = SU(3) \times SU(3)$, $H = SU(3)$ мы можем вместо полей голдстоуновских бозонов или, что эквивалентно, $U(x)$ (см. уравнение (19.7.9)), ввести унитарную унимодулярную матрицу $U(y)$, определенную на пятимерном шаре B_5 с координатами x_μ и s , поверхность которого является четырехмерной пространственно-временной сферой.

Рассмотрим теперь следующую функцию, построенную с помощью $U(y)$:

$$\omega(y) \equiv -\frac{i}{240\pi^2} \epsilon^{ijklm} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^i} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^j} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^k} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^l} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^m} \right\}, \quad (19.8.1)$$

где индексы i, j и т. д. пробегают по пяти координатам x^μ и s (фаза и численный коэффициент выбраны для дальнейшего удобства). Она явно инвариантна относительно киральных преобразований (19.7.8). Кроме того, поскольку ϵ^{ijklm} — тензорная плотность, интеграл от $\omega(y)$ по пятимерному шару не зависит (с точностью до знака) от выбора координат y^i в пятимерном пространстве. Более того, этот интеграл зависит только от значений $U(y)$ на поверхности шара, т. е. в четырехмерном пространстве-времени. Чтобы проверить это, заметим, что если выполнить бесконечно малую вариацию $\delta U(y)$ матрицы $U(y)$ внутри шара, $\omega(y)$ меняется на полную производную:

$$\delta\omega(y) = -\frac{i}{48\pi^2} \epsilon^{ijklm} \frac{\partial}{\partial y^m} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^i} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^j} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^k} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^l} U^{-1} \delta U \right\} \quad (19.8.2)$$

(см. § 23.4), поэтому изменение $U(y)$, не влияющее на его значение в пространстве-времени, также не влияет на интеграл от (19.8.1) по пятимерному шару B_5 , поверхность которого совпадает с пространством-временем. Таким образом, мы можем рассматривать этот интеграл как новый член в действии

$$I_{\text{WZW}}[U] = n \int_{B_5} d^5 y \omega(y), \quad (19.8.3)$$

где n — некоторый коэффициент, который мы пока оставляем произвольным. Это выражение можно переписать в виде четырехмерного интеграла от некоторой лагранжевой плотности, не совпадающей с инвариантным относительно группы $SU(3) \times SU(3)$ лагранжианом. Воспользовавшись уравнением (19.7.9), можно видеть, что ведущим в $\omega(x)$ членом в пределе слабых мезонных полей является

$$\omega(x) \rightarrow \frac{8\sqrt{2}}{15\pi^2 F_\pi^5} \epsilon^{ijklm} \text{Tr} \left\{ \frac{\partial B}{\partial y^i} \frac{\partial B}{\partial y^j} \frac{\partial B}{\partial y^k} \frac{\partial B}{\partial y^l} \frac{\partial B}{\partial y^m} \right\}, \quad (19.8.4)$$

где B — матрица (19.7.11) голдстоуновских бозонных полей. Таким образом, из теоремы Гаусса следует, что

$$I_{\text{WZW}}[U] = \frac{8\sqrt{2}n}{15\pi^2 F_\pi^5} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int_{S_4} d^4x \operatorname{Tr} \left\{ B \frac{\partial B}{\partial x^\mu} \frac{\partial B}{\partial x^\nu} \frac{\partial B}{\partial x^\rho} \frac{\partial B}{\partial x^\sigma} \right\} + O\left(\frac{B^6}{F_\pi^6}\right). \quad (19.8.5)$$

Хотя сама эта величина является кирально-инвариантной, она не может быть переписана в виде интеграла по пространству–времени от кирально-инвариантной величины. В самом деле, всякая кирально-инвариантная плотность должна быть построена с использованием первой и более высоких ковариантных производных голдстоуновских полей. Поэтому в ее разложении по степеням B ведущий член должен содержать только производные B , но не само поле B .

Как отметил Виттен, добавление в эффективное действие подобного члена разрешает противоречие между $SU(3) \times SU(3)$ -теорией и экспериментом, которое состоит в следующем. Поскольку в эффективных лагранжианах (19.7.28) и (19.7.29) (или в подобных членах высшего порядка) нет слагаемых, пропорциональных $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, из сохранения четности следует, что эти эффективные лагранжианы должны быть четными относительно голдстоуновских полей. Это означает, что процессы типа $K + \bar{K} \rightarrow 3\pi$ невозможны. Однако в фундаментальной квантовой хромодинамике нет симметрии, которая могла бы привести к подобным правилам отбора. Более того, как было отмечено Виттеном, экспериментальные данные свидетельствуют в пользу того, что такого правила нет — известно, что ϕ -мезон может распадаться как на пару $K + \bar{K}$, так и с образованием трех π -мезонов. Из уравнения (19.8.5) следует, что от нежелательного правила отбора можно отказаться, если добавить в действие член Весса–Зумино–Виттена.

Замечательно, что коэффициент перед членом Весса–Зумино–Виттена не является свободным параметром. Как показал Виттен [43], хотя член Весса–Зумино–Виттена и не изменяется при гладких деформациях поля $U(y)$ в шаре B_5 , оставляющих инвариантным поле $U(x)$ на его границе S_4 , он может меняться под действием деформаций $U(y)$, не являющихся непрерывными и не изменяющими $U(x)$ на границе. Шар B_5 можно представить себе как половину 5-сферы S_5 , причем пространство–время S_4 будет в этой картине играть роль границы между B_5 и другой половиной сферы B'_5 . (Представьте себе S_5 как аналог поверхности Земли, где S_4 — экватор, а B_5 и B'_5 — северная и южная полусферы.) Поскольку S_4 также является границей другой половины S_5 , мы можем переписать член Весса–Зумино–Виттена в виде

$$I'_{\text{WZW}}[U] = -n \int_{B'_5} d^5y \omega(y), \quad (19.8.6)$$

где знак “—” добавлен, поскольку граница B'_5 — 4-сфера с противоположной ориентацией. Можно подумать, что в случае произвольных голдстоуновских полей выражения (19.8.3) и (19.8.6) равны друг другу, только если $n = 0$. Однако если эти выражения равны друг другу с точностью до слагаемого $2\pi \times N$, где N — целое, соответствующие функциональные интегралы, содержащие весовой множитель $\exp(iI)$, будут совпадать, так что

$$I_{WZW}[U] - I'_{WZW}[U] = n \int_{S_5} d^5 y \omega(y) = 2\pi \times \text{целое число}. \quad (19.8.7)$$

С учетом нормировочных множителей, добавленных в определение (19.8.1) величины $\omega(y)$, можно видеть, что интеграл от $\omega(y)$ по любой 5-сфере оказывается равным [44] 2π . Отсюда следует, что коэффициент n должен быть целым числом.

Рассмотрев пример с членом Весса–Зумино–Виттена, естественно задать вопрос: не могут ли в действии содержаться другие, не обязательно связанные с кварковыми петлями, аномальные члены, которые являются инвариантными относительно $SU(3) \times SU(3)$ и в то же время не могут быть представлены в виде четырехмерных интегралов от $SU(3) \times SU(3)$ -инвариантных лагранжевых плотностей. К счастью, ответ на этот вопрос оказывается отрицательным. Можно показать [45], что в случае группы G , нарушенной до подгруппы H (такой, что $\pi_4(G/H) = 0$) любой член $F[\xi]$ в действии для голдстоуновских полей $\xi_a(x)$ может быть представлен в виде интеграла от G -инвариантной 5-формы Ω по пятимерному шару B_5 , границей которого является пространственно-временная 4-сфера S_4 :

$$F[\xi] = \int_{B_5} d^5 y \epsilon^{ijklm} \frac{\partial \xi_a}{\partial y^i} \frac{\partial \xi_b}{\partial y^j} \frac{\partial \xi_c}{\partial y^k} \frac{\partial \xi_d}{\partial y^l} \frac{\partial \xi_e}{\partial y^m} \Omega_{abcde}(\xi(y)). \quad (19.8.8)$$

Для того чтобы эта величина не зависела от способа, посредством которого поле $\xi_a(x)$ продолжается на внутренность 5-шара, необходимо, чтобы 5-форма Ω представляла собой внешнюю производную от некоторой 4-формы:

$$\Omega_{abcde}(\xi) = (\partial/\partial \xi_{[a} \mathcal{L}_{bcde]}(\xi) \quad (19.8.9)$$

(здесь квадратные скобки, как обычно, обозначают антисимметризацию по соответствующим индексам). В этом случае

$$F[\xi] = \int_{S_4} d^4 x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^b}{\partial x^\nu} \frac{\partial \xi^c}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^d}{\partial x^\sigma} \mathcal{L}_{abcd}(\xi). \quad (19.8.10)$$

Форма Ω является замкнутой, т. е. ее внешняя производная обращается в нуль:

$$(\partial/\partial \xi_{[f} \Omega_{abcde]})(\xi) = 0. \quad (19.8.11)$$

В том случае, если форма $\mathcal{L}_{abcd}(x)$ также G -инвариантна, функционал (19.8.10) воспроизводит явно инвариантные относительно G члены в действии, которые обсуждались в предыдущих трех параграфах. Аномальные члены в действии возникают, поскольку, хотя любой член в $\Omega(y)$ является G -инвариантной внешней производной от некоторой 4-формы, некоторые из этих 4-форм могут не являться внешними производными, инвариантных относительно G 4-форм. Таким образом, новые члены в действии можно отождествить с 5-формами, независимыми в том смысле, что никакая их линейная комбинация не может являться внешней производной от G -инвариантной 4-формы. Такие формы известны в математике как генераторы *группы когомологий де Рама* $H^5(G/H; \mathbf{R})$. (Групповое умножение в этом случае просто совпадает со сложением.) Для многих многообразий с различными топологиями эти группы были вычислены [46]. В частности, оказывается, что $H^5(SU(N) \times SU(N)/SU(N); \mathbf{R})$ имеет единственный генератор, заданный уравнением (19.8.1). Таким образом, ничего не зная о фундаментальной теории кварков и глюонов, мы имеем полную информацию о возможных аномальных членах в эффективном действии для голдстоуновских бозонов. Единственным параметром, который не фиксирует математика, является целое число n . Как будет показано в § 22.7, в случае $SU(N_c)$ -калибровочных теорий это число совпадает с числом цветов N_c , которое в квантовой хромодинамике равно трем, т. е. $n = 3$.

§ 19.9. Ненарушенные симметрии

Итак, мы выяснили, каким образом свойства голдстоуновских бозонов и структура их низкоэнергетических взаимодействий может быть определена из условия инвариантности (возможно, приближенной) теории относительно преобразований группы G , спонтанно нарушенной до некоторой подгруппы H . В случае с группами $SU(2) \times SU(2)$ и $SU(3) \times SU(3)$ информацию об их спонтанном нарушении до киральных подгрупп $SU(2)$ и $SU(3)$ соответственно мы извлекли из эксперимента. В § 22.5 будет показано, что в рамках квантовой хромодинамики $SU(3) \times SU(3)$ -симметрия безмассовых u -, d - и s -кварков в самом деле спонтанно нарушается. Однако доказать спонтанное нарушение $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии безмассовых u - и d -кварков на тех же основаниях довольно сложно¹⁾. С дру-

¹⁾ Вейнгартен [47], используя решеточные методы, показал, что независимо от того, нарушается киральная симметрия или нет, в квантовой хромодинамике с безмассовыми u - и d -кварками квантовые числа легкой частицы должны совпадать с квантовыми числами пиона. Как будет показано в § 22.5, существование в квантовой хромодинамике аномалий, связанных с фермионными петлями, совместно с предположением о конфайнменте

гой стороны, существует аргумент в пользу того, что не киральные подгруппы $SU(2)$ и $SU(3)$ не нарушаются. Он основан на так называемом *условии постоянства массы* [48], согласно которому составные частицы не могут быть безмассовыми, если их составляющие имеют ненулевую массу. Некиральные симметрии типа сохранения изоспина оказываются точными, если мы положим равными массы кварков; если бы они нарушались спонтанно, в спектре теории возникли бы безмассовые голдстоуновские бозоны, построенные из массивных кварков, что противоречит условию постоянства массы. Ниже мы представим принадлежащее Вафе и Виттену [49] доказательство того, что в калибровочных теориях типа квантовой хромодинамики подобные некиральные симметрии (имеющие место и в случае ненулевых масс кварков) в самом деле *не* могут быть спонтанно нарушены. Этот результат имеет не только академический интерес; как будет показано в § 21.4, возможно, что спонтанное нарушение электрослабой калибровочной симметрии описывается некоторой подобной квантовой хромодинамике теорией, а именно теорией “техницвета”. Для того чтобы проверить, насколько такая идея правдоподобна, необходимо знать, какие симметрии теории остаются ненарушенными.

Рассмотрим некоторую калибровочную теорию, подобную квантовой хромодинамике, в которой имеется определенное число фермионных “ароматов” в идентичных представлениях калибровочной группы. Если все фермионы имеют ненулевые массы, теория инвариантна относительно любых унитарных глобальных некиральных преобразований фермионных ароматов, которые коммутируют с массовой матрицей фермионов. Например, если n_1 фермионов имеют массу m_1 , n_2 фермионов — некоторую другую массу m_2 и т. д., то группой глобальной симметрии, относительно которой инвариантна теория, является $U(n_1) \times U(n_2) \times \dots$ (в том случае, если массы невырождены, группой глобальной симметрии теории является $U(1) \times U(1) \times \dots$; в качестве примера можно привести квантовую хромодинамику, в которой сохраняются барионное число, странность и т. д.) *Эти симметрии не могут быть спонтанно нарушенными.*

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим произвольную гриновскую функцию r фермионных и антифермионных полей²⁾. Ис-

кварков приводит к тому, что некоторые адроны обязаны иметь нулевую массу. Отсюда следует, что безмассовым является пион, что указывает на спонтанное нарушение киральной симметрии.

²⁾ В оригинальной работе Вафы и Виттена [49] сначала было доказано отсутствие спонтанного нарушения симметрии в случае $r = 1$, $x = y$. Затем авторы поняли, что отсутствие спонтанного нарушения симметрии вследствие ненулевого вакуумного среднего подобного вида не исключает нарушения симметрии другими вакуумными средними; после этого для доказательства исходного утверждения применялись другие методы.

пользуя формализм интегрирования по путям³⁾, имеем

$$\begin{aligned} \langle T\{\Psi_{u_1 k_1}(x_1) \dots \Psi_{u_r k_r}(x_r) \Psi_{v_1 l_1}^\dagger(y_1) \dots \Psi_{v_r l_r}^\dagger(y_r)\} \rangle_{\text{ВЭК}} = \\ = \frac{1}{Z} \int [dA][d\psi][d\psi^\dagger] \psi_{u_1 k_1}(x_1) \dots \psi_{u_r k_r}(x_r) \psi_{v_1 l_1}^\dagger(y_1) \dots \psi_{v_r l_r}^\dagger(y_r) \times \\ \times \exp(iI_{\text{калибр.}}[A] + iI_{\text{дирак}}[\psi, \psi^\dagger; A]), \end{aligned} \quad (19.9.1)$$

где $k_1, \dots, k_r$ и $l_1, \dots, l_r$ — дираковские спинорные индексы, $u_1, \dots, u_r$ и $v_1, \dots, v_r$ — индексы, нумерующие ароматы, $I_{\text{калибр.}}[A]$ — действие чисто калибровочной теории, $I_{\text{дирак}}[\psi, \psi^\dagger; A]$ — действие дираковской теории в присутствии калибровочного поля $A_\alpha^\mu(x)$, Z — амплитуда перехода “вакуум–вакуум”:

$$Z \equiv \int [dA][d\psi][d\psi^\dagger] \exp(iI_{\text{калибр.}}[A] + iI_{\text{дирак}}[\psi, \psi^\dagger; A]). \quad (19.9.2)$$

Необходимо заметить, что мы работаем в евклидовом пространстве–времени, для которого $x^4 = x_4 = ix^0$, $y^4 = y_4 = iy^0$, а все поля $A_\alpha^4 = = A_{4\alpha} = iA_{0\alpha}$ действительны (см. приложение А к гл. 23). В этом случае дираковское действие оказывается равным

$$I_{\text{дирак}}[\psi, \psi^\dagger; A] = i \int d^3x \int dx^4 \psi^\dagger [\not{D} + M] \psi. \quad (19.9.3)$$

Здесь M — массовая матрица фермионов, $\not{D}$ — евклидова калибровочно-инвариантная производная, свернутая с евклидовыми матрицами Дирака:

$$\not{D} = \sum_{i=1}^4 (\partial_i - it^\alpha A_{i\alpha}) \gamma_i, \quad (19.9.4)$$

где, как обычно, $\gamma_4 = i\gamma^0$. Поскольку действие квадратично по фермионным полям, мы можем точно выполнить по ним интегрирование:

$$\begin{aligned} \langle T\{\Psi_{u_1 k_1}(x_1) \dots \Psi_{u_r k_r}(x_r) \Psi_{v_1 l_1}^\dagger(y_1) \dots \Psi_{v_r l_r}^\dagger(y_r)\} \rangle_{\text{ВЭК}} = \\ = \frac{1}{Z} \int [dA] \text{Det}(\not{D} + M) \exp(iI_{\text{калибр.}}[A]) \times \\ \times [(\not{D} + M)_{x_1 u_1 k_1, y_1 v_1 l_1}^{-1} \dots (\not{D} + M)_{x_r u_r k_r, y_r v_r l_r}^{-1} \pm \text{перестановки}], \end{aligned} \quad (19.9.5)$$

³⁾ Как было показано в § 15.5, и числитель, и знаменатель пропорциональны бесконечному объему калибровочной группы, который в выражении (19.9.1) сокращается. Наличие бесконечных множителей несколько умаляет достоверность последующих выводов, однако если мы исключим их посредством введения духов, доказательство перестанет быть справедливым, поскольку оно опирается на положительную определенность действия теории. Один из способов разрешить это противоречие состоит в том, чтобы заменить непрерывное пространство–время решеткой. В этом случае калибровочная группа имеет конечный объем, и поэтому нет необходимости вводить члены, фиксирующие калибровку или духи.

где “ $\pm$ перестановки” означает, что необходимо выполнить суммирование по всем $r!$ перестановкам полей ψ , причем в случае нечетной перестановки должен браться знак “ $-$ ”, а

$$Z = \int [dA] \text{Det}(\not{D} + M) \exp(iI_{\text{калибр.}}[A]). \quad (19.9.6)$$

Выражение (19.9.5) явно инвариантно относительно любого унитарного преобразования ароматов, коммутирующего с массовой матрицей M . Не имеет никакого значения, какие непертурбативные эффекты возникают при функциональном интегрировании по калибровочным полям и духам; поскольку они нечувствительны по отношению к симметриям, которые здесь обсуждаются, функциональное интегрирование в уравнении (19.9.5) не может привести к тому, что эти симметрии окажутся нарушенными⁴⁾. Для того чтобы этот аргумент в самом деле звучал убедительно, необходимо показать, что выражение (19.9.5) хорошо определено. Это не просто вопрос математической строгости доказательства. Как было показано в § 19.1, для того чтобы симметрия не была нарушена спонтанно, не достаточно инвариантности основного состояния относительно ее преобразований. Необходимо также, чтобы симметрия основного состояния была устойчива относительно малых возмущений. Если мы нарушаем симметрию добавлением к M малого возмущения δM и если в пределе $\delta M \rightarrow 0$ выражение (19.9.5) становится сингулярным, множители δM в нарушающих симметрию матричных элементах могут взаимно уничтожиться с сингулярностями в матричных элементах, возникающими при $\delta M = 0$. Как раз эта ситуация имеет место в случае киральных симметрий — имеется предел, в котором некоторые из собственных значений матрицы M обращаются в нуль. Если перейти к пределу нулевой массы, содержащие массы множители в числителях, нарушающих симметрию вакуумных средних, сокращаются с множителями в знаменателях пропагаторов $(\not{D} + M)^{-1}$ всякий раз, когда оператор $\not{D}$ имеет нулевые собственные значения. По этой причине аргументы, которые применяются при доказательстве, работают только в случае некиральных симметрий теорий с массовыми матрицами M , никакие собственные значения которых не равны нулю.

Для того чтобы в этом случае получить ограничение на матричный элемент (19.9.5), заметим сначала, что дифференциальный оператор (19.9.4) является антиэрмитовым. Поэтому, если матрица M не имеет нулевых собственных значений, оператор, обратный $\not{D} + M$, хорошо определен. Необходимо еще показать, что оставшееся в вы-

⁴⁾ Сложнее показать, что в квантовой хромодинамике с массивными кварками не нарушаются спонтанно симметрии P , C , T , которые нетривиально действуют на калибровочные поля. Вафа и Виттен [50], применяя методы, развитые в [49], показали, что в квантовой хромодинамике P спонтанно не нарушается.

ражении (19.9.5) интегрирование по калибровочным полям (учитывая Z) не приводит в сингулярности в том случае, если M удовлетворяет условиям, накладываемым симметрией (например, если мы имеем дело с $U(n)$ -симметрией, n собственных значений матрицы M должны быть равны друг другу). Как мы увидим ниже, это означает, что при возмущении массовой матрицы фермионов M величиной δM , нарушающей глобальную симметрию теории, вариация вакуумного среднего (19.9.5) в пределе $\delta M \rightarrow 0$ стремится к нулю.

Показать, что гриновские функции (19.9.5) в координатном представлении несингулярны, довольно сложно, будем вместо этого рассматривать матричные элементы “размазанных” полей

$$\Psi_u[f] \equiv \int d^4x f^{k\dagger}(x) \Psi_{uk}(x), \quad (19.9.7)$$

где $f^k(x)$ — произвольные гладкие квадратично-интегрируемые функции. Уравнение (19.9.5) может быть переписано для них в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle T\{\Psi_{u_1}[f_1] \dots \Psi_{u_r}[f_r] \Psi_{v_1}^\dagger[g_1] \dots \Psi_{v_r}^\dagger[g_r]\} \rangle_{\text{ВЭК}} = \\ = \frac{1}{Z} \int [dA] \text{Det}(\mathcal{D} + M) \exp(iI_{\text{калибр.}}[A]) \times \\ \times [(\mathcal{D} + M)_{f_1 u_1, g_1 v_1}^{-1} \dots (\mathcal{D} + M)_{f_r u_r, g_r v_r}^{-1} \pm \text{перестановки}], \end{aligned} \quad (19.9.8)$$

где

$$(\mathcal{D} + M)_{fu, gv}^{-1} \equiv \int d^4x \int d^4y f^{k\dagger}(x) (\mathcal{D} + M)_{xuk, gvl}^{-1} g^l(y). \quad (19.9.9)$$

В этом случае пропагаторы фермионов не только хорошо определены для любого заданного калибровочного поля, но и ограничены равномерно по $A_\alpha^\mu(x)$ ⁵⁾:

$$|(\mathcal{D} + M)_{fu, gv}^{-1}| \leq \sum_a \frac{1}{|m_a|}, \quad (19.9.10)$$

⁵⁾ Для доказательства разложим это выражение по собственным векторам M : $M_{uv} c_v^a = m_a c_u^a$, $c_u^{a*} c_u^b = \delta_{ab}$. Воспользовавшись теперь соображением, предложенным Вафой и Виттеном [49], перепишем уравнение (19.9.9) в виде

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} + M)_{fu, gv}^{-1} &= \sum_a c_u^{a*} c_v^a \int d^4x \int d^4y f^{k\dagger}(x) (\mathcal{D} + m_a)_{xk, yl}^{-1} g^l(y) = \\ &= \sum_a \pm c_u^{a*} c_v^a \int_0^\infty dt \exp(-|m_a|\tau) \int d^4x \int d^4y f^{k\dagger}(x) (\exp(\mp \tau \mathcal{D}))_{xk, yl} g^l(y), \end{aligned}$$

где “ $\pm$ ” обозначает знак m_a . Поскольку матрица $c_u^{a*} c_v^a$ и оператор $(\exp(\mp \tau \mathcal{D}))_{xk, yl}$ являются унитарными, то

$$\begin{aligned} \left| c_u^{a*} c_v^a \int d^4x \int d^4y f^{k\dagger}(x) (\exp(\pm \tau \mathcal{D}))_{xk, yl} g^l(y) \right|^2 \leq \\ \leq \int d^4x |f(x)|^2 \int d^4y |g(y)|^2 = 1. \end{aligned}$$

Применяя это неравенство под знаком интеграла, приходим к (19.9.10).

где m_a — собственные значения матрицы M . Кроме того, для удобства мы нормируем теперь функции $f_i(x)$ и $g_j(y)$ условием

$$\int f_i^\dagger(x) f_i(x) d^4x = \int g_j^\dagger(y) g_j(y) d^4y = 1 \quad (19.9.11)$$

(здесь нет обычного суммирования по парным индексам!). Более того, весовая функция для среднего по калибровочным полям положительна⁶⁾:

$$\begin{aligned} \text{Det}(\not{D} + M) \exp(iI_{\text{калибр.}}[A]) &= \\ = \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^3x \int d^4x \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 F_{ij}^2\right) \sqrt{\text{Det}[(iD)^2 + M^2]}. \end{aligned} \quad (19.9.12)$$

В том случае, если весовая функция положительна, среднее от любой функции ограничено той же самой величиной, что и весовая функция. Применяя неравенство (19.9.10) в уравнении (19.9.8), можно показать, что матричный элемент ограничен следующим образом:

$$|\langle T\{\Psi_{u_1}[f_1] \dots \Psi_{u_r}[f_r] \Psi_{\nu_1}^\dagger[g_1] \dots \Psi_{\nu_r}^\dagger[g_r]\} \rangle_{\text{BAK}}| \leq r! \left[\sum_a \frac{1}{|m_a|} \right]^r. \quad (19.9.13)$$

Таким образом, в пределе $\delta M \rightarrow 0$ нет сингулярных членов, которые могли бы сократить множители δM . Чтобы показать это непосредственно, можно воспользоваться развитым подходом и получить, что член первого порядка по δM в выражении (19.9.8) ограничен следующим образом:

$$\begin{aligned} |\delta \langle T\{\Psi_{u_1}[f_1] \dots \Psi_{u_r}[f_r] \Psi_{\nu_1}^\dagger[g_1] \dots \Psi_{\nu_r}^\dagger[g_r]\} \rangle_{\text{BAK}}| &\leq \\ &\leq rr! \sum_{a,b} \frac{|(\delta M)_{ab}|}{|m_a m_b|} \left[\sum_a \frac{1}{|m_a|} \right]^{r-1}, \end{aligned} \quad (19.9.14)$$

поэтому в пределе $\delta M \rightarrow 0$ он обращается в нуль.

В реальности все кварки массивны, причем их массы неодинаковы. Поэтому из приведенных выше аргументов следует, что $U(1)$ -симметрии, подобные барионному числу, странности и т.д. не могут быть нарушены ни внутренним образом, ни спонтанно. Более сложная ситуация имеет место в случае изоспиновой или $SU(3)$ -симметрий. Если бы массы u - и d -кварков в первом случае и u -, d - и s -кварков во втором были равны, эти симметрии также не могли бы нарушаться по изложенным причинам. В действительности, как мы видели в § 19.7, эти массы не вырождены — приближенные изоспиновая и $SU(3)$ -симметрии имеют место потому, что массы кварков малы, а не потому,

⁶⁾ Здесь было использовано тождество

$$\text{Det}(\not{D} + M) = \text{Det} \gamma_5 (\not{D} + M) \gamma_5 = \text{Det}(-\not{D} + M).$$

что они одинаковы. Эти симметрии в самом деле остаются ненарушенными, если массы двух или трех кварков считаются равными и сколь угодно малыми. Поэтому изоспиновая и $SU(3)$ -симметрии хорошо выполняются в процессах, которые не чувствительны по отношению к малым массам кварков. Однако не все процессы квантовой хромодинамики принадлежат к этому классу — в пределе нулевой массы кварков безмассовыми становятся пионы или октет псевдоскалярных мезонов, к которому они принадлежат. В случае изоспиновой симметрии это не является проблемой, поскольку, как было показано в § 19.5, в первом порядке по массам кварков триплет пионов остается вырожденным, даже если $m_u \neq m_d$. В случае $SU(3)$ -симметрии разница масс кварков приводит в первом порядке к различию масс пиона, каона и η -мезона. Поэтому для процессов, в которых одномезонные полюсы доминируют, отклонения от $SU(3)$ -симметрии в самом деле могут быть большими.

§ 19.10. $U(1)$ -проблема

Используя квантовую хромодинамику в качестве теории, описывающей симметрии сильного взаимодействия, мы неизбежно сталкиваемся со следующей проблемой. Как было показано в § 19.5, нарушенная $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия является естественным следствием малости масс u - и d -кварков. Однако у лагранжиана квантовой хромодинамики, описывающей u - и d -кварки малой массы, имеется дополнительная киральная симметрия [51] $U(1)_A$ относительно преобразований

$$u \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)u, \quad d \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)d. \quad (19.10.1)$$

В том случае, если она остается ненарушенной, мы получаем удвоение спектра адронов по четности (как и для $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии), однако в экспериментах подобного удвоения не наблюдается. С другой стороны, нарушение $U(1)_A$ -симметрии должно приводить к существованию изоскалярного голдстоуновского бозона 0^- , масса которого должна быть сравнима с массой пиона. Однако экспериментальных подтверждений его существования также нет. Роль изоскалярного 0^- -бозона играет η -мезон, однако его масса существенно больше, чем масса пиона, и, как мы видели в § 19.7, его можно интерпретировать как один из голдстоуновских бозонов, соответствующих симметрии $SU(3) \times SU(3)$. В том случае, если массу s -кварка (как и массы u - и d -кварков) можно считать достаточно малой, лагранжиан квантовой хромодинамики, помимо $SU(3) \times SU(3)$ -симметрии, будет иметь дополнительную киральную $U(1)$ -симметрию относительно преобразований

$$u \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)u, \quad d \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)d, \quad s \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)s. \quad (19.10.2)$$

Спонтанное нарушение такой симметрии приводит к существованию *двух* псевдоскалярных 0^- -мезонов: одним из них будет η , а масса другого должна быть сравнима с массой пиона.

Это утверждение можно сделать более определенным [52]. Если добавить преобразование (19.10.2) к списку спонтанно нарушенных симметрий квантовой хромодинамики, описывающей безмассовые кварки, массовый член будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\text{масс}} = -\bar{q}M_q q = -\tilde{q}e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi} M_q e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi} \tilde{q}, \quad (19.10.3)$$

где

$$M_q = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix}, \quad (19.10.4)$$

причем B теперь содержит голдстоуновское поле ζ , соответствующее нарушенной симметрии (19.10.2):

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & K^0 \\ \bar{K}^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta^0 \end{bmatrix} + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta} \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix}. \quad (19.10.5)$$

Здесь F_ζ — некоторая неизвестная константа взаимодействия $U(1)_A$ -голдстоуновского бозона и соответствующего тока (множитель $\sqrt{3}$ вставлен из соображений удобства). Вновь пользуясь ненарушенной $SU(3)$ -симметрией, представляя вакуумное среднее от квадратичной по кварковым полям формы в виде (19.7.14) и раскладывая по степеням бозонных полей, можно найти, что массовый член в лагранжиане, отвечающий голдстоуновским полям, имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{v}{F_\pi^2} \text{Tr}\{B, \{B, M_q\}\} = & -\frac{v}{F_\pi^2} \left[4m_u \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta}\zeta \right)^2 + \right. \\ & + 4(m_u + m_d)\pi^+\pi^- + 4(m_u + m_s)K^+\bar{K}^- + \\ & + 4m_d \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta}\zeta \right)^2 + \\ & \left. + 4(m_d + m_s)K^0\bar{K}^0 + 4m_s \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\eta^0 + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta}\zeta \right)^2 \right]. \quad (19.10.6) \end{aligned}$$

Мы, таким образом, имеем новый вклад в массовую матрицу:

$$M_0^2 = 8v \begin{bmatrix} \frac{m_u + m_d}{2F_\pi^2} & \frac{m_u - m_d}{2\sqrt{3}F_\pi^2} & \frac{m_u - m_d}{\sqrt{6}F_\pi F_\zeta} \\ \frac{m_u - m_d}{2\sqrt{3}F_\pi^2} & \frac{m_u + m_d + 4m_s}{6F_\pi^2} & \frac{m_u + m_d - 2m_s}{3\sqrt{2}F_\pi F_\zeta} \\ \frac{m_u - m_d}{\sqrt{6}F_\pi F_\zeta} & \frac{m_u + m_d - 2m_s}{3\sqrt{2}F_\pi F_\zeta} & \frac{m_u + m_d + m_s}{3F_\zeta^2} \end{bmatrix}, \quad (19.10.7)$$

где первый столбец и строка соответствуют π^0 , второй — η^0 , третий — ζ .

В пределе m_u и m_d , стремящихся к нулю, у этой матрицы имеются два собственных вектора, соответствующие нулевому собственному значению:

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_b = \frac{1}{\sqrt{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ F_\pi \\ \sqrt{2} F_\zeta \end{pmatrix}. \quad (19.10.8)$$

В ортонормированном базисе массовая матрица с точностью до членов первого порядка по m_u и m_d имеет вид

$$m_{aa}^2 \simeq u_a^T M_0^2 u_a = \frac{4v(m_u + m_d)}{F_\pi^2}, \quad (19.10.9)$$

$$m_{bb}^2 \simeq u_b^T M_0^2 u_b = \frac{12v(m_u + m_d)}{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}, \quad (19.10.10)$$

$$m_{ab}^2 = m_{ba}^2 \simeq \frac{\sqrt{3}v(m_u - m_d)}{2F_\pi \sqrt{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}}. \quad (19.10.11)$$

Учет недиагонального члена (19.10.11) приводит к тому, что произведение собственных значений уменьшается на малую величину

$$(m_u - m_d)^2 / 64(m_u + m_d)^2.$$

Сумма собственных значений при этом не меняется, поэтому они с хорошей точностью могут быть аппроксимированы формулами (19.10.9) и (19.10.10). Сравнивая уравнение (19.10.9) с (19.7.16), мы видим, что частицей, соответствующей собственному вектору u_a , является пион π^0 . Другая частица, соответствующая собственному вектору u_b , имеет массу

$$m_b \simeq \sqrt{m_{bb}^2} \simeq \frac{\sqrt{3}m_\pi F_\pi}{\sqrt{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}} \leq \sqrt{3}m_\pi. \quad (19.10.12)$$

Таким образом, из факта нарушения $U(1)_A$ -симметрии в дополнение к существованию пиона должно следовать существование нейтрального псевдоскалярного голдстоуновского бозона с массой менее $\sqrt{3}m_\pi$. Следует ли говорить, что такой сильно взаимодействующей частицы не существует¹⁾. Как будет показано в § 23.5, эта проблема в конечном

¹⁾ Заметим, что если положить $F_\zeta \gg F_\pi$, масса дополнительного нейтрального скаляра будет очень мала. Однако его взаимодействие с другими частицами также будет настолько малым, что он не сможет быть зарегистрирован в экспериментах. Кажется маловероятным, что ситуация в квантовой хромодинамике устроена так, что отношение F_π к F_ζ очень велико. Однако именно так происходит в теориях с дополнительными полевыми переменными, предложенных, чтобы избежать эффекта нарушения четности инстантонами (см. § 23.6).

итоге была решена посредством учета непертурбативных эффектов, которые нарушают дополнительную $U(1)_A$ -симметрию.

Задачи

1. Примените общую теорию нарушенных глобальных симметрий к случаю $SO(3)$ -симметрии (с генераторами t_1 , t_2 и t_3), спонтанно нарушенной до $SO(2)$ -симметрии (с генератором t_3). Каким образом поля голдстоуновских бозонов преобразуются под действием инфинитезимальных преобразований $SO(3)$? (Используйте экспоненциальную параметризацию в пространстве смежного класса $SO(3)/SO(2)$.) Оцените ковариантную производную $D_{a\mu}$ голдстоуновского поля и некоторого поля общего вида, при действии на которое генератор t_3 ненарушенной симметрии дает ненулевое собственное значение q . Как устроен $SO(3)$ -инвариантный лагранжиан общего вида, содержащий не более двух производных голдстоуновских полей? Используя этот лагранжиан, вычислите амплитуды упругого рассеяния голдстоуновских бозонов в низшем порядке по их энергии. Как устроен $SO(3)$ -инвариантный лагранжиан общего вида, содержащий не более двух неголдстоуновских множителей и как минимум одну производную? Какой вид имеет наиболее общая функция голдстоуновских полей (не содержащая их производных), преобразующаяся как третья компонента $SO(3)$ 3-вектора? Добавьте соответствующий член в лагранжиан, выбирая коэффициент пропорциональности так, чтобы масса голдстоуновского бозона была равна m . Вновь вычислите амплитуду упругого рассеяния голдстоуновских бозонов в низшем порядке.

2. Рассмотрим некоторую теорию с глобальной симметрией $SU(N)$, спонтанно нарушенной до $SU(N-1)$. Предположим, что мы добавляем малое нарушающее симметрию возмущение, принадлежащее к фундаментальному представлению N группы $SU(N)$. Какая подгруппа исходной группы симметрии остается ненарушенной, если учесть условие подстройки вакуума? Что будет в случае, если нарушающее симметрию возмущение принадлежит присоединенному представлению группы $SU(N)$?

3. Вычислите амплитуду рассеяния пиона на пионе в однопетлевом приближении, учитывая, что масса пиона конечна.

4. Выведите “правило сумм Адлера” — обобщение правила сумм Адлера–Вайсбергера на случай пион-пионного рассеяния.

5. Вычислите трансформационные свойства пионного поля ξ_a относительно преобразований группы $SU(2) \times SU(2)$ в случае, когда смежные классы $SU(2) \times SU(2)/SU(2)$ параметризуются как $\exp(i\xi_a x_a)$.

6. Воспользовавшись уравнениями (19.7.31) и $SU(3)$ -симметрией, выведите соотношение (19.7.32).

Литература

1. *Coleman S.* Secret symmetry: an introduction to spontaneous symmetry breakdown and gauge fields // В сборнике: Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures of Sidney Coleman (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
2. *Titchmarsh E.C.* // Introduction to the Theory of Fourier Integrals (Oxford University Press, Oxford, 1937): Section 1.4.
3. *Goldstone J.* // Nuovo Cimento, **9**, 154 (1961).
4. *Nambu Y.* // Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960).
5. *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.* // Phys. Rev., **127**, 965 (1962).
6. *Adler S.* // Phys. Rev. **137**, B1022 (1965).
7. *Weinberg S.* // Phys. Rev. Lett., **29**, 1698 (1972).
8. *Dashen R.* // Phys. Rev. **183**, 1245 (1969). Относительно поправок к этому соотношению, см.: *Donoghue J.F., Holstein B.R., Wyler D.* // Phys. Rev. **D47**, 2089 (1993); *Bijnens J.* // Phys. Lett. **B306**, 343 (1993); *Maltman K., Kotchan D.* // Mod. Phys. Lett., **A5**, 2457 (1990); *Urech R.* // Nucl. Phys. **B433**, 234 (1995); *Baur R., Urech R.* // Zurich-Karlsruhe preprint ZU-TH 22/95, TTP95-31, hep-ph/9508393 (1995).
9. В качестве обзора можно рекомендовать *Towner I.S.* et al. // Chalk River preprint nucl-th/9507005.
10. *Weinberg S.* // Phys. Rev. **112**, 1375 (1958).
11. *Goldberger M.L., Treiman S.* // Phys. Rev. **111**, 354 (1966).
12. *Ericson T., Weise W.* // Pions and Nuclei, (Clarendon Press, Oxford, 1988).
13. *Ericson T.* et al. // CERN preprint CERN-TH/95-50 (1995).
14. *Das T., Guralnik G.S., Mathur V.S., Low F.E., Young J.E.* // Phys. Rev. Lett. **18**, 759 (1967).
15. *Bernstein J., Fubini S., Gell-Mann M., Thirring W.* // Nuovo Cimento **17**, 757 (1960); *Gell-Mann M., Levy M.*, ссылка 24; *Chou K.-C.* // Soviet Physics JETP **12**, 492 (1961).
16. *Nambu Y.* // Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960).
17. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.* // Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
18. *Nambu Y., Lurie D.* // Phys. Rev. **125**, 1429 (1962); *Nambu Y., Shrauner E.* // Phys. Rev. **128**, 862 (1962).
19. *Adler S.L.* // Phys. Rev. Lett. **14**, 1051 (1965); Phys. Rev. **140**, B736 (1965); *Weisberger W.I.* // Phys. Rev. Lett. **14**, 1047 (1965); в ссылке 27 влияние массы пиона было учтено посредством комбинирования результатов применения метода алгебры токов для длин

- рассеяния пионов на нуклонах и правила сумм для длин рассеяния, выведенного из дисперсионных соотношений для рассеяния на нулевой угол, см.: *Goldberger M.L., Miyazawa H., Oehme R.* // *Phys. Rev.* **99**, 986 (1955); *Goldberger M.L.* // В сборнике: *Dispersion Relations and Elementary Particles* (Wiley, N.Y., 1960). С. 146.
20. *Weinberg S.* “Current Algebra — Rapporteur’s Report” // В сборнике: *Proceedings of the International Conference on High-Energy Physics, Vienna, 1968* (CERN, Geneva, 1968). С. 253.
 21. *Gell-Mann M.* // *Physics* **1**, 63 (1964).
 22. *Weinberg S.* // *Phys. Rev. Lett.* **16**, 879 (1966).
 23. *Weinberg S.* // *Phys. Rev. Lett.* **18**, 188 (1967).
 24. *Gell-Mann M., Levy M.* // *Nuovo Cimento* **16**, 705 (1960).
 25. *Weinberg S.* // *Phys. Rev.* **166**, 1568 (1968).
 26. *Weinberg S.* // *Physica* **96A**, 327 (1979).
 27. Эти длины рассеяния были впервые вычислены посредством использования алгебры токов в работе: *Weinberg S.* // *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 616 (1966).
 28. В качестве обзора можно рекомендовать *Donoghue J.F., Golowich E., Holstein B.R.* // *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992): Section VI-4. Измерения сдвига энергии и ширины 1s-состояния π^-p -атомов под влиянием сильного взаимодействия дают следующие результаты: $a(\pi^-p \rightarrow \pi^-p) = \frac{2}{3} a_{1/2} + \frac{1}{3} a_{3/2} = 0,0885(9)m_\pi^{-1}$ и $a(\pi^-p \rightarrow \pi^0n) = \frac{1}{3} \sqrt{2}(a_3 - a_1) = -0,136(10)m_\pi^{-1}$; см.: *Sigg D.* et al., preprint ETHZ-IPP PR-95-4, июль 1995, принято к печати в *Phys. Rev. Lett.*
 29. *Weinberg S.* // *Phys. Lett.* **B251**, 288 (1990); *Nucl. Phys.* **B363**, 3 (1991); *Phys. Lett.* **B295**, 114 (1992). *Ordonez C., van Kolck U.* // *Phys. Lett.* **B291**, 459 (1992); *Ordonez C., Ray L., van Kolck U.* // *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1982 (1994); *van Kolck U.* // *Phys. Rev.* **C49**, 2932 (1994); *van Kolck U., Friar J., Goldman T.*, принято к печати в *Phys. Rev. B*. Обзор такого подхода к рассмотрению взаимодействий в ядрах представлен в *Ordonez C., Ray L., van Kolck U.*, nucl-th/9511380, представлено в *Phys. Rev. C*; *Friar J.* // *Few-Body Systems Suppl.* **99**, 1 (1996). Приложения этого метода к конкретным процессам в ядрах приведены в: *Park T.-S., Min D.-P., Rho M.* // *Phys. Rep.* **233**, 341 (1993); nucl-th/9505017; *Beane S.R., Lee C.Y., van Kolck U.* // *Phys. Rev.* **C52**, 2915 (1995); *Cohen T., Friar J., Miller G., van Kolck U.*, nucl-th/9512036; *Kaplan D.B., Savage M., Wise M.*, nucl-th/9605002.

30. *Weinberg S.*, ссылка 27; длины рассеяния пионов на нуклонах были независимо вычислены в работе: *Tomozaawa Y.* // *Nuovo Cimento* **46A**, 707 (1966).
- 30a. *Adler S.* // *Phys. Rev.* **140**, B736 (1965).
31. *Coleman S., Wess J., Zumino B.* // *Phys. Rev.* **177**, 2239 (1969); *Callan C.G., Coleman S., Wess J., Zumino B.* // *Phys. Rev.* **177**, 2247 (1969).
32. *Palais R.S.* // *J. Math. Mech.* **6**, 673 (1957); *Mostow G.D.* // *Annals of Math.* **65**, 432 (1957).
- 32a. Обсуждение других возможностей см.: *Weinberg S.* // *Physica Scripta* **21**, 773 (1980).
33. *Gell-Mann M.* // *Cal. Tech. Synchrotron Laboratory Report CTSL-20* (1961), неопубликовано. Эта и многие другие работы по $SU(3)$ -симметрии воспроизведены в книге *Gell-Mann M., Ne'eman Y. The Eightfold Way* (Benjamin, N.Y., 1964).
34. *Ne'eman Y.* // *Nucl. Phys.* **26**, 222 (1961).
35. *Gell-Mann M., Oakes R.J., Renner B.* // *Phys. Rev.* **175**, 2195 (1968); *Glashow S., Weinberg S.* // *Phys. Rev. Lett.* **20**, 224 (1968).
36. *Dashen R.* // *Phys. Rev.* **183**, 1245 (1969). Поправки были рассмотрены в работе *Langacker P., Pagels H.* // *Phys. Rev.* **D8**, 4620 (1973). Для предложенной в ссылке 17 модели отсутствие электромагнитных поправок к массе π^0 было доказано в работе *Guralnik G.S.* // *Nuovo Cimento* **36**, 1002 (1965).
37. *Weinberg S.* // В сборнике, посвященном юбилею И.И. Раби, *Trans. N.Y. Acad. Sci.* **38**, 185 (1977).
38. *Gell-Mann M.*, ссылка 33; *Okubo S.* // *Prog. Theor. Phys.*, **27**, 949 (1962).
- 38a. *Leutwyler H.* // *Bern-CERN preprint CERN-TH/96-44*, hep-ph/962366.
- 38b. *Donoghue J.F., Golowich E., Holstein B.R.*, ссылка 28.
39. *Gasser J., Leutwyler H.* // *Nucl. Phys.* **B250**, 465 (1985). См. также: *Gasser J., Leutwyler H.* // *Ann. Phys.* **158**, 142 (1984).
40. В качестве обзора можно рекомендовать: *Leutwyler H.* // *Proceedings of the XXVI International Conference on High Energy Nuclear Physics, Dallas, 1992*, ed. J. Sanford (American Institute of Physics, N.Y., 1993): 185; *Meissner U.G.* // *Rep. Prog. Phys.* **56**, 903 (1993); *Pich A.* // *Valencia preprint FTUV/95-4*, февраль 1995, принято к печати в *Reports on Progress in Physics*; *Bijnens J., Ecker G., Gasser J.* // *The Daphne Physics Handbook, Vol. 1*, eds. L. Maiani, G. Pancheri, N. Paver (INFN, Frascati, 1995): гл. 3 и 3.1; *Ecker G.*, preprint hep-ph/9501357.

41. *Coleman S., Glashow S.* // Phys. Rev. Lett. **6**, 423 (1961); *Okubo S.* // Phys. Lett. **4**, 14 (1963).
42. *Wess J., Zumino B.* // Phys. Lett. **37B**, 95 (1971).
43. *Witten E.* // Nucl. Phys. **B223**, 422 (1983).
44. *Bott R., Seely R.* // Comm. Math. Phys. **62**, 235 (1978).
45. *D'Hoker E., Weinberg S.* // Phys. Rev. **D50**, R6050 (1994).
46. Encyclopedic Dictionary of Mathematics, eds. S. Iyanaga, Y. Kawada (MIT Press, Cambridge, 1980); *Greub W., Halperin S., Vanstone R.* // Connections, Curvature and Cohomology, Vol. III (Academic Press, N.Y., 1976); A. Borel, Ann. Math. (2) **57**, 115 (1953); см. также: *Borel A.* // Collected Papers, Vol. I (Springer Verlag, Berlin, 1983).
47. *Weingarten D.* // Phys. Rev. Lett. **51**, 1830 (1983).
48. *Preskill J., Weinberg S.* // Phys. Rev. **D24**, 1059 (1981). В этой работе была использована несколько модифицированная версия аргументации 'т Хофта, который рассматривал предел больших масс кварков; см.: 'т Hooft G., лекции Cargese Summer Institute, 1979, в сборнике Recent Developements in Gauge Theories, eds. G. 'т Hooft et al. (Plenum, N.Y., 1980), перепечатано: Dynamical Gauge Symmetry Breaking, eds. E. Farhi, R. Jackiw (World Scientific, Singapore, 1982) и 'т Hooft G. // Under the Spell of the Gauge Principle (World Scientific, Singapore, 1994). Также см. § 22.5.
49. *Vafa C., Witten E.* // Nucl. Phys. **B234**, 173 (1984). Также см.: *Vafa C., Witten E.* // Commun. Math. Phys. **95**, 257 (1984).
50. *Vafa C., Witten E.* // Phys. Rev. Lett. **53**, 535 (1984).
51. *Glashow S.L.* // Hadrons and Their Interactions, ed. A. Zichichi (Academic Press, N.Y., 1968); *Glashow S.L., Jackiw R., Shei S.-S.* // Phys. Rev. **187**, 1916 (1969); *Gell-Mann M.* // Proc. Third Topical Conf. on Part. Phys., eds. W.A. Simonds, S.F. Tuan (Western Periodicals, Los Angeles, 1970); в Elementary Particle Physics (Springer-Verlag, Bonn, 1972); Acta Phys. Austriaca Suppl. **IX**, 1972 (1972); *Fritzsch H., Gell-Mann M.* // Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics, eds. J.D. Jackson, A. Roberts (Fermi National Accelerator Laboratory, Batavia, IL, 1972); Phys. Lett. **47B**, 365 (1973).
52. *Weinberg S.* // Phys. Rev. **D11**, 3583 (1975).

ОПЕРАТОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Часто бывает необходимо знать, как ведет себя амплитуда, когда 4-импульс, вносимый одним оператором и выносимый другим, стремится к бесконечности (при этом значения 4-импульсов, соответствующие всем другим внешним линиям, фиксированы). Например, мы увидим в § 20.6, что полное сечение рассеяния электрона на данном адроне H с произвольными адронами в конечном состоянии согласно условию унитарности определяется линейной комбинацией (с известными коэффициентами) компонент амплитуды:

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} \langle H | J^\mu(x) J^\nu(0) | H \rangle,$$

где k — 4-импульс, переданный от электрона адронам, а $J^\mu(x)$ — электромагнитный ток. В случае глубоко неупругого рассеяния электронов импульсу k , вносимому одним оператором тока и выносимому другим, разрешается обращаться в бесконечность. Подобным образом при изучении предела различных пропагаторов при больших значениях импульса и при выводе соответствующих правил сумм для спектральной функции в § 20.5 мы будем иметь дело с пределом при больших импульсах аналогичных фурье-преобразований, в которых состояние с одним адроном $|H\rangle$ заменено вакуумным состоянием.

Если бы такое произведение операторов, как $J^\mu(x) J^\nu(0)$, было аналитическим по x^μ , то его преобразование Фурье затухало бы экспоненциально при стремлении фурье-переменной k к бесконечности. Ведущие слагаемые фурье-преобразования в пределе больших импульсов возникают из сингулярностей произведения операторов при приближении пространственно-временных аргументов друг к другу. Изучение таких операторных произведений было начато в 1969 г. Вильсоном [1]. Изначально это была попытка сформулировать альтернативу обычной квантовой теории поля. Точно так же, как и раньше (например, с дисперсионными соотношениями и диаграммными правилами Фейнмана), попытка обойти квантовую теорию поля привела к значительным общим результатам, которые, тем не менее, могут быть наилучшим образом интерпретированы как общие свойства квантовой теории поля.

Операторное разложение (разложение произведения операторов) будет введено в § 20.1. Хорошо известное доказательство этого разложения было дано в рамках теории возмущений в 1970 г. Циммерманом [2]. В § 20.1 мы предложим более простой, однако менее строгий

непертурбативный вывод, основанный на формулировке теории поля в рамках метода интегралов по путям. В § 20.2 будет представлен другой взгляд на операторное разложение, в терминах потока больших импульсов через фейнмановские графы, что приведет нас к пертурбативному доказательству.

Существует несколько аспектов операторного разложения, которые делают его особенно полезным для получения следствия из таких теорий, как квантовая хромодинамика. Одно из этих свойств, которое будет обсуждаться в § 20.3, состоит в том, что зависимость от импульса функций, описывающих сингулярности в этом разложении, определяется ренормализационно-групповыми уравнениями. Таким образом, в асимптотически свободных теориях эти функции могут быть вычислены в пределе больших импульсов с помощью теории возмущений. Другой аспект, описанный в § 20.4, состоит в том, что эти функции обладают полной симметрией основополагающей теории, независимо от возможного спонтанного нарушения симметрии. Приложения будут рассмотрены в § 20.5 и § 20.6.

§ 20.1. Разложение: описание и вывод

Вильсон [1] предположил, что при $x \rightarrow y$ сингулярная составляющая произведения $A(x)B(y)$ двух операторов может быть представлена в виде суммы по другим локальным операторам:

$$A(x)B(y) \rightarrow \sum_C F_C^{AB}(x-y)C(y), \quad (20.1.1)$$

где $F_C^{AB}(x-y)$ — сингулярные s -числовые функции. Размерностный анализ показывает, что $F_C^{AB}(x-y)$ ведет себя при $x \rightarrow y$ как $x-y$ в степени $d_C - d_A - d_B$, где $d_\mathcal{O}$ — размерность оператора $\mathcal{O}$ в степенях массы или импульса. Поскольку $d_\mathcal{O}$ возрастает, если мы добавляем поля или производные к оператору $\mathcal{O}$, то степень сингулярности $F_C^{AB}(x-y)$ уменьшается при увеличении сложности оператора C . Замечательная особенность операторного разложения состоит в том, что это *операторное* соотношение. Применяя его к любому матричному элементу $\langle \beta | A(x)B(y) | \alpha \rangle$, получим те же самые функции $F_C^{AB}(x-y)$ для всех состояний $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$.

Как раз это уменьшение степени сингулярности в выражении (20.1.1) при усложнении оператора $C(y)$ делает такое разложение полезным при получении выводов о поведении произведения $A(x)B(y)$ при $x \rightarrow y$. Простой результат, связанный с подсчетом степеней, приведенный выше, модифицируется перенормировочными эффектами. Разложение (20.1.1) должно быть сформулировано в терминах операторов, перенормированных на некотором масштабе μ , в результате чего μ появляется вместе с $x-y$ в функции $F_C^{AB}(x-y)$. Мы увидим

в § 20.3, что в асимптотически свободных теориях $F_C^{AB}(x-y)$ все-таки ведет себя как $x-y$ в степени $d_C - d_A - d_B$, как и следует из размерностного анализа, однако с точностью только до степеней $\ln(x-y)^2$. Можно предполагать, что даже в более общих теориях сингулярности, соответствующие различным операторам $C(y)$, будут уменьшаться с усложнением этих операторов.

Соответствующее утверждение в импульсном пространстве состоит в том, что при $k \rightarrow \infty$

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} A(x)B(0) \rightarrow \sum_C V_C^{AB}(k)C(0), \quad (20.1.2)$$

при этом

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} T\{A(x)B(0)\} \rightarrow \sum_C U_C^{AB}(k)C(0), \quad (20.1.3)$$

где $V_C^{AB}(k)$ и $U_C^{AB}(k)$ — функции k^μ , которые при больших k уменьшаются все быстрее для все более сложных слагаемых в рядах.

Мы выведем обобщенную версию разложения Вильсона, в которой импульсы, соответствующие любым операторам, устремляются к бесконечности одновременно. Для этого рассмотрим функцию Грина для локальных операторов $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$ и т. д., аргументы которых приближаются к точке x , а также других локальных операторов $B_1(y_1)$, $B_2(y_2)$ и т. д. с фиксированными аргументами:

$$\begin{aligned} &\langle T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, B_1(y_1), B_2(y_2), \dots\} \rangle_0 = \\ &= \int \left[\prod_{l,z} d\phi_l(z) \right] a_1(x_1) a_2(x_2) \dots b_1(y_1) b_2(y_2) \dots \exp(iI[\phi]), \end{aligned} \quad (20.1.4)$$

где строчные буквы a и b соответствуют замене полевых операторов в A и B на c -числовые поля ϕ . Теперь окружим точку x шаром $B(R)$ радиуса R , много большим чем расстояние между x_1 , x_2 и т. д., но много меньшим, чем расстояния между x , y_1 , y_2 и т. д. Поскольку действие локально, оно может быть записано в виде

$$I = \int_{z \in B(R)} d^4z \mathcal{L}(z) + \int_{z \notin B(R)} d^4z \mathcal{L}(z). \quad (20.1.5)$$

Выражение (20.1.4) может быть тогда представлено в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\langle T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, B_1(y_1), B_2(y_2), \dots\} \rangle_0 = \\ &= \int \left[\prod_{z \notin B(R), l} d\phi_l(z) \right] b_1(y_1) b_2(y_2) \dots \exp\left(i \int_{z \notin B(R)} d^4z \mathcal{L}(z)\right) \times \end{aligned}$$

$$\times \int \left[\prod_{z \in B(R), l} d\phi_l(z) \right] a_1(x_1) a_2(x_2) \dots \exp \left(i \int_{z \in B(R)} d^4 z \mathcal{L}(z) \right), \quad (20.1.6)$$

в которой континуальный интеграл по полям внутри шара должен удовлетворять граничному условию, а именно: поля на поверхности шара должны склеиваться гладким образом с полями снаружи шара. За исключением этого граничного условия континуальный интеграл по полям внутри шара полностью независим от поведения полей вне шара. Поэтому интеграл по полям внутри шара может быть представлен через значения полей и их производных на поверхности шара, которые в свою очередь могут быть выражены через поля и их производные, экстраполированные из области вне шара к внутренней точке x . Если мы представим этот интеграл в виде ряда по произведениям¹⁾ $o(x)$ c -числовых полей и их производных, экстраполированных к x , то коэффициенты могут быть только функциями $U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots)$ разности координат. Поскольку точки y_1 , y_2 и т. д. находятся далеко вне шара $B(R)$. Изъятие этого шара из действия для полей вне шара никак не влияет на результат в пределе при $R \rightarrow 0$, поэтому в этом пределе формула (20.1.6) переписывается так:

$$\begin{aligned} \langle T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, B_1(y_1), B_2(y_2), \dots\} \rangle_0 &\rightarrow \\ &\rightarrow \int \left[\prod_{l, z} d\phi_l(z) \right] b_1(y_1) b_2(y_2) \dots \exp \left(i \int d^4 z \mathcal{L}(z) \right) \times \\ &\quad \times \sum_O U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots) o(x) = \\ &= \sum_O U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots) \langle T\{O(x), B_1(y_1), B_2(y_2), \dots\} \rangle_0 \end{aligned} \quad (20.1.7)$$

для x_1 , x_2 и т. д., приближающихся к x , где $O(x)$ — квантово-механический оператор в представлении Гейзенберга, соответствующий $o(x)$. В частности, производя преобразование Фурье по отношению к переменным y и умножая на соответствующие функции-коэффициенты, получаем из (20.1.7)

$$\begin{aligned} \langle \beta | T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots\} | \alpha \rangle &\rightarrow \\ &\rightarrow \sum_O U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots) \langle \beta | O(x) | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (20.1.8)$$

¹⁾ Для того чтобы коэффициенты этого ряда были конечными, произведения должны быть перенормированы посредством умножения на подходящие бесконечные множители. Это будет пояснено при выводе, представленном в следующем параграфе.

для произвольных состояний $|\alpha\rangle$ и $\langle\beta|$. Поскольку данное соотношение применимо для любых состояний, то это и есть обобщенная версия операторного разложения:

$$T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots\} \rightarrow \sum_O U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots) O(x). \quad (20.1.9)$$

§ 20.2. Поток импульса¹⁾

Теперь мы рассмотрим простейший пример операторного разложения — асимптотическое поведение $(n+2)$ -точечной Фейнмановской амплитуды в теории вещественного скалярного поля $\phi(x)$ с массой m и лагранжевой плотностью взаимодействия $-(1/24)g\phi^4$, когда большой 4-импульс k втекает в одну линию и вытекает из другой, а остальные внешние линии удерживаются при фиксированном импульсе. Это приведет нас к пертурбативному обоснованию выражения для главного члена в операторном разложении для данного случая, но при этом нашей истинной целью будет добиться понимания того, каким образом протекание больших импульсов через диаграммы Фейнмана приводит к этому разложению. В приложении к этой главе будет обсуждаться обобщение этих результатов на произвольный случай.

Определим $\Gamma(k; p_1, \dots, p_n)$ как сумму связных графов для n -частичной амплитуды рассеяния, внешние линии которых несут входящие импульсы k , $p - k$ и выходящие импульсы $p_1, \dots, p_n$, где $p \equiv p_1 + p_2 + \dots + p_n$. (Кроме того, будет удобно указать, что $\Gamma(k; p_1, \dots, p_n)$ включает пропагаторы для внешних линий с импульсами k и $p - k$, но не с фиксированными импульсами $p_1, \dots, p_n$). Мы хотим показать, что в любом конечном порядке теории возмущений при $k \rightarrow \infty$

$$\Gamma(k; p_1, \dots, p_n) \rightarrow U_{\phi^2}(k) F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n) + O(k^{-5}), \quad (20.2.1)$$

где $U_{\phi^2}(k)$ — не зависящая от $p_1, \dots, p_n$ и от n сумма членов порядка²⁾ k^{-4} , а $F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n)$ — амплитуда для n ϕ -линий со вставкой одной ϕ^2 -вершины, умноженная на соответствующую константу перенормировки Z_{ϕ^2} , для того чтобы сделать ее конечной. Поскольку $F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n)$ — это матричный элемент перенормированного оператора $(\phi^2)_R \equiv Z_{\phi^2} \phi^2(0)$, уравнение (20.2.1) соответствует утвержде-

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

²⁾ Всюду, где в этой главе говорится, что амплитуда имеет порядок k^A , следует понимать, что при $k^p = \kappa n^p$, где $\kappa \rightarrow \infty$, а n^p — фиксированный 4-вектор общего положения, амплитуда стремится к произведению κ^A и суммы степеней $\ln k$.

нию о том, что главный член в операторном разложении для $k \rightarrow \infty$ есть ³⁾

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} T\{\phi_R(x)\phi_R(0)\}_C \rightarrow U_{\phi^2}(k)(\phi^2(0))_R. \quad (20.2.2)$$

При оценке асимптотического поведения фейнмановских амплитуд мы должны принять во внимание тот факт, что в импульсном пространстве существуют части области интегрирования, в которых некоторые внутренние линии, в отличие от остальных внутренних линий, несут импульсы того же порядка, что и стремящиеся к бесконечности импульсы внешних линий. Вклад в $\Gamma(k; p_1, \dots, p_n)$ от части области интегрирования, в которой линии в некотором подграфе $\mathcal{S}$ несут импульсы порядка k , имеет асимптотическое поведение порядка $k^{D_{\mathcal{S}}}$, где $D_{\mathcal{S}}$ — размерность подграфа $\mathcal{S}$, вычисленная согласно правилам § 12.1. Если $\mathcal{S}$ имеет m внешних линий, которые связывают его с оставшейся частью графа, а также две внешние линии с импульсами k и $p - k$, то из уравнения (12.1.8) имеем: $D_{\mathcal{S}} = 4 - 2 - m - 4 = -2 - m$ (член -4 появляется из двух пропагаторов линий с импульсами k и $p - k$, которые, как мы указали, должны быть включены в $\Gamma(k; p_1, \dots, p_n)$). Таким образом, в асимптотическом поведении Γ доминирует та часть интеграла в импульсном пространстве, где большой импульс k протекает или через целый граф, или через некоторый подграф, в зависимости от того, который из них имеет наименьшее число внешних линий [3].

Для $n = 0$ это всегда целый граф; т. е. доминирующий вклад в интеграл вносит та часть области интегрирования, где каждая линия несет импульс порядка k , давая асимптотическое поведение порядка k^{-2} . В этом случае единственный оператор в операторном разложении, который дает вклад в матричный элемент, — это единичный оператор $C = 1$. При этом такой член исключается для $n > 0$, так как на данный момент мы ограничиваемся связными графами.

Для $n = 2$ доминирующий вклад происходит от всего графа, а также от подграфов, в которых две внешние линии с импульсами k и $p - k$ соединены с другими двумя внешними линиями мостом, состоящим из двух внутренних линий ⁴⁾, снова давая асимптотическое поведение порядка k^{-4} .

³⁾ Здесь индекс C у хронологического произведения означает, что мы рассматриваем только связные графы. Мы опустили индекс $\phi\phi$ у V_{ϕ^2} , поскольку в этой главе нас интересует только операторное разложение для двух полей ϕ . Эти поля сами перенормированы, поскольку мы подразумеваем включение контрчленов наряду с радиационными поправками для пропагаторов линий, несущих импульсы k и $p - k$.

⁴⁾ Возможность $m = 1$ исключается, поскольку симметрия этой теории относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$ исключает графы или подграфы с нечетным числом внешних линий. Возможность $m = 0$ исключается, поскольку Γ по определению возникает только из связных графов.

Анализ случаев $n = 2$ и $n \geq 4$ усложняется тем, что граф общего вида может содержать несколько двухчастичных мостов. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Определим $I(k, k', p)$ как сумму всех двухчастично неприводимых графов, дающих вклад в $\Gamma(k; p_1, p_2)$ (с $p_1 = k'$, $p_2 = p - k'$), т. е. графов, в которых две внешние линии со входящими импульсами k и $p - k$ не могут быть отсоединены от двух внешних линий с импульсами k' и $p - k'$ путем перерезания любой пары внутренних линий. Тогда $\Gamma(k; p_1, p_2) - I(k, k', p)$ состоит из графов, которые могут быть разъединены таким образом и, следовательно, могут быть записаны как (см. рис. 20.1)

$$\Gamma(k; k', p - k') - I(k, k', p) = \int d^4 k'' I(k, k'', p) \Gamma(k''; k', p - k'). \quad (20.2.3)$$

(Подобно $\Gamma(k; k', p - k')$, ядро $I(k, k', p)$ включает пропагаторы для линий с импульсами k и $p - k$, но, во избежание повторного подсчета, не линий с импульсами k' и $p - k'$). Диаграммы Фейнмана для $I(k, k', p)$ до порядка g^2 представлены на рис. 20.2.

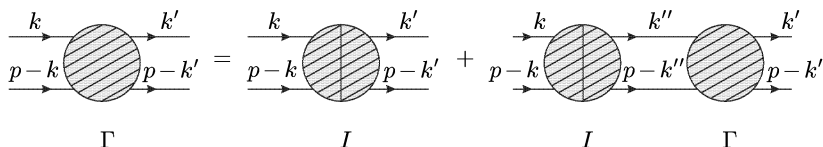


Рис. 20.1. Диаграммное представление интегрального уравнения (20.2.3). Заштрихованные диски, обозначенные Γ , представляют собой сумму всех связанных диаграмм Фейнмана с отмеченными внешними линиями. Заштрихованные диски, обозначенные I и разделенные вертикальной линией, представляют сумму связанных диаграмм, для которых линии слева не могут быть отделены от линий справа путем перерезания любой пары внешних линий

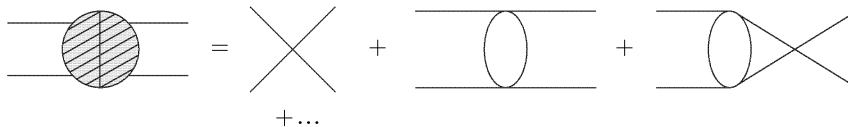


Рис. 20.2. Древесные и однопетлевые графы для ядра $I(k, k', p)$ в теории скалярного поля со взаимодействием Φ^4

Чтобы оценить поведение правой части (20.2.3), рассмотрим сначала асимптотическое поведение ядра $I(k, k', p)$ когда $k \rightarrow \infty$, а k' и p фиксированы. Это поведение определяется областью в импульсном пространстве, в которой все внутренние линии несут импульсы порядка k , что вносит вклад порядка k^{-4} , поскольку в любой другой области подграф, состоящий из внутренних линий, несущих импульсы порядка k , имел бы более четырех внешних линий и, таким образом, вносил бы вклад, убывающий быстрее k^{-4} . Следовательно, дифференцирование $I(k, k', p)$ по k' или p ускорило бы асимптотическое убывание этого ядра за счет множителя k^{-1} . Значит, для $k \rightarrow \infty$

и фиксированных k' и p имеем

$$I(k, k', p) \rightarrow I_\infty(k), \quad (20.2.4)$$

где $I_\infty(k)$ — функция только k , имеющая порядок k^{-4} .

К сожалению, в (20.2.3) нельзя просто заменить $I(k, k', p)$ его асимптотическим пределом, поскольку каким бы большим ни было k , интеграл получит большой вклад от величин k' порядка k . Для того чтобы справиться с этим затруднением, мы используем прием, основанный на методе математической индукции. В низшем порядке $\Gamma(k; k', p - k')$ дается единственной вершиной с двумя присоединенными голыми пропагаторами:

$$\Gamma(k; k', p - k') = \frac{ig}{(2\pi)^4(k^2 + m^2)((p - k)^2 + m^2)} \quad (\text{низший порядок}),$$

для которой легко установить асимптотическое поведение вида (20.2.1). Следовательно, давайте предположим, что (20.2.1) для $n = 2$ имеет место до некоторого данного порядка N по g — т.е. что до этого порядка асимптотическое поведение при $k \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\Gamma(k; k', p - k) \rightarrow U_{\phi^2}(k)F_{\phi^2}(k', p - k') + O(k^{-5}), \quad (20.2.5)$$

и попробуем проверить это поведение в следующем порядке. Для того чтобы исключить вклад в интеграл в (20.2.3) от k' порядка k , перепишем (20.2.3) как

$$\begin{aligned} \Gamma(k; k', p - k) &= I(k, k', p) + \\ &+ \int d^4 k'' I(k, k'', p) [\Gamma(k''; k', p - k') - U_{\phi^2}(k'')U_{\phi^2}(k', p - k')] + \\ &+ F_{\phi^2}(k', p - k') \int d^4 k'' I(k, k'', p) U_{\phi^2}(k''). \end{aligned} \quad (20.2.6)$$

Поскольку $I(k, k', p)$ имеет по меньшей мере первый порядок, можно использовать (20.2.5) в правой части (20.2.6). Таким образом, во втором члене справа часть области интегрирования, в которой k'' имеет порядок k , дает вклад, убывающий как k^{-4+4-5} , и, следовательно, ей можно пренебречь по сравнению с той частью, где k'' остается конечным, что дает сходящийся интеграл

$$I_\infty(k) \int d^4 k'' [\Gamma(k''; k', p - k') - U_{\phi^2}(k'')F_{\phi^2}(k', p - k')].$$

Далее, поскольку доминирующая часть интеграла

$$\int d^4 k'' I(k, k'', p) U_{\phi^2}(k'')$$

определяется областью интегрирования, в которой каждая внутренняя линия графов для $I(k, k'', p)$ несет импульс порядка k , дифференцирование этого интеграла по p уменьшило бы его асимптотическое

поведение на множитель порядка k^{-1} , так что $I(k, k', p)$ в этом интеграле в асимптотике можно заменить на $I(k, k') \equiv I(k, k', 0)$. Следовательно, при $k \rightarrow \infty$ (20.2.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \Gamma(k; k', p - k') &\rightarrow F_{\phi^2}(k', p - k') \int d^4 k'' I(k, k'') U_{\phi^2}(k'') + \\ &+ I_{\infty}(k) \left\{ 1 + \int d^4 k'' [\Gamma(k''; k', p - k') - U_{\phi^2}(k'') F_{\phi^2}(k', p - k')] \right\}. \end{aligned} \quad (20.2.7)$$

Таким образом, определим $U_{\phi^2}(k)$ и $F_{\phi^2}(k', p - k')$ до порядка $N + 1$ по g с помощью этих функций в низших порядках теории возмущений как

$$U_{\phi^2}(k) = C I_{\infty}(k) + \int d^4 k' I(k, k') U_{\phi^2}(k'), \quad (20.2.8)$$

$$\begin{aligned} F_{\phi^2}(k', p - k') &= C^{-1} \times \\ &\times \left\{ 1 + \int d^4 k'' [\Gamma(k''; k', p - k') - U_{\phi^2}(k'') F_{\phi^2}(k', p - k')] \right\}, \end{aligned} \quad (20.2.9)$$

где C — константа, которую мы можем выбирать по своему усмотрению. При этих определениях (20.2.5) следует из (20.2.7).

Будет удобно выбрать константу C так, чтобы $F_{\phi^2}(k', p - k')$ имело единичное значение в некоторой точке перенормировки $k' = k(\mu)$ и $p = p(\mu)$, где $k(\mu)$ и $p(\mu)$ — стандартные 4-импульсы порядка μ . Тогда

$$C = 1 + \int d^4 k'' \Gamma(k''; k(\mu), p(\mu) - k(\mu)) - \int d^4 k'' U_{\phi^2}(k''). \quad (20.2.10)$$

Используя (20.2.5), видим, что расходимости в двух интегралах в (20.2.10) взаимно уничтожаются.

Уравнение (20.2.9) теперь можно переписать как

$$F_{\phi^2}(k', p - k') = Z_{\phi^2} \left\{ 1 + \int d^4 k'' \Gamma(k''; k', p - k') \right\}, \quad (20.2.11)$$

где

$$Z_{\phi^2} = \left[1 + \int d^4 k'' \Gamma(k''; k(\mu), p(\mu) - k(\mu)) \right]^{-1}. \quad (20.2.12)$$

Можно считать Z_{ϕ^2} константой перенормировки для составного оператора ϕ^2 , определенной таким образом, чтобы оператор $Z_{\phi^2} \phi^2$ имел конечный двухчастичный матричный элемент $F_{\phi^2}(k, p - k)$, равный единице при $k = k(\mu)$ и $p = p(\mu)$.

Вычислять $U_{\phi^2}(k)$ или $F_{\phi^2}(k, p - k)$, используя (20.2.8) и (20.2.11), не очень удобно. Проще вычислить $\Gamma(k; k', p - k')$, а затем определить $U_{\phi^2}(k)$ и $F_{\phi^2}(k, p - k)$ путем сравнения с (20.2.5). Умножая функцию (12.2.6) на произведение пропагаторов для линий с импульсами k и $p - k$, мы видим, что в однопетлевом приближении

$$\Gamma(k; k', p - k') = \left[\frac{-i}{(2\pi)^4 (k^2 + m^2)} \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4 ((p - k)^2 + m^2)} \right] [-i(2\pi)^4 g] \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - ux(1-x)} \right) + \dots \right\} \right\}, \quad (20.2.13)$$

где s, t и u — переменные Мандельштама:

$$s = -p^2, \quad t = -(k - k')^2, \quad u = -(p - k - k')^2,$$

μ — масштаб перенормировки, а g — соответствующая перенормированная константа взаимодействия, определенная как фейнмановская амплитуда при $s = t = u = -4\mu^2/3$. Она демонстрирует асимптотическое поведение:

$$\Gamma(k; k', p - k') \rightarrow \\ \rightarrow \frac{ig}{(2\pi)^4(k^2)^2} \left\{ 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + p^2x(1-x)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + k^2x(1-x)} \right) + \dots \right\} \right\}, \quad (20.2.14)$$

что находится в согласии с (20.2.5) до порядка g^2 , если мы возьмем

$$U_{\phi^2}(k) = \frac{ig}{(2\pi)^4(k^2)^2} \left\{ 1 - \frac{g}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + k^2x(1-x)} \right) + \dots \right\} \quad (20.2.15)$$

и

$$F_{\phi^2}(k, p - k) = 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + p^2x(1-x)} \right) + \dots \quad (20.2.16)$$

Здесь мы выбрали соотношение точек перенормировки $k(\mu), p(\mu)$ для оператора ϕ^2 и для константы связи g таким образом, что $p(\mu)^2 = 4\mu^2/3$, так что $F_{\phi^2}(k, p - k) = 1$, когда $p^2 = 4\mu^2/3$.

Теперь рассмотрим случай, когда число n внешних линий с фиксированными импульсами больше двух. В соответствии с нашими предыдущими рассуждениями, в пределе $k \rightarrow \infty$ ведущие графы для $\Gamma(k; p_1, \dots, p_n)$ — те, в которых две внешние линии, несущие импульсы k и $p - k$, могут быть отсоединены от n внешних линий с фиксированными импульсами путем перерезания пары внутренних линий:

$$\Gamma(k; p_1, \dots, p_n) \rightarrow \int d^4k' I(k, k', p) \Gamma(k'; p_1, \dots, p_n). \quad (20.2.17)$$

Как и раньше, мы не можем просто использовать асимптотический предел ядра $I(k, k', p)$ для $k \rightarrow \infty$ в правой части, поскольку интег-

рал получает существенный вклад от k' порядка k . Мы обходим это затруднение, переписывая (20.2.17) в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(k; p_1, \dots, p_n) &\rightarrow \\ &\rightarrow \int d^4 k' I(k, k', p) [\Gamma(k'; p_1, \dots, p_n) - U_{\phi^2}(k') F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n)] + \\ &\quad + F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n) \int d^4 k' I(k', k, p) U_{\phi^2}(k'), \quad (20.2.18) \end{aligned}$$

где по математической индукции предполагаем, что вплоть до некоторого данного порядка N

$$\Gamma(k; p_1, \dots, p_n) \rightarrow U_{\phi^2}(k) F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n) \quad (20.2.19)$$

с поправками порядка $1/k^5$. Теперь мы можем использовать предел (20.2.4) вместе с (20.2.8), для того чтобы переписать (20.2.18) как

$$\begin{aligned} \Gamma(k; p_1, \dots, p_n) &\rightarrow \\ &\rightarrow I_{\infty}(k) \int d^4 k' [\Gamma(k'; p_s, \dots, p_n) - U_{\phi^2}(k') F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n)] + \\ &\quad + F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n) [U_{\phi^2}(k) - C I_{\infty}(k)]. \end{aligned}$$

Это выражение согласуется с (20.2.19) до порядка $N + 1$, если только мы возьмем

$$C F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n) = \int d^4 k' [\Gamma(k'; p_s, \dots, p_n) - U_{\phi^2}(k') F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n)],$$

или, используя (20.2.10) и (20.2.12),

$$F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n) = Z_{\phi^2} \int d^4 k' \Gamma(k'; p_1, \dots, p_n). \quad (20.2.20)$$

Это соотношение означает, что $F_{\phi^2}(p_1, \dots, p_n)$ — матричный элемент перенормированного оператора $Z_{\phi^2} \phi^2$, так что (20.2.1) отвечает операторному разложению (20.2.2). Заметим, в частности, что $U_{\phi^2}(k)$ — одна и та же коэффициентная функция, какое бы значение ни принимали n или импульсы $p_1, \dots, p_n$, что и требовалось доказать.

Строго говоря, оператор $(\phi^2)_R$ не является главным членом в разложении произведения двух ϕ . Присутствует также операторная единица, которая имеет размерность, меньшую $(\phi^2)_R$, но была исключена из (20.2.2), поскольку (как указывает индекс C) мы исключаем несвязные графы. Как уже упоминалось ранее, графы для $\Gamma(k)$ с $n = 0$ (и $p^\mu = 0$) определяются при $k \rightarrow \infty$ областью интегрирования, в которой все внутренние линии несут импульсы порядка k , и $U_1(k)$ — вклад этой области.

Операторы высших размерностей и более общие теории будут рассмотрены в приложении к этой главе.

§ 20.3. Уравнения ренормгруппы для коэффициентных функций

Как было замечено ранее, одним из аспектов операторного разложения, делающим его таким полезным, является тот факт, что зависимость коэффициентных функций от импульса подчиняется уравнениям ренормгруппы. Это происходит из-за того, что они возникают из предельных значений сумм фейнмановских графов (таких как $I_\infty(k)$ в § 20.2), в которых все соответствующие импульсы устремляются к бесконечности одновременно таким образом, что массы могут быть приравнены нулю без введения сингулярностей. Тем не менее коэффициентные функции операторного разложения не подчиняются простым законам скейлинга из-за эффектов перенормировок: они умножаются на зависящие от масштаба перенормировочные постоянные и являются функциями перенормированных констант связи, которые также зависят от масштаба.

Рассмотрим операторное разложение для функции Грина $\Gamma_{ll'}(k, k', p)$, в которой входящие импульсы (совокупность которых обозначена k , а сумма — p) набора l линий устремляются к бесконечности одновременно, а выходящие импульсы (совокупность которых обозначена k' , а сумма — p), соответствующие набору l' оставшихся линий, фиксированы:

$$\Gamma_{ll'}(k, k', p) \rightarrow \sum_{\mathcal{O}} U_{\mathcal{O}}^l(k) F_{\mathcal{O}, l'}(k', p). \quad (20.3.1)$$

Функция $F_{\mathcal{O}, l'}(k', p)$ является матричным элементом перенормированного оператора $\mathcal{O}_R = \sum_{\mathcal{O}'} Z_{\mathcal{O}, \mathcal{O}'} \mathcal{O}'$. Поэтому коэффициент $U_{\mathcal{O}}^l(k)$, стоящий перед этой функцией в произведении полей, соответствующих линиям l , пропорционален $Z_{\mathcal{O}, \mathcal{O}'}^{-1}$, а также $Z_{l', l}$ — прямому произведению всех перенормировочных матричных факторов для полевых (возможно составных) операторов в наборе l . Таким образом,

$$\mu \frac{d}{d\mu} U_{\mathcal{O}}^l = \sum_{l'} \gamma_{ll'} U_{\mathcal{O}}^{l'} - \sum_{\mathcal{O}'} U_{\mathcal{O}'}^l \gamma_{\mathcal{O}', \mathcal{O}} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} U_{\mathcal{O}}^l, \quad (20.3.2)$$

где

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{ll'} = \sum_{l''} \gamma_{ll''} Z_{l''l'}, \quad \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} = \sum_{\mathcal{O}''} \gamma_{\mathcal{O}\mathcal{O}''} Z_{\mathcal{O}''\mathcal{O}'}, \quad (20.3.3)$$

и мы полагаем для простоты, что есть одна единственная перенормируемая константа связи g_μ , которая определяется как значение некоторой фейнмановской амплитуды в точке перенормировки с импульсами порядка μ и $\mu dg_\mu/d\mu = \beta(g_\mu)$. Для того чтобы использовать анализ размерностей, умножим все операторы на степени μ так, что они станут безразмерными. Это приведет к тому, что компоненты Z

и γ матриц тоже будут безразмерными, причем их значения в пределе нулевой константы связи будут

$$\gamma_{ll'} \rightarrow \delta_{ll'} N(l), \quad \gamma_{\theta\theta'} \rightarrow \delta_{\theta\theta'} N(\theta), \quad (20.3.4)$$

где $N(\theta)$ — размерность оператора θ , а $N(l)$ — полная размерность l набора полей (сумма $s + 1$ для всех полей, где $s = 0$ для скалярных и массивных калибровочных полей, $s = 1/2$ для полей Дирака и т. д.) Кроме того, анализ размерностей показывает, что для $k^\mu = \kappa n^\mu$ с фиксированным n^μ амплитуда может зависеть от κ только через отношение κ/μ , за исключением множителя $\kappa^{4-4n(l)}$, возникающего из интегралов, с помощью которых было определено преобразование Фурье. Тогда решение уравнения (20.3.2) имеет вид

$$U_\theta^l(\kappa n) = \kappa^{4-4n(l)} \sum_{l', \theta'} \left[M \left\{ \exp \left(\int \frac{d\mu}{\mu} \gamma(g_\mu) \right) \right\} \right]_{l, l'} \mathcal{U}_{\theta'}^{l'}(g_\kappa, n) \times \\ \times \left[M \left\{ \exp \left(\int \frac{d\mu}{\mu} \gamma(g_\mu) \right) \right\} \right]_{\theta', \theta}^{-1}, \quad (20.3.5)$$

где M обозначает “ μ -упорядоченное” произведение, т. е. каждый член в разложении экспонент упорядочивается так, что множители стоят в порядке убывания μ слева направо.

Это дает особенно простые результаты в случае, когда g_μ приближается к неподвижной точке g_* при $\mu \rightarrow \infty$. Вклад больших μ в $M \left\{ \exp \left(\int \gamma(g_\mu) d\mu/\mu \right) \right\}$ представляет собой тогда матричный множитель $\kappa^{\gamma(g_*)}$, который появляется *слева* из-за μ -упорядочивания. Таким образом, равенство (20.3.5) преобразуется к виду

$$U_\theta^l(\kappa n) = \kappa^{4-4n(l)} \sum_{l', \theta'} [\kappa^{\gamma(g_*)}]_{l, l'} \mathcal{C}_{l', \theta'} [\kappa^{-\gamma(g_*)}]_{\theta', \theta}, \quad (20.3.6)$$

где $\mathcal{C}$ — либо постоянная, либо сумма по степеням $\ln \kappa$, в зависимости от того, с какой скоростью g_κ стремится к g_* .

Асимптотически свободные теории, такие как квантовая хромодинамика, представляют собой специальный случай, особенно интересный с точки зрения физики. В этом случае неподвижной точкой является $g_* = 0$, и, согласно (20.3.4), вблизи неподвижной точки γ матрицы ведут себя следующим образом:

$$\gamma(g)_{ll'} \rightarrow N(l) \delta_{ll'} + g^2 c_{ll'}, \quad \gamma(g)_{\theta\theta'} \rightarrow N(\theta) \delta_{\theta\theta'} + g^2 c_{\theta\theta'}. \quad (20.3.7)$$

Кроме того, если мы запишем уравнение ренормгруппы для константы связи в виде

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu^2 = -\frac{b}{8\pi^2} g_\mu^4, \quad (20.3.8)$$

то

$$\int \frac{d\mu}{\mu} g_\mu^2 \rightarrow -\frac{8\pi^2}{b} \ln g_\kappa^2 + \text{const.}$$

Используя последнее выражение в формуле (20.3.5), получаем асимптотическое поведение:

$$U_{\mathcal{O}}^l(\kappa n) \rightarrow \kappa^{4-4n(l)+N(l)-N(\mathcal{O})} \times \\ \times \sum_{l', \mathcal{O}'} [(g_\kappa^2)^{-8\pi^2 c/b}]_{l, l'} \mathcal{C}_{\mathcal{O}'}^{l'} [(g_\kappa^2)^{8\pi^2 c/b}]_{\mathcal{O}, \mathcal{O}'}, \quad (20.3.9)$$

где $\mathcal{C}_{\mathcal{O}'}^{l'}$ — постоянная матрица, равная произведению $\mathcal{U}_{\mathcal{O}'}^{l'}(0, n)$ и постоянных факторов, которые невычислимы в рамках теории возмущений, поскольку они возникают из тех частей интегралов в (20.3.5), где g_μ не является малым. При $\kappa \rightarrow \infty$, поведение константы связи будет таким: $g_\kappa^2 \rightarrow 8\pi^2/b \ln \kappa$. Следовательно, выражение (20.3.9) может быть также записано в виде

$$U_{\mathcal{O}}^l(\kappa n) \rightarrow \kappa^{4-4n(l)+N(l)-N(\mathcal{O})} \times \\ \times \sum_{l', \mathcal{O}'} [(\ln \kappa)^{8\pi^2 c/b}]_{l, l'} \mathcal{B}_{\mathcal{O}'}^{l'} [(\ln \kappa)^{-8\pi^2 c/b}]_{\mathcal{O}, \mathcal{O}'}, \quad (20.3.10)$$

где $\mathcal{B}_{\mathcal{O}'}^{l'}$ — еще одна постоянная матрица. Условием применимости формул (20.3.9) и (20.3.10) является выполнение соотношения $g_\kappa^2/8\pi^2 \ll 1$, однако $\ln \kappa$ не обязательно должен быть настолько большим, чтобы лишь один собственный вектор s -матрицы давал вклад в асимптотическое поведение. Формула (20.3.10) будет использоваться для изучения глубоко неупругого рассеяния в § 20.6.

§ 20.4. Свойства симметрии коэффициентных функций

Привлекательность операторного разложения усиливается тем, что коэффициентные функции обладают полной симметрией выбранной теории даже в том случае, если эта симметрия частично или полностью спонтанно нарушена [4]. Для того чтобы доказать это, рассмотрим операторное разложение для произведения перенормированных операторов $\mathcal{O}_i(x)$, преобразующихся линейным образом под действием преобразования симметрии с сохраняющимся током $J^\mu(x)$ в том смысле, что выполняется равенство

$$[J^0(\mathbf{x}, t), \mathcal{O}_i(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sum_j t_{ij} \mathcal{O}_j(\mathbf{y}, t), \quad (20.4.1)$$

где t_{ij} — постоянная матрица. Можно представить операторное разложение как утверждение о том, что при одновременном устремле-

нии $x_1, \dots, x_n$ к x (т. е. отношения $x_1 - x, \dots, x_n - x$ друг к другу фиксированы)

$$\begin{aligned} \langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \} | \alpha \rangle &\rightarrow \\ &\rightarrow \sum_i U_i^{i_1 \dots i_n}(x_1 - x, \dots, x_n - x) \langle \beta | \mathcal{O}_i(x) | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (20.4.2)$$

Теперь предположим, что симметрия с током J^μ спонтанно нарушена, а соответствующий голдстоуновский бозон π удовлетворяет условию

$$\langle \text{BAK} | J^\mu(0) | \pi \rangle = \frac{F p_\pi^\mu}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0}}. \quad (20.4.3)$$

Тогда, как мы видели в § 19.2, матричный элемент произведения операторов при переходе между состояниями с дополнительным низкоэнергетическим голдстоуновским бозоном есть

$$\begin{aligned} \langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \} | \pi \alpha \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \times \\ &\times \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) J^\mu(x) \} | \alpha \rangle, \end{aligned} \quad (20.4.4)$$

поскольку лишь голдстоуновский член, имеющий полюс, выживает в интеграле в правой части формулы (20.4.4). Используя выражение (20.4.1) и тот факт, что ток сохраняется, правую часть формулы можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \} | \pi \alpha \rangle &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \times \\ &\times \sum_{r=1}^n \sum_{j_r} t_{i_r j_r} \langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{j_r}(x_r) \dots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \} | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (20.4.5)$$

Теперь применим операторное разложение к обеим частям этой формулы. В пределе, когда $x_1, \dots, x_n$ приближаются к x одновременно, находим

$$\begin{aligned} \sum_i U_i^{i_1 \dots i_n}(x_1 - x, \dots, x_n - x) \langle \beta | \mathcal{O}_i(x) | \pi \alpha \rangle &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \times \\ &\times \sum_{r=1}^n \sum_{j_r} \sum_i t_{i_r j_r} U_i^{i_1 \dots j_r \dots i_n}(x_1 - x, \dots, x_n - x) \langle \beta | \mathcal{O}_i(x) | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (20.4.6)$$

Однако как частный случай формулы (20.4.5), имеем

$$\langle \beta | \mathcal{O}_i(x) | \pi \alpha \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \sum_j t_{ij} \langle \beta | \mathcal{O}_j(x) | \alpha \rangle. \quad (20.4.7)$$

Поскольку все это остается верным для произвольных состояний $\langle \beta |$ и $| \alpha \rangle$, то коэффициенты при $\langle \beta | \mathcal{O}_j(x) | \alpha \rangle$ в обеих частях форму-

лы (20.4.6) должны быть равны. Так что

$$0 = - \sum_i t_{ij} U_i^{i_1 \dots i_n} (x_1 - x, \dots, x_n - x) + \\ + \sum_{r=1}^n \sum_{j_r} t_{i_r j_r} U_j^{i_1 \dots j_r \dots i_n} (x_1 - x, \dots, x_n - x). \quad (20.4.8)$$

Это может быть переформулировано в виде условия того, что $U_i^{i_1 \dots i_n} (x_1 - x, \dots, x_n - x)$ инвариантно под действием симметрии, генератором которой является t . При этом действие этой симметрии на нижний индекс контрагредиентно ее действию на верхние индексы в том смысле, что матрица t заменяется на $-t^T$. Это как раз то соотношение, которое ожидалось бы в том случае, если бы симметрия, генерируемая током J^μ , не была спонтанно нарушена.

§ 20.5. Правила сумм спектральных функций

Правила сумм спектральных функций являются ограничительными условиями, накладываемыми на спектральные функции различных токов [5]. Мы начнем наше обсуждение с рассмотрения произвольного набора токов J_a^μ , с единственным условием, что они преобразуются как 4-векторы, и затем рассмотрим более специальные случаи. Для определения спектральных функций рассматриваемого набора мы используем свойство лоренцевой инвариантности и запишем

$$\sum_N \delta^4(p - p_N) \langle \text{BAK} | J_\alpha^\mu(0) | N \rangle \langle \text{BAK} | J_\beta^\nu(0) | N \rangle^* = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \times \\ \times [(\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2) \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(-p^2) + p^\mu p^\nu \rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2)] \quad (20.5.1)$$

по аналогии с формулами (19.2.19) и (19.2.20) либо (10.7.4). С помощью преобразования Фурье, используя свойство полноты системы состояний $|N\rangle$, эта формула может быть переписана как

$$\langle J_\alpha^\mu(x) J_\beta^\nu(0) \rangle_{\text{BAK}} = \int d\mu^2 \times \\ \times [\eta^{\mu\nu} \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2) - (\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) + \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)/\mu^2) \partial^\mu \partial^\nu] \Delta_+(x; \mu^2), \quad (20.5.2)$$

где $\Delta_+(x; \mu^2)$ — функция, определенная формулой (5.2.7):

$$\Delta_+(x; \mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \theta(p^0) \delta(p^2 + \mu^2) e^{ip \cdot x}. \quad (20.5.3)$$

В предположении, что токи являются эрмитовыми операторами, из (20.5.1) немедленно следует, что $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)$ и $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2)$ являются поло-

жительно определенными эрмитовыми матрицами. Кроме того, для пространственноподобных x^μ (для которых функции $\Delta_+(x)$ четные), используя трансляционную инвариантность и условие причинности для уравнения (20.5.2) находим, что $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)$ и $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2)$ являются также и симметричными.

Теперь, при устремлении $x \rightarrow 0$ с условием $x^2 > 0$ асимптотическое поведение функции $\Delta_+(x)$ описывается как

$$\Delta_+(x; \mu^2) \rightarrow \frac{1}{4\pi^2 x^2} + \frac{\mu^2}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\gamma \mu \sqrt{x^2}}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] + O(x^2), \quad (20.5.4)$$

где γ — константа Эйлера. Первые члены разложения вакуумного среднего величины $J_\alpha^\mu(x) J_\beta^\nu(x)$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle J_\alpha^\mu(x) J_\beta^\nu(0) \rangle_{\text{ВАК}} \rightarrow & -\frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - \frac{4x_\mu x_\nu}{(x^2)^3} \right] \int d\mu^2 (\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) + \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)/\mu^2) - \\ & - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4\pi^2 x^2} \int d\mu^2 \rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) \mu^2 + \\ & + \frac{x_\mu x_\nu}{2\pi^2 (x^2)^2} \int d\mu^2 (\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) \mu^2 + \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)) + O(\ln x^2). \end{aligned} \quad (20.5.5)$$

Отсюда, если некоторая линейная комбинация $\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \langle J_\alpha^\mu(x) J_\beta^\nu(0) \rangle_{\text{ВАК}}$ двухточечных корреляционных функций имеет при $x \rightarrow 0$ сингулярность более слабую, чем $1/x^4$, мы получаем

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int d\mu^2 (\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) + \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)/\mu^2) = 0, \quad (20.5.6)$$

и более того — если сингулярность также слабее, чем $1/x^2$, находим

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int d\mu^2 \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2) = 0 \quad (20.5.7)$$

и

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int d\mu^2 \rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) \mu^2 = 0. \quad (20.5.8)$$

Тождества (20.5.6), (20.5.7) и (20.5.8) известны как соответственно первое, второе и третье правила сумм спектральных функций.

Рассмотрим применение полученных выше результатов в случае, представляющем наибольший интерес — когда $J_\alpha^\mu(x)$ являются сохраняющимися токами в теории подобной квантовой хромодинамике. Сохранение токов говорит нам о том, что выражение (20.5.1) при сворачивании с p_μ обращается в нуль, таким образом, функция $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2)$ должна быть пропорциональна $\delta(-p^2)$, и поэтому в данном

случае третье правило сумм (20.5.8) выполняется автоматически для произвольных $c_{\alpha\beta}$. С учетом $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2) \propto \delta(-p^2)$ вклад в (20.5.1) при суммировании по состояниям вносят лишь члены $|B_\alpha\rangle$, являющиеся одиночными безмассовыми частицами B_α нулевого спина, что на практике соответствует голдстоуновским бозонам. Для таких одночастичных состояний лоренцева инвариантность дает

$$\langle \text{BAK} | J_\alpha^\mu(0) | B_a \rangle = \frac{iF_{\alpha a} p_B^\mu}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_B^0}}. \quad (20.5.9)$$

С использованием соотношения $\delta(p^0 - |\mathbf{p}|)/2p^0 = \theta(p^0)\delta(-p^2)$ мы видим, что

$$\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2) = \delta(-p^2) \sum_a F_{\alpha a} F_{\beta a}^*. \quad (20.5.10)$$

Наоборот, $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2)$ не обращается в нуль только при $-p^2 > 0$.

Для большей определенности рассмотрим перенормируемую асимптотически свободную калибровочную теорию с N безмассовыми (либо почти безмассовыми) фермионами спина $1/2$, принадлежащими к одному и тому же представлению калибровочной группы. Квантовая хромодинамика соответствует данному выбору (случаю $N = 3$, если мы пренебрегаем массами u -, d - и s -кварков, и случаю $N = 2$, если только u - и d -кварки рассматриваются безмассовыми). Как мы видели в гл. 19, такая теория обладает глобальной симметрией $SU(N) \times SU(N)^1$, под действием которой лево- и правосторонние части легких фермионных полей преобразуются соответственно как $(N, 1)$ - и $(1, N)$ -представления, где “ N ” и “ 1 ” обозначают фундаментальное и тривиальное $SU(N)$ -представления соответственно. Токи, соответствующие левой и правой $SU(N)$ -симметриям, — это

$$\begin{aligned} J_{La}^\mu(x) &= -i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(1 + \gamma_5)\lambda_a\psi(x), \\ J_{Ra}^\mu(x) &= -i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\lambda_a\psi(x), \end{aligned} \quad (20.5.11)$$

где λ_α образуют полную систему эрмитовых бесследовых матриц, действующих на “ароматные” индексы, нумерующие N легких кварков, как это происходило в (19.7.2) при $N = 3$. Эти токи имеют размерность (в массовых единицах) $+3$, поэтому ожидается, что коэффициент оператора $\mathcal{O}$, имеющего размерность $d(\mathcal{O})$, в разложе-

¹⁾ Кроме того, существует $U(1)$ -симметрия, являющаяся векторной в том смысле, что она действует одинаковым образом на лево- и правосторонние части легких фермионных полей. Этот феномен представляет собой всего лишь сохранение квантового числа легких кварков, и мы не будем его здесь рассматривать. Аксиальная $U(1)$ -симметрия лагранжиана, которая действует различно на лево- и правосторонние части легких фермионных полей, нарушается квантовыми эффектами, обсуждаемыми в § 23.5.

нии (20.3.6) произведения двух токов имеет (не принимая во внимание логарифмические члены) сингулярность порядка $x^{-6+d(\mathcal{O})}$ при устремлении расстояния x между их аргументами к нулю. Таким образом, если разложение линейной комбинации произведений токов содержит единичный оператор, то соответствующая линейная комбинация спектральных функций имеет порядок x^{-6} и поэтому в общем случае не удовлетворяет ни первому, ни второму правилу спектральных сумм; если оператором наименьшей размерности в вакуумном среднем этого разложения является фермионный билинейный оператор без производных или с одной производной, то соответствующая линейная комбинация спектральных функций имеет порядок x^{-3} либо x^{-2} и поэтому удовлетворяет первому правилу сумм спектральных функций, но в общем случае не удовлетворяет второму; если оператор наименьшей размерности в вакуумном среднем этого разложения является фермионным билинейным оператором со второй или более старшей производной либо является фермионным quadriлинейным оператором, то соответствующая линейная комбинация спектральных функций, менее сингулярных, чем x^{-2} , удовлетворяет как первому, так и второму правилу сумм.

Для того чтобы сказать, какие операторы входят в разложение в ряд произведения двух токов, нам нужно классифицировать $SU(N) \times SU(N)$ -представления, содержащиеся в произведении. Для того же чтобы определить, обладают ли эти операторы ненулевыми вакуумными средними, мы должны проверить инвариантность каждого из них относительно действия подгруппы симметрии $SU(N) \times SU(N)$, не являющейся спонтанно нарушенной. Чтобы ответить на эти вопросы, заметим, что токи $J_{L\alpha}^\mu(x)$ и $J_{R\alpha}^\mu(x)$ под действием $SU(N) \times SU(N)$ преобразуются соответственно как $(A, 1)$ - и $(1, A)$ -представления групп $SU(N) \times SU(N)$, где A и 1 — присоединенное и тривиальное представления группы $SU(N)$.

Кроме того, предположим, что подгруппа $SU(N) \times SU(N)$, выдерживающая спонтанное нарушение симметрии, есть векторная группа $SU(N)_V$ с соответствующими токами $J_{L\alpha}^\mu(x) + J_{R\alpha}^\mu(x)$, как это происходит в хромодинамике и (как мы видели в § 19.9) в большом количестве других теорий. Мы также предположим, что четность спонтанно не нарушена. Следствием сохранения симметрий является

$$\rho_{L\alpha, L\beta}^{(1)}(\mu^2) = \rho_{R\alpha, R\beta}^{(1)}(\mu^2) = \delta_{\alpha\beta}[\rho_V^{(1)}(\mu^2) + \rho_A^{(1)}(\mu^2)] \quad (20.5.12)$$

и

$$\rho_{L\alpha, R\beta}^{(1)}(\mu^2) = \rho_{R\alpha, L\beta}^{(1)}(\mu^2) = \delta_{\alpha\beta}[\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2)], \quad (20.5.13)$$

где $\delta_{\alpha\beta}\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ и $\delta_{\alpha\beta}\rho_A^{(1)}(\mu^2)$ — спектральные функции, определенные из (20.5.2) для токов

$$J_{V\alpha}^\mu = -i\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_\alpha\psi, \quad J_{A\alpha}^\mu = -i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\lambda_\alpha\psi \quad (20.5.14)$$

с генераторами λ_a и $\lambda_a \gamma_5$ соответственно. Кроме того

$$F_{Lab} = -F_{Rab} = \delta_{ab} F, \quad (20.5.15)$$

где (20.5.9) используется в виде

$$\langle \text{BAK} | J_{Aa}^\mu(0) | B_b \rangle = \frac{i F \delta_{ab} p_B^\mu}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_B^0}}, \quad (20.5.16)$$

поэтому (20.5.10) мы можем записать так

$$\rho_{LaLb}^{(0)}(\mu^2) = \rho_{RaRb}^{(0)}(\mu^2) = -\rho_{LaRb}^{(0)}(\mu^2) = -\rho_{RaLb}^{(0)}(\mu^2) = F^2 \delta(\mu^2) \delta_{ab}. \quad (20.5.17)$$

Будет удобно рассмотреть отдельно случаи произведения токов одинаковой и различной киральностей.

Случай одинаковой киральности. Произведения $J_{La}^\mu(x) J_{L\beta}^\nu(0)$ и $J_{Ra}^\mu(x) J_{R\beta}^\nu(0)$ преобразуются соответственно как $(A \times A, 1)$ и $(1, A \times A)$ представления группы $SU(N) \times SU(N)$, где A и 1 — соответственно присоединенное и тривиальное представления. Для любой группы произведение $A \times A$ содержит тривиальное представление, поэтому в разложении этих произведений появляется единичный оператор с одинаковыми коэффициентами, пропорциональными δ_{ab} . Следовательно, лишь бесследовые компоненты произведения операторов могут удовлетворять правилам сумм спектральных функций. Но, как мы видели, спектральные функции не содержат бесследовой составляющей, поэтому в случае совпадения киральностей токов для спектральных функций не выполняется ни одно из правил сумм.

Случай различной киральности. Оба произведения, $J_{La}^\mu(x) \times J_{R\beta}^\nu(0)$ и $J_{Ra}^\mu(x) J_{L\beta}^\nu(0)$, преобразуются под действием $SU(N) \times SU(N)$ как (A, A) -представления. Единичный оператор (и операторы вида $F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu}$) являются, разумеется, $SU(N) \times SU(N)$ -синглетами и, таким образом, не могут участвовать в представлении этих произведений. Фермионные билинейные операторы, наподобие $\bar{\psi}\psi$, не содержащие производных, преобразуются как $(\bar{N}, N)$ - и $(N, \bar{N})$ -представления группы $SU(N) \times SU(N)$, поэтому они тоже не могут входить в разложение произведения токов различной киральностей. Единственным калибровочно- и лоренц-инвариантным фермионным билинейным оператором с одной производной, является калибровочно-ковариантный оператор производной $\gamma^\mu D_\mu$, действующий на ψ , что, согласно уравнениям поля, дает нуль. Таким образом, эти спектральные функции удовлетворяют и первому, и второму правилам сумм спектральных функций, которые в данном случае переписываются как

$$\int d\mu^2 [\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2)] / \mu^2 = F^2 \quad (20.5.18)$$

и

$$\int d\mu^2 [\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2)] = 0. \quad (20.5.19)$$

В работе-первоисточнике по правилам сумм спектральных функций [5] спектральные $SU(2) \times SU(2)$ -функции рассматривались в предположении, что они обладают резкими максимумами при таких значениях μ , которые для $\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ можно было принять равными $m_\rho = 770$ МэВ, а для функции $\rho_A^{(1)}(\mu^2)$ — равными неизвестной массе m_A . Именно,

$$\rho_V^{(1)}(\mu^2) \simeq g_\rho^2 \delta(\mu^2 - m_\rho^2), \quad \rho_A^{(1)}(\mu^2) \simeq g_A^2 \delta(\mu^2 - m_A^2).$$

Тождества (20.5.18) и (20.5.20) в этом случае выглядят так ²⁾

$$\frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} - \frac{g_A^2}{m_A^2} = F_\pi^2$$

и

$$g_\rho^2 = g_A^2.$$

Исключение из этих уравнений неизвестной g_A дает формулу

$$g_\rho^2 = F_\pi^2 \left(\frac{1}{m_\rho^2} - \frac{1}{m_A^2} \right)^{-1}.$$

Изначально, в 1967 г., этот результат использовался вместе с формулой [6] $g_\rho^2 = 2F_\pi^2 m_\rho^2$ (обоснование которой неизвестно, но которая согласуется с экспериментальными измерениями скорости распада $\rho \rightarrow e^+ + e^-$) для вывода результата

$$m_A = \sqrt{2} m_\rho.$$

Статус возможного a_1 резонанса с правильными квантовыми числами, соответствующими связи с аксиальным векторным током (т. е. 1^+ с $T = 1$ и $C(a_1^0) = +1$), и с массой, близкой к $\sqrt{2} m_\rho$ оставался неизвестным многие годы, однако резонанс с этими квантовыми числами теперь достаточно хорошо установлен и имеет массу 1230 МэВ $= 1,6 m_\rho$. В настоящее время для предсказания значения g_ρ кажется более предпочтительным рассматривать в качестве исходных данных отношение m_A/m_ρ с использованием либо величины $\sqrt{2}$, предлагаемой в некоторых моделях [7], либо экспериментально обоснованного значения 1,6.

С 1967 г. не только g_ρ , но и векторная спектральная функция $\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ для $SU(3) \times SU(3)$ -тока квантовой хромодинамики была целиком высчитана с большим уровнем точности для широкого диапазона значений энергии путем измерения поперечного сечения процесса $e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow$ адроны с использованием того факта, что электромагнитный ток представляет собой линейную комбинацию $SU(3)$ -токов. Аксиально-векторная спектральная функция $\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ для $SU(3) \times SU(3)$ -токов в принципе может быть измерена в процессе $\bar{\nu} + e \rightarrow$ адроны с учетом того, что заряженные компоненты токов (20.5.14)

²⁾ Рассматривая в качестве генераторов группы $SU(2)$ матрицы Паули, как в (19.7.2), находим $F = F_\pi = 184$ МэВ.

те же, что и адронные токи, с которыми взаимодействуют лептоны. Однако хотя антинейтрино-электронное рассеяние и изучено экспериментально, малая вероятность этих реакций препятствует использованию сталкивающихся пучков, и поэтому электронная мишень по существу находится в покое. Для того чтобы достичь уровня энергии, типичного для адронных взаимодействий, скажем 3 ГэВ в системе центра масс, необходимо в лабораторных условиях получить нейтрино с энергиями $(3 \text{ ГэВ})^2/2m_e \simeq 10 \text{ ТэВ}$. Интенсивные пучки нейтрино со столь высокими энергиями не будут доступны еще долгое время, если вообще будут доступны когда-либо. К счастью, оказывается возможным изучать спектральные функции процесса $\tau \rightarrow \nu + \text{адроны}$, но энергии адронов в данной реакции строго ограничены величиной $m_\tau = 1,7 \text{ ГэВ}$. Также возможно использовать эффективные киральные лагранжианы с целью вычисления спектральных функций для небольших μ^2 , и вычисления $\rho_V^{(1)} - \rho_A^{(1)}$ с использованием квантовой хромодинамики для больших μ^2 , где данная разность достаточно мала. Тщательный анализ всех этих подходов, проведенный Донахью и Головичем [8] в 1993 г. показывает, что основной вклад в интегралы спектральных функций на самом деле даются ρ - и a_1 -резонансами, и предоставляет нам результаты, которые согласуются с первым и вторым правилами сумм спектральных функций.

§ 20.6. Глубоко неупругое рассеяние

Методы ренормгруппы совместно с операторным разложением находят одно из важнейших применений в анализе глубоко неупругого лептон-нуклонного рассеяния. Вначале мы рассмотрим ранние феноменологические модели этих реакций, а затем увидим, как операторное разложение подтверждает эти модели и позволяет вычислить поправки к ним.

Рассмотрим процесс, в котором электрон с четырехмерным импульсом k сталкивается с нуклоном N , обладающим 4-импульсом p , производя электрон с 4-импульсом k' и некоторое общее адронное состояние H , которое не регистрируется, по которому мы производим суммирование. Для расчета усредненного по спину инклюзивного сечения рассеяния нам необходимо знать величину

$$(m_N/p_N^0)W^{\mu\nu}(q,p) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma_N} \sum_H \delta^4(p_H - p - q) \langle H | J^\mu(0) | N \rangle \langle H | J^\nu(0) | N \rangle^*, \quad (20.6.1)$$

где J^μ — электромагнитный ток (здесь он разделен на величину e), а $q = k - k'$ — импульс, передаваемый от электрона к адронам. Из требования лоренц-инвариантности следует, что тензор $W^{\mu\nu}(q,p)$ дол-

жен быть линейной комбинацией величин $p^\mu p^\nu$, $p^\mu q^\nu$, $q^\mu p^\nu$, $q^\mu q^\nu$ и $\eta^{\mu\nu}$ с коэффициентами, зависящими только от двух независимых скалярных функций аргументов q и p : q^2 и $\nu \equiv -q \cdot p/m_N$. Сохранение тока требует выполнения условия $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$, т. е. тензор W должен иметь вид¹⁾

$$W^{\mu\nu}(q, p) = -\left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \eta^{\mu\nu}\right)W_1(\nu, q^2) + \frac{1}{m_N^2}\left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu\right)\left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu\right)W_2(\nu, q^2). \quad (20.6.2)$$

Из уравнения (20.6.1) следует также, что $W^{\mu\nu*} = W^{\nu\mu}$, т. е. W_1 и W_2 вещественны, и $W^{\mu\nu}$ — положительная матрица, откуда следует, что W_1 и W_2 положительны. Дифференциальное сечение рассеяния в системе покоя нуклона

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dv} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} (W_2 + 2W_1 \text{tg}^2(\theta/2)), \quad (20.6.3)$$

где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ — элемент телесного угла рассеяния электрона и $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Мотт}}$ — дифференциальное сечение упругого релятивистского рассеяния на точечной бесспиновой частице²⁾:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} = \frac{e^4}{4E_e^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (20.6.4)$$

где, в свою очередь, $E_e = -k \cdot p/m_N$ — энергия налетающего электрона в системе покоя нуклона.

Можно предположить, что для фиксированных значений $-p_H^2 = -q^2 + 2m_N\nu + m_N^2$ дифференциальное сечение рассеяния должно спадать очень быстро в пределе $q^2 \rightarrow \infty$, поскольку оно должно быть пропорционально квадрату формфактора в сечении перехода нуклона в любую частицу или резонанс с массой, приблизительно равной $-p_H^2$. Тем не менее было довольно неожиданным, когда спустя два года после открытия в 1966 г. SLAC (Stanford Linear Accelerator Center), группой SLAC-MIT, возглавляемой Фридманом, Кенделлом и Тэйлором [9], было установлено, что на самом деле $\nu W_2(q^2, \nu)$ практически не зависит от q^2 для фиксированных значений $\omega = 2m_N\nu/q^2 > 1$. (Более точно, $W_2(q^2, \nu)$ для протона было аппроксимировано

¹⁾ Такой же формализм может быть применен и для других процессов глубоко неупругого лептонного рассеяния, таких как $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + H$, с тем исключением, что вследствие несохранения четности в этих процессах, в выражении для $W^{\mu\nu}(q, p)$ должно присутствовать дополнительное слагаемое, пропорциональное $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma$. Для простоты мы ограничимся глубоко неупругим электронным рассеянием.

²⁾ Приведенное здесь выражение есть ультрарелятивистский предел сечения упругого рассеяния электрона на покоящемся точечном заряде, полученного Моттом (N.F. Mott) в 1929 г. (*Примеч. ред.*)

кривой $\nu W_2(q^2, \nu) \simeq 0,35 - 0,004\omega$ для $E_e = 10, 13,5$ и 16 ГэВ, а $\theta = 6^\circ$ и 10° . Функция W_1 не давала вклада в этих экспериментах, так как $\text{tg}^2(10^\circ/2) = 7,6 \times 10^{-3}$.) Заметим, что в нашем пределе $-p_H^2 \rightarrow (\omega - 1)q^2 \rightarrow \infty$ — причина, по которой этот процесс и называется “глубоко неупругим” рассеянием.

Примерно в то же время Бьеркен [10], используя методы алгебры токов, показал, что $W_1(q^2, \nu)$ и $W_2(q^2, \nu)$ удовлетворяют законам скейлинга: для q^2 и ν одновременно стремящихся к бесконечности

$$\nu W_2(\nu, q^2) \rightarrow F_2(\omega), \quad W_1(\nu, q^2) \rightarrow F_1(\omega), \quad (20.6.5)$$

где снова $\omega \equiv 2m_N\nu/q^2$. Более интуитивное объяснение было дано немного позже Фейнманом [11]. Он предположил, что при глубоко неупругом рассеянии на ультрарелятивистском нуклоне с импульсом $\mathbf{p}$, нуклон ведет себя так, как если бы он состоял из “партонов” различного типа, занумерованных индексом i , каждый из которых с вероятностью $\mathcal{F}_i(x) dx$ имел импульс в интервале между $x\mathbf{p}$ и $(x + dx)\mathbf{p}$. Тогда для каждого i

$$\int dx \mathcal{F}_i(x) = 1. \quad (20.6.6)$$

Условие того, что нуклон имеет суммарный импульс $\mathbf{p}$, дает дополнительное правило сумм:

$$\int_0^1 \sum_i \mathcal{F}_i(x) x dx = 1. \quad (20.6.7)$$

Для упругого рассеяния электрона (массой m_e мы пренебрегаем) на партоне с 4-импульсом $x\mathbf{p}$ мы имеем:

$$x^2 m_N^2 = -(q + xp)^2 = -q^2 - 2\nu m_N x + x^2 m_N^2,$$

откуда $\nu = q^2/2m_N x$. Сечение неупругого рассеяния в этой модели следовательно равно ³⁾

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\nu} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} \sum_i Q_i^2 \int_0^1 dx \left(1 + \frac{q^2}{2m_N^2 x^2} \text{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \sigma\left(\nu - \frac{q^2}{2m_N x}\right), \quad (20.6.8)$$

где Q_i — заряд партона i -го типа в единицах e . (Слагаемое с $\text{tg}^2(\theta/2)$)

³⁾ Этот результат может быть получен из формул (8.7.7) и (8.7.38) для комптоновского рассеяния на частице со спином $1/2$, 4-импульсом p и массой m в общей лоренцевой системе отсчета. Полезно заметить, что в калибровке, использованной при выводе этих формул, в начальный и конечный вещественные векторы поляризации e_μ и e'_μ удовлетворяют соотношениям $e^2 = e'^2 = 1$, $e \cdot p = e' \cdot p = e \cdot k = e' \cdot k' = 0$, и тогда сумма по поляризациям дает

$$\sum_{e, e'} (e \cdot e')^2 = 2 + \frac{m^4 (k \cdot k')^2}{(k \cdot p)^2 (k' \cdot p)^2} + \frac{2m^2 (k \cdot k')}{(k \cdot p)(k' \cdot p)}.$$

здесь относится к “дираковскому” партону с магнитным моментом $eQ_i/2m_N x$.) Сравнение с формулой (20.6.3) дает

$$W_2(\nu, q^2) = \sum_i Q_i^2 \int_0^1 dx \mathcal{F}_i(x) \delta\left(\nu - \frac{q^2}{2m_N x}\right) = \frac{1}{\nu\omega} \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_1\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad (20.6.9)$$

$$W_1(\nu, q^2) = \frac{1}{2} \sum_i Q_i^2 \int_0^1 dx \mathcal{F}_i(x) \frac{q^2}{2m_N^2 x^2} \delta\left(\nu - \frac{q^2}{2m_N x}\right) = \frac{\omega\nu}{2m_N} W_2(\nu, q^2). \quad (20.6.10)$$

Этот результат согласуется с правилами бьеркеновского скейлинга (20.6.5), если

$$F_2(\omega) = \frac{1}{\omega} \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (20.6.11)$$

и

$$F_1(\omega) = \frac{\omega}{2m_N} F_2(\omega). \quad (20.6.12)$$

Уравнение (20.6.12) впервые было получено Калланом и Гроссом [12]. Оно согласуется с экспериментом с точностью 10–15 %.

В предположении, что протон и нейтрон состоят соответственно из двух u - и одного d -кварка или одного u - и двух d -кварков и произвольного числа нейтральных партонов, уравнения (20.6.11) и (20.6.6) определяют правило сумм для W_2 :

$$\int_1^\infty F_2(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = \sum_i Q_i^2 = \begin{cases} 1, & p, \\ 2/3, & n. \end{cases} \quad (20.6.13)$$

Значительный вклад интеграл получает в области больших ω , где F_2 трудно измерить. Если мы также предположим, что полный импульс нуклона в равной мере поделен между тремя кварками (без нейтральных партонов), то вместо уравнения (20.6.7) мы будем иметь более сильное условие

$$\int \mathcal{F}_i(x) x dx = \frac{1}{3}$$

для каждого кварка, что совместно с (20.6.11) дает

$$\int_1^\infty F_2(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{1}{3} \sum_i Q_i^2 = \begin{cases} 1/3, & p, \\ 2/9, & n. \end{cases}$$

Этот интеграл легче измерить, и результат сильно расходится с правилом сумм, откуда следует, что большая часть импульса нуклона переносится нейтральными партонами.

Феноменологические рассуждения, приведенные выше, не зависят от выбора определенной теории поля. В конце концов именно операторное разложение позволило применить методы теории поля,

лежащей в основе исследуемых процессов, к глубоко неупругому рассеянию. В частности, операторное разложение сделало очевидным тот факт, что для объяснения правил скейлинга (20.6.5) (и вычислений поправок к нему) необходима асимптотически свободная теория поля. Такой асимптотически свободной теорией в конечном итоге явилась квантовая хромодинамика.

Для применения операторного разложения к глубоко неупругому рассеянию сначала произведем преобразование Фурье над выражением (20.6.1). Используя трансляционную инвариантность и полноту адронных состояний $|H\rangle$, получим

$$\frac{m_N}{p_N^0} W^{\mu\nu}(q, p) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^4} \sum_{\sigma_N} \int d^4 z e^{-iq \cdot z} \langle N | J^\nu(z) J^\mu(0) | N \rangle. \quad (20.6.14)$$

Асимптотическое поведение $W^{\mu\nu}(q, p)$ при $q \rightarrow \infty$, таким образом, связано с сингулярностью операторного произведения при $z \rightarrow 0$.

Диаграммные вычисления коэффициентных функций в операторном разложении относятся не столько к разложениям матричных элементов, появляющихся в (20.6.14) для $W^{\mu\nu}$, сколько к разложениям матричных элементов двухточечных функций Грина:

$$\frac{m_N}{p_N^0} T^{\mu\nu}(q, p) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^4} \sum_{\sigma_N} \int d^4 z e^{-iq \cdot z} \langle N | T \{ J^\nu(z), J^\mu(0) \} | N \rangle. \quad (20.6.15)$$

Мы можем переписать это выражение в терминах структурных функций для $T^{\mu\nu}$, определяемых по аналогии с (20.6.2):

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(q, p) = & - \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \eta^{\mu\nu} \right) T_1(\nu, q^2) + \\ & + \frac{1}{m_N^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) T_2(\nu, q^2). \end{aligned} \quad (20.6.16)$$

Связь между $T_r(\nu, q^2)$ и $W_r(\nu, q^2)$ ($r = 1, 2$) определяется [13] дисперсионными соотношениями⁴⁾ для фиксированного q^2 :

$$\begin{aligned} T_r(\nu, q^2) = & \frac{1}{2} W_r(-\nu, q^2) + \frac{1}{2} W_r(\nu, q^2) + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \frac{W_r(-\nu', q^2) - W_r(\nu', q^2)}{\nu' - \nu}, \end{aligned} \quad (20.6.17)$$

где интеграл следует понимать в смысле главного значения. Функции $W_r(\nu, q^2)$ обращаются в нуль везде, за исключением области $\nu > q^2/2m_N$, поэтому дисперсионные соотношения могут быть пред-

⁴⁾ Для $q^2 = 0$ эта связь может быть получена точно так же, как и при выводе дисперсионного соотношения (10.8.16) для фотонного рассеяния вперед. Для произвольного же $q^2 \neq 0$ вывод сложнее.

ставлены в виде

$$T_r(\nu, q^2) = \frac{1}{2} W_r(-\nu, q^2) + \frac{1}{2} W_r(\nu, q^2) - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{q^2/2m_N}^{\infty} d\nu' W_r(\nu', q^2) \left(\frac{1}{\nu' + \nu} + \frac{1}{\nu' - \nu} \right). \quad (20.6.18)$$

Мы можем классифицировать операторы, дающие вклад в операторное разложение для T_r , в соответствии с неприводимыми представлениями группы Лоренца, которой они принадлежат. Единственно возможные лоренц-ковариантные функции одного 4-вектора p^μ с фиксированным $p^2 = -m_N^2$ пропорциональны симметрическим тензорам $p^{\mu_1}, \dots, p^{\mu_s}$, и поэтому усредненные по спину матричные элементы нуклонных операторов могут состоять лишь из симметрических бесследовых тензоров $\mathcal{O}_{si}^{\mu_1 \dots \mu_s}$, где индекс i обозначает различные тензоры с подобной структурой. (По причинам, которые станут ясны позднее, мы используем, нумеруя операторы, тот же индекс i , что и для обозначения различных типов партонов в партонной модели.) Эти операторы имеют матричные элементы вида

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma_N} \langle N | \mathcal{O}_{si}^{\mu_1 \dots \mu_s} | N \rangle = \frac{m_N}{p_N^0} [p^{\mu_1} \dots p^{\mu_s} - \text{следы}] \langle \mathcal{O}_{si} \rangle, \quad (20.6.19)$$

где $\langle \mathcal{O}_{si} \rangle$ — постоянные коэффициенты. Такой оператор вносит в $T^{\mu\nu}(q, p)$ вклад, пропорциональный произведению s -компонент 4-вектора p , и, следовательно, пропорциональный ν^s в $T_1(\nu, q^2)$ и ν^{s-2} в $T_2(\nu, q^2)$. (Мы опускаем слагаемые, содержащие p^2 , так как эти слагаемые будут подавлены множителями m_N^2/q^2 или $m_N^2/p \cdot q$.) Если забыть про логарифмические поправки, то в асимптотически свободной теории зависимость коэффициентов от q^2 имеет вид $(q^2)^{(-4+6-d(s,i)-s)/2}$ и $(q^2)^{(-4+6-d(s,i)-s+2)/2}$ соответственно, где $d(s, i)$ — размерность оператора $\mathcal{O}_{si}$ ⁵⁾. Используя тот факт, что $\nu \propto q^2 \omega$, мы видим, что вклад оператора $\mathcal{O}_{si}$ в структурные функции имеет асимптотический вид

$$T_{1,si} \propto \nu^s (q^2)^{(2-d(s,i)-s)/2} \propto \omega^s (q^2)^{(2-\tau(s,i))/2} \quad (20.6.20)$$

и

$$\nu T_{2,si} \propto \nu^{s-1} (q^2)^{(4-d(s,i)-s)/2} \propto \omega^{s-1} (q^2)^{(2-\tau(s,i))/2}, \quad (20.6.21)$$

где $\tau(s, i)$ есть так называемый “твист” оператора $\mathcal{O}_{si}$, определяемый как [14]

$$\tau(s, i) \equiv d(s, i) - s. \quad (20.6.22)$$

⁵⁾ Число -4 возникает в показателях степени в результате интегрирования по z в (20.6.14), а $+6$ является суммарной размерностью двух операторов электрического тока. Слагаемые $-s/2$ и $-(s-2)/2$ служат для компенсации степеней q^μ в ν^s и ν^{s-2} соответственно.

Мы видим, что при $q^2 \rightarrow \infty$ с фиксированным ω основной вклад в T_1 и νT_2 дают операторы с минимальным твистом. Уравнение (20.6.18) также показывает, что в $T_r(\nu, q^2)$ отсутствуют слагаемые нечетного порядка по ν , и поэтому вклад здесь могут давать лишь операторы $\mathcal{O}_{si}$ с четным s .

Симметрическими бесследовыми операторами ранга s и минимальной размерности являются операторы

$$(\mathcal{O}_{sf})_{\mu_1 \dots \mu_s} \equiv \frac{i^{s-2}}{s!} \bar{\psi}_f \gamma_{\{\mu_1} D_{\mu_2}^{\leftrightarrow} \dots D_{\mu_s}^{\leftrightarrow} \psi_f \quad (20.6.23)$$

и

$$(\mathcal{O}_{s0})_{\mu_1 \dots \mu_s} \equiv \frac{i^{s-2}}{2s!} F_{\alpha\nu\{\mu_1} D_{\mu_3}^{\leftrightarrow} \dots D_{\mu_s}^{\leftrightarrow} F_{\alpha\mu_2}^{\nu}, \quad (20.6.24)$$

где f нумерует кварковые ароматы, D_μ — калибровочная ковариантная производная, а скобки означают суммирование по перестановкам и вычитание слагаемых с конечным следом по пространственно-временным индексам внутри скобок. (Знак $\leftrightarrow$ означает полуразность производных, действующих справа и слева. Мы берем здесь разность производных, так как их сумма будет обращаться в нуль в любом матричном элементе, взятом между состояниями с одинаковыми 4-импульсами.) Эти операторы имеют размерность $3 + (s-1) = 4 + (s-2) = 2 + s$, поэтому для каждого из них твист $\tau = 2$. Таким образом, при $q^2 \rightarrow \infty$ вклад дает бесконечное число операторов, каждый из которых вносит в T_1 и νT_2 вклад, зависящий от ω , но лишь логарифмически от q^2 . Следовательно, асимптотическая свобода подтверждает бьеркеновский скейлинг, но только с точностью до логарифмических поправок. Сохраняя лишь операторы твиста два, мы замечаем, что (как уже было упомянуто в замечании) для каждого s существует один оператор каждого типа партонов с i , пробегающим всевозможные кварковые ароматы f (без различия кварков и антикварков), и значением $i = 0$, соответствующим глюону.

Рассмотрим теперь логарифмические поправки. Асимптотическое поведение коэффициентных функций в асимптотически свободной теории определяется выражением (20.3.9). Как уже указывалось в § 10.4, если мы опускаем электромагнитные радиационные поправки, то для электромагнитного тока никаких перенормировочных множителей не требуется, поскольку эти токи сохраняются. Следовательно, матрица $c_{ii'}$ в уравнении (20.3.9) обращается в нуль. Матрица $c_{\theta\theta'}$ не содержит матричных элементов, связывающих операторы различного типа относительно преобразований Лоренца, поэтому теперь в обозначениях, которые мы используем, $c_{si,s'i'} = \delta_{ss'} c_{ii'}(s)$. Таким образом, уравнение (20.3.9) принимает вид

$$T_1(\nu, q^2) \rightarrow \sum_{sij} \omega^s \mathcal{A}_{si}[(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b}]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle, \quad (20.6.25)$$

$$\nu T_2(\nu, q^2) \rightarrow \sum_{sij} \omega^{s-1} \mathcal{B}_{si}[(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b}]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle, \quad (20.6.26)$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — константы, возникающие в коэффициентных функциях при операторе $\mathcal{O}_{si}$, в операторном разложении произведения двух электрических токов, l^2 — частное значение q^2 , при котором мы определяем коэффициентные функции, b — константа из однопетлевого ренормгруппового уравнения (20.3.8) для константы связи сильного взаимодействия g_q , а $\langle \mathcal{O}_{si} \rangle$ — постоянный коэффициент в матричных элементах (20.6.19).

Коэффициенты операторного разложения не зависят от конкретного процесса, а также и от того, что кварки могут быть “запертыми”, т. е. мы можем вычислить коэффициенты $\mathcal{A}_{si}$ и $\mathcal{B}_{si}$, рассматривая более простой фиктивный процесс — рассеяние электрона на свободном кварке аромата f . Перенормированные операторы $\mathcal{O}_{si}$ удобно определить так, чтобы матричные элементы операторов (20.6.23) и (20.6.24) с участием одного кварка получались в древесном приближении:

$$\langle f', \sigma' | \mathcal{O}_{sf} | f'', \sigma'' \rangle = \frac{(-1)^s i}{s!} (\bar{u}' \gamma^{\{\mu_1} u) p^{\mu_2} \dots p^{\mu_s\}} \delta_{ff'} \delta_{ff''}, \quad (20.6.27)$$

$$\langle f', \sigma' | \mathcal{O}_{s0} | f'', \sigma'' \rangle = 0. \quad (20.6.28)$$

Усредняя (20.6.27) по всем $\sigma' = \sigma''$ и сравнивая результат с (20.6.19), имеем

$$\langle \mathcal{O}_{sf} \rangle_{f'} \frac{m_f}{p^0} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_s} = \delta_{ff'} \frac{(-1)^s i}{2s!} \text{Tr} \left\{ \left(\frac{-i\not{p} + m_f}{2p^0} \right) \gamma^{\{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_s\}} \right\},$$

так что (для четного s)

$$\langle \mathcal{O}_{sf} \rangle_{f'} = \frac{\delta_{ff'}}{m_f} \quad (20.6.29)$$

и

$$\langle \mathcal{O}_{s0} \rangle_{f'} = 0. \quad (20.6.30)$$

С таким определением операторов $\mathcal{O}_{si}$, на масштабе перенормировки по импульсам l^2 , достаточно большом, для того чтобы коэффициентные функции операторного разложения могли быть вычислены в древесном приближении, эти функции могут быть вычислены из формул древесного приближения для сечения рассеяния электрона на кварке. Воспроизводя вывод уравнений (20.6.9) и (20.6.10) в партонной модели, мы видим, что W_r для электронного рассеяния на кварке аромата f в древесном приближении определяются выражениями⁶⁾

$$\nu W_{2,f} = \frac{m_N}{m_f} Q_f^2 \delta(\omega - 1), \quad (20.6.31)$$

$$W_{1,f} = \frac{Q_f^2 \delta(\omega - 1)}{2m_f}. \quad (20.6.32)$$

⁶⁾ Множитель (m_N/m_f) вводится в уравнении (20.6.31), поскольку ν определяется как $-q \cdot p/m_N$, а не $-q \cdot p/m_f$, в то время как именно W_2/m_N^2 , а не W_2/m_f^2 , возникает в уравнении (20.6.2). Уравнение (20.6.32) теперь следует из (20.6.10). Величина ω может быть записана в виде, не зависящем от массы: $\omega = -2q \cdot p/q^2$.

Подстановка этого результата в дисперсионные соотношения (20.6.18) для $\omega \neq 1$ приводит к выражениям

$$T_{1,f} = \frac{Q_f^2}{2\pi i m_f} \frac{m_N}{m_f} \frac{1}{\omega^2 - 1}, \quad (20.6.33)$$

$$\nu T_{2,f} = \frac{2Q_f^2}{2\pi i} \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1}. \quad (20.6.34)$$

Эти результаты могут также быть получены напрямую из расчета фейнмановских диаграмм для кварк-электронного рассеяния. Сравнивая коэффициенты при ω^s в выражениях (20.6.33) и (20.6.34) с коэффициентами в (20.6.25) и (20.6.26) в точке перенормировки $q^2 = l^2$ и используя (20.6.29), (20.6.30), находим:

$$\mathcal{A}_{si} = \frac{iQ_i^2}{2\pi}, \quad \mathcal{B}_{si} = \frac{im_N Q_i^2}{\pi} \quad (20.6.35)$$

с глюонным зарядом Q_0 , конечно равным нулю. Как уже было упомянуто, даже несмотря на то что эти значения были вычислены для кварк-электронного рассеяния, $\mathcal{A}_{si}$ и $\mathcal{B}_{si}$ являются коэффициентами в операторном разложении произведения двух электрических токов, и, следовательно, не зависят от состояния, по которому мы вычисляем среднее этого операторного произведения. Таким образом, мы можем подставить (20.6.35) в (20.6.25) и (20.6.26) и соответственно найти

$$T_1(\nu, q^2) \rightarrow \frac{i}{2\pi} \sum_{sij} \omega^s Q_i^2 [(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b}]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle, \quad (20.6.36)$$

$$\nu T_2(\nu, q^2) \rightarrow \frac{im_N}{\pi} \sum_{sij} \omega^{s-1} Q_i^2 [(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b}]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle. \quad (20.6.37)$$

Теперь обратимся к структурным функциям $W_r(\nu, q^2)$. Заметим, что коэффициент при $\omega^s = (2m_N \nu / q^2)^s$ в $T_r(\nu, q^2)$ определяется из формулы (20.6.18):

$$\frac{-2}{2\pi i} \left(\frac{q^2}{2m_N} \right)^s \int_{q^2/2m_N}^{\infty} d\nu' \nu'^{-1-s} W_r(\nu', q^2) = \frac{i}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega \omega^{-1-s} W_r\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right).$$

Сравнивая с (20.6.36) и (20.6.37), находим

$$\int_1^{\infty} d\omega \omega^{-1-s} W_1\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_i^2 [(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b}]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle, \quad (20.6.38)$$

$$\int_1^{\infty} d\omega \omega^{-s} \nu W_2\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \rightarrow m_N \sum_{ij} Q_i^2 [(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b}]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle. \quad (20.6.39)$$

Удовлетворяющие этим уравнениям функции W_r могут быть очевидным образом представлены в виде соотношений (20.6.9) и (20.6.10) в партонной модели,

$$W_1\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \rightarrow \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i(1/\omega, q^2), \quad (20.6.40)$$

$$\nu W_2\left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2\right) \rightarrow \frac{2m_N}{\omega} \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i(1/\omega, q^2), \quad (20.6.41)$$

где $\mathcal{F}_i$ — функция распределения партонов, определяемая теперь уравнениями для моментов:

$$\int_0^1 dx x^{s-1} \mathcal{F}_i(x, q^2) = \frac{1}{2} \sum_j [(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b}]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle. \quad (20.6.42)$$

В частности, мы видим, что асимптотическая свобода не только приводит к поправкам для бьеркеновского скейлинга, но и к соотношению Каллана–Гросса (20.6.12) между W_1 и W_2 .

Существует изящная формулировка уравнений для моментов (20.6.42), придуманная Альтарелли и Паризи [15], которая стала широко использоваться при изучении глубоко неупругого рассеяния. Заметим, что из уравнения (20.6.42) совместно с уравнением ренорм-группы (20.3.8) следуют дифференциальные уравнения

$$q^2 \frac{d}{dq^2} \int_0^1 dx x^{s-1} \mathcal{F}_i(x, q^2) = -g_q^2 \int_j c_{ij}(s) \int_0^1 dx x^{s-1} \mathcal{F}_j(x, q^2). \quad (20.6.43)$$

Эти уравнения вместе с “начальным” условием в точке перенормировки l^2 ,

$$\int_0^1 dx x^{s-1} \mathcal{F}_i(x, l^2) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{O}_{si} \rangle, \quad (20.6.44)$$

имеют единственное решение и поэтому могут быть использованы вместо уравнений для импульсов. Теперь уравнение (20.6.43) удовлетворяется, в случае если $\mathcal{F}_i$ является решением дифференциального уравнения

$$q^2 \frac{d}{dq^2} \mathcal{F}_i(x, q^2) = \frac{g_q^2}{4\pi^2} \sum_j \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{ij}\left(\frac{x}{y}\right) \mathcal{F}_j(y, q^2), \quad (20.6.45)$$

где матричная функция $P_{ij}(z)$ подчиняется условиям

$$\int_0^1 z^{s-1} P_{ij}(z) dz = -4\pi^2 c_{ij}(s). \quad (20.6.46)$$

(Наличие множителя $4\pi^2$ зависит от выбора нормировки.)

Матрица $c_{ij}(s)$ была вычислена в квантовой хромодинамике Джорджи и Политцером [16], а также Гроссом и Вильчеком [17]. Они предположили, что существует N кварковых ароматов, достаточно легких, чтобы рассматривать их как безмассовые, а кварки всех остальных сортов рассматривались как очень тяжелые, по ним производилось функциональное интегрирование, и, следовательно, их влияние, за исключением вклада в константу сильного взаимодействия, можно было не учитывать. Полученный ими результат можно представить в базисе операторов (20.6.23) и (20.6.24) следующим образом:

$$c_{00}(s) = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ C_1 \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \sum_{t=2}^s \frac{1}{t} \right] + \frac{N}{3} C_2 \right\}, \quad (20.6.47)$$

$$c_{f0}(s) = \frac{1}{\pi^2} C_2 \left[\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right], \quad (20.6.48)$$

$$c_{0f}(s) = \frac{1}{8\pi^2} C_3 \left[\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s(s-1)} \right], \quad (20.6.49)$$

$$c_{ff'}(s) = \frac{1}{8\pi^2} C_3 \left[1 - \frac{1}{s(s+1)} + 4 \sum_{t=2}^s \frac{1}{t} \right] \delta_{ff'}, \quad (20.6.50)$$

где 0 и f — операторы (20.6.24) и (20.6.23) соответственно; константы C_1 и C_2 определяются из уравнений (17.5.33) и (17.5.34) (с одним только кварковым ароматом в следе в (17.5.34)); N — число ароматов, и C_3 определяется (с использованием обозначения § 17.4) из соотношения

$$t_\alpha t_\alpha = C_3 g^2 1. \quad (20.6.51)$$

В реальном случае с калибровочной группой $SU(3)$, с кварками в фундаментальном представлении **3**, этими числами являются

$$C_1 = 3, \quad C_2 = \frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{4}{3}. \quad (20.6.52)$$

Эти довольно сложные результаты становятся проще, если выразить их в терминах функций Альтарелли–Паризи. Легко проверить, что уравнение (20.6.46) удовлетворяется, если

$$P_{ff'} = \delta_{ff'} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1+x^2}{(1-x)_+} \right) + 2\delta(1-x) \right], \quad (20.6.53)$$

$$P_{f0} = x^2 - x + \frac{1}{2}, \quad (20.6.54)$$

$$P_{0f} = \frac{4}{3} \left[\frac{2}{x} - 2 + x \right], \quad (20.6.55)$$

$$P_{00} = 6 \left[\frac{1-x}{x} + x(1-x) + \frac{x}{(1-x)_+} + \frac{11}{12} \delta(1-x) \right] - \frac{N}{3} \delta(1-x). \quad (20.6.56)$$

В интеграле по x до $x = 1$, величина $1/(1-x)_+$ определяется как

$$\frac{f(x)}{(1-x)_+} \equiv \frac{f(x) - f(1)}{1-x}. \quad (20.6.57)$$

Для каждого s , очевидно, существует $(N-1)$ -кратно вырожденное собственное значение матрицы $c(s)$, равное коэффициенту при $\delta_{ff'}$ в уравнении (20.6.50):

$$c(s, \text{присоединенное}) = \frac{1}{8\pi^2} C_3 \left[1 - \frac{2}{s(s+1)} + 4 \sum_{t=2}^s \frac{1}{t} \right], \quad (20.6.58)$$

с собственными операторами, определяемыми как все независимые линейные комбинации операторов (20.6.23) с коэффициентами a_f , удовлетворяющими условию $\sum_f a_f = 0$. Эти операторы принадле-

жат присоединенному представлению ненарушенной глобальной $SU(N)$ -симметрии квантовой хромодинамики с N кварковыми ароматами. Кроме того для каждого s существуют два собственных оператора, принадлежащие синглетному представлению $SU(N)$, которые получаются из линейной комбинации оператора (20.6.24) и суммы по f всех операторов (20.6.23). Собственные операторы и соответствующие им собственные значения могут быть найдены приведением к диагональному виду матрицы 2×2 :

$$c(s)_{\text{синглет}} = \begin{bmatrix} c_{00}(s) & c_{0f}(s)N \\ c_{f0}(s) & c(s, \text{присоединенное}) \end{bmatrix}. \quad (20.6.59)$$

Для $s = 2$ эта матрица принимает вид

$$c(2)_{\text{синглет}} = \begin{bmatrix} NC_2/6\pi^2 & NC_3/6\pi^2 \\ C_2/3\pi^2 & C_3/3\pi^2 \end{bmatrix}. \quad (20.6.60)$$

Последняя матрица имеет одно нулевое собственное значение, соответствующее линейной комбинации $\mathcal{O}_{20}^{\mu\nu}$ и $\sum_f \mathcal{O}_{2f}^{\mu\nu}$, равной тензору

энергии-импульса, который, так же как и J^μ , не перенормируется. Другое собственное значение матрицы (20.6.36) получается при взятии ее следа: $NC_2/6\pi^2 + C_3/3\pi^2$. Теперь минимум собственных значений $c_{ij}(s)$ для данного s должен быть по крайней мере столь же большим, что и минимум собственных значений $c_{ij}(s')$ для любого $s' < s$, так как в противном случае, для достаточно большого q^2 , интеграл (20.6.42) будет в конечном итоге больше для s , чем для s' , в противоречии с тем фактом, что этот интеграл есть строго убывающая функция s . Поскольку минимальное собственное значение при $s = 2$ равно нулю, мы можем заключить, что все остальные собственные значения для $s > 2$ положительны. В действительности они все положительно определены, потому как не существует неперенормируемых (в том же смысле, что и J^μ , и $T^{\mu\nu}$) операторов при $s > 2$. Следовательно, прямой бьеркеновский скейлинг имеет место лишь

в предельном случае $g_q^2 \rightarrow 0$, когда выживает лишь вклад тензора энергии-импульса. Предсказания нарушения прямого бьеркеновского скейлинга подтвердились экспериментально при исчерпывающем изучении глубоко неупругого электрон-нуклонного и мюон-нуклонного рассеяния.

§ 20.7. Ренормалоны ¹⁾

Начиная с появления квантовой теории поля теоретики задавались вопросом, сходится ли ряд теории возмущений, и если нет, то как можно это интерпретировать. Еще в начале развития современной квантовой электродинамики Дайсоном [18] было замечено, что число диаграмм порядка n обычно растет как $n!$, что подтверждает тот факт, что ряд теории возмущений имеет нулевой радиус сходимости.

Существует хорошо известный метод, называемый преобразованием Бореля [19], который применяется для улучшения сходимости степенного ряда, n -й член которого растет как $n!$. Он позволяет сделать ряд сходящимся или по крайней мере улучшить поведение ряда так, что он может быть использован как асимптотическое разложение в широком диапазоне изменения констант связи. Для заданного ряда

$$F(g) = \sum_n f_n g^n \quad (20.7.1)$$

мы рассмотрим соответствующий ряд

$$B(z) \equiv \sum_n f_n z^n / n!. \quad (20.7.2)$$

Если f_n растет не быстрее чем $n!$, то $B(z)$ будет, вообще говоря, иметь по крайней мере конечный радиус сходимости. Вопрос заключается в том, можем ли мы восстановить начальный ряд (20.7.1) по пересуммированному ряду (20.7.2) Используя известную формулу

$$\int_0^\infty \exp(-z/g) z^n dz = n! g^{n+1},$$

по крайней мере формально, находим

$$gF(g) = \int_0^\infty \exp(-z/g) B(z) dz. \quad (20.7.3)$$

Особенности функции $B(z)$ где-либо в комплексной плоскости ограничивают радиус сходимости ряда (20.7.2), но это не является непреодо-

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

долимой проблемой, если данные особенности находятся вне положительного луча действительной оси. Что бы вычислить $F(g)$ используя равенство (20.7.3), необходимо знать значения функции $B(z)$ только для действительных положительных значений z , меньших или порядка g , которые могут быть получены из степенного ряда (20.7.1), если все особенности функции $B(z)$ на комплексной плоскости находятся на расстояниях от начала координат, гораздо больших g . Даже если несколько полюсов z_1, z_2 , и т. д. имеют модули порядка g или меньше, можно вычислить $B(z)$ вплоть до значений z порядка g , используя степенной ряд функции $(z - z_1)(z - z_2) \dots B(z)$, но для этого необходимо знать расположение полюсов.

Особенности $B(z)$, расположенные на положительной действительной полуоси, гораздо хуже, поскольку они приводят к нарушению равенства (20.7.3). Контур интегрирования в этом равенстве может быть деформирован так, чтобы обойти особенности на положительной действительной полуоси, но тогда возникает неоднозначность из-за того, пропустим мы контур над или под особенностью?

В этом параграфе будет показано, что некоторые из сингулярностей борелевского преобразования $B(z)$ связаны с решениями классических уравнений поля, известными как *инстантоны*, в то время как другие особенности, известные как *ренормалоны*, связаны с членами в операторном разложении. В квантовой хромодинамике именно ренормалоны мешают использовать преобразование Бореля для суммирования ряда теории возмущений.

В 1976 г. Липатов [20] показал, что некоторые из особенностей в преобразовании Бореля $B(z)$ связаны с существованием классических решений уравнений поля. Рассмотрим функцию $F(g)$, определенную евклидовым функциональным интегралом:

$$F(g) \equiv \int [d\phi] \exp(I[\phi, g]). \quad (20.7.4)$$

(Использование евклидова функционального интегрирования обсуждается в приложении А гл. 23.) Коэффициенты в степенном ряду (20.7.1) задаются выражением

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2\pi i} \int [d\phi] \oint dg g^{-n-1} \exp(I[\phi, g]) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int [d\phi] \oint dg \exp(I[\phi, g] - (n+1) \ln g), \end{aligned} \quad (20.7.5)$$

где $\oint$ обозначает интеграл по замкнутой кривой в направлении против часовой стрелки в комплексной плоскости параметра g , окружающей точку $g = 0$. Для очень больших значений n разумно предположить, что доминирующий вклад в интеграл дает точка ϕ_n, g_n , в которой аргумент экспоненты в последней строке равенства (20.7.5) экстремален

как по ϕ , так и по g :

$$\left. \frac{\delta I[\phi, g_n]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=\phi_n} = 0, \quad (20.7.6)$$

$$\left. \frac{\partial I[\phi_n, g]}{\partial g} \right|_{g=g_n} = \frac{n+1}{g_n}. \quad (20.7.7)$$

Например, предположим, что $I[\phi, g]$ — это действие для безмассового скалярного поля,

$$I[\phi, g] = -\frac{1}{2} \int \partial_i \phi \partial_i \phi d^4 x - \frac{g}{24} \int \phi^4 d^4 x, \quad (20.7.8)$$

с суммированием по евклидовым координатным направлениям 1, 2, 3, 4. Тогда уравнение поля (20.7.6) имеет вид

$$\square \phi_n = \frac{1}{6} g_n \phi_n^3. \quad (20.7.9)$$

Будет показано, что g_n отрицательно, так что решение данного уравнения можно переписать в виде

$$\phi_n(x) = (-g_n)^{-1/2} \chi(x), \quad (20.7.10)$$

где $\chi(x)$ — независимое от g решение уравнения

$$\square \chi = -\frac{1}{6} \chi^3. \quad (20.7.11)$$

Условие (20.7.7) говорит нам, что

$$-\frac{1}{24} \int d^4 x \phi_n^4 = \frac{n+1}{g_n},$$

или, в терминах масштабного преобразованного поля (20.7.10),

$$g_n = -\frac{1}{24(n+1)} \int d^4 x \chi^4. \quad (20.7.12)$$

В стационарной точке действие (20.7.8) принимает значение

$$I[\phi_n, g_n] = -\frac{1}{2} \int \partial_i \phi_n \partial_i \phi_n d^4 x - \frac{g_n}{24} \int \phi_n^4 d^4 x = \frac{g_n}{24} \int \phi_n^4 d^4 x = -n-1. \quad (20.7.13)$$

Оценка выражения (20.7.5) в стационарной точке дает тогда для $n \rightarrow \infty$ ²⁾

$$\begin{aligned} f_n &\approx g_n^{-n-1} \exp(I(\phi_n, g_n)) = (n+1)^{n+1} \left(-\frac{e}{24} \int \chi^4 d^4 x \right)^{-n-1} \approx \\ &\approx n! \left(-\frac{1}{24} \int \chi^4 d^4 x \right)^{-n}. \end{aligned} \quad (20.7.14)$$

²⁾ Здесь символ “ $\approx$ ” должен интерпретироваться как “асимптотически равен с точностью до постоянного множителя и степеней n ”. Эти множители возникают из множителя $\sqrt{12\pi n}$ в формуле Стирлинга для $(n+1)!$, из отношения $(n+1)!$ и $n!$, и из интеграла по флуктуациям g и $\phi(x)$ вокруг стационарной точки. Поскольку мы не собираемся вычислять множители из последнего источника, то так же нет причины следить за множителями из первых двух источников.

Лидирующая особенность в $B(z)$ является, следовательно, полюсом при $z = z_1$, где

$$z_1 = -\frac{1}{24} \int \chi^4 d^4x. \quad (20.7.15)$$

Поскольку это отрицательная величина, она не мешает провести интегрирование в формуле (20.7.3). Чтобы вычислить положение полюса (20.7.15), заметим, что уравнение поля (20.7.11) имеет решение

$$\chi = \frac{4\sqrt{3}a}{r^2 + a^2}, \quad (20.7.16)$$

где $r = (x_i x_i)^{1/2}$, и a — произвольный параметр. Это решение уравнения поля является элементарным примером “инстантонов”, решений, которые будет обсуждаться в § 23.5 (Они называются инстантонами, поскольку вместо того чтобы быть сконцентрированными вдоль мировой линии, они концентрируются около точки в пространстве-времени, в нашем случае — около начала координат.) По счастью, положение полюса не зависит от величины a :

$$z_1 = -96\pi^2 a^4 \int_0^\infty \frac{r^2 dr^2}{(r^2 + a^2)^4} = -16\pi^2. \quad (20.7.17)$$

Видно, что ряд теории возмущений для функции $B(z)$ может быть использован в уравнении (20.7.3), если $g \ll 16\pi^2$. Если $g/16\pi^2$ порядка или больше единицы, все еще возможно вычислить $B(z)$ из ряда теории возмущений для функции $(z + 16\pi^2)B(z)$.

В § 23.5 будет показано, что инстантоны существуют в неабелевых калибровочных теориях, подобных квантовой хромодинамике, но это дополнительно приводит к относительно безобидным особенностям $B(z)$ на отрицательном луче действительной оси. Настоящая проблема в квантовой хромодинамике состоит в другом классе особенностей, известных как ренормалоны [21]. Они были открыты путем осмысления [22] того факта, что отдельные диаграммы порядка $2n$, подобные изображенной на рис. 20.3, могут давать вклады, растущие

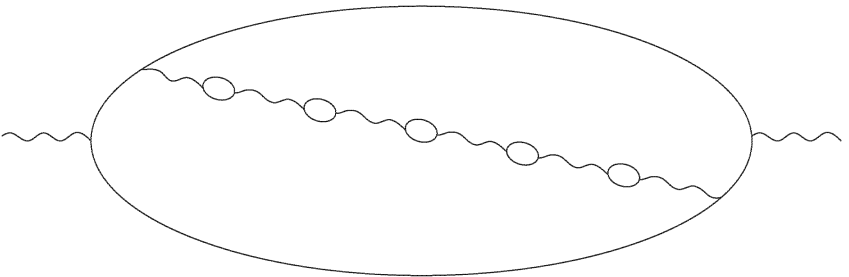


Рис. 20.3. Одна из N -петлевых диаграмм, вклад от которой ведет себя как $N!$. Гладкие линии соответствуют фермионам, волнистые — калибровочным бозонам

как $n!$, и, согласно уравнению (20.7.2), могут приводить к дополнительным особенностям в $B(z)$. В этом специальном случае особенность известна как *инфракрасный* ренормалон, поскольку она возникает из-за виртуальных импульсов, которые гораздо меньше, чем импульсы, используемые для определения бегущей константы связи квантовой хромодинамики g_μ . К счастью, для того чтобы локализовать инфракрасные ренормалоны, можно использовать операторное разложение, не прибегая к анализу отдельных фейнмановских диаграмм.

В качестве простого, но важного примера рассмотрим $\prod_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(q)$ — сумму всех вакуумных диаграмм в квантовой хромодинамике со вставками 4-векторных токов J_α^μ и J_β^ν , несущих 4-импульс q в диаграмму и из нее. ($\prod^{\mu\nu}(q)$ дает адронный вклад в поляризацию электрослабого вакуума, и его мнимая часть задает сечение реакций переходов e^+e^- и электрон–антинейтрино в адроны.) Как мы уже видели в § 20.5, эта сумма получает вклады, которые ведут себя как q^2 (преобразование Фурье x^{-6}) от единичного оператора, вклады, которые ведут себя как q^{-2} от оператора $F_\alpha^{\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu}$, вклады порядка q^{-4} от четырехфермионных операторов и т. д. (Например, вклад оператора $F_\alpha^{\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu}$ возникает из диаграмм типа рис. 20.3 с импульсом, протекающим по цепочке пузырей, гораздо меньшим, чем q .) Анализ размерностей говорит нам, что эти факторы, зависящие от импульсов, должны сопровождаться вакуумными матричными элементами, пропорциональными Λ^0 , Λ^4 , Λ^6 и т. д. Но если вычислять фейнмановские диаграммы, используя бегущую константу связи, определенную на масштабе энергий $\mu \gg \Lambda$, где константа связи мала, то, согласно уравнению (18.7.7),

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp\left(\frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\alpha_s(\mu)}\right), \quad (20.7.18)$$

где n_f — число ароматов кварков с массой, гораздо меньшей μ . Операторы размерности $d > 0$ дадут вклад в операторное разложение с зависимостью от константы связи:

$$\Lambda^d \propto \exp\left(\frac{6\pi d}{(33 - 2n_f)\alpha_s(\mu)}\right). \quad (20.7.19)$$

В квантовой хромодинамике теория возмущений дает ряд по степеням $\alpha_s \equiv g^2/4\pi$, а не g , так что можно переписать выражения (20.7.1) и (20.7.3), используя величину α_s :

$$F(\alpha_s) = \sum_n f_n \alpha_s^n, \quad (20.7.20)$$

$$\alpha_s F(\alpha_s) = \int_0^\infty \exp(-z/\alpha_s) B(z) dz. \quad (20.7.21)$$

Наличие в $\prod^{\mu\nu}$ членов с зависимостью от константы связи (20.7.19) показывает, что функция $B(z)$ должна иметь особенности (не обязательно полюсы) при

$$z_1 = \frac{6\pi d}{(33 - 2n_f)}. \quad (20.7.22)$$

Эти точки находятся на положительном луче действительной оси и вносят в интеграл (20.7.21) неопределенность. Таким образом, борелевское суммирование не может быть использовано при работе с низкoэнергетическими эффектами в квантовой хромодинамике.

Тот факт, что диаграммы с малыми виртуальными импульсами мешают использованию теории возмущений, не содержит в себе ничего нового. Как уже было сказано в § 20.2, идея операторного разложения состояла в том, чтобы отделить части фейнмановских диаграмм, в которых каждая линия переносит большой импульс и которые в асимптотически свободных теориях могут быть вычислены с использованием теории возмущений, от вкладов частей фейнмановских диаграмм, через которые протекают малые импульсы и которые не могут быть вычислены пертурбативно.

Приложение А. Общий случай асимптотики больших импульсов

В приложении будет рассмотрено асимптотическое поведение амплитуд произвольной перенормируемой теории поля при стремлении импульса, соответствующего двум или большему количеству внешних линий, к бесконечности. При этом будут рассматриваться операторы размерности не выше N , содержащие произвольное количество полей и производных. Для исследования этой задачи мы введем обозначения, более удобные, чем обозначения § 20.1 и § 20.2. Буквами l, l' и т. д. мы будем обозначать набор внешних линий i описанного вида, входящих или исходящих из фейнмановской диаграммы или ее части. Буквами k, k' и т. д. будем обозначать наборы 4-импульсов k_i , соответствующие указанным выше линиям, причем должно выполняться условие равенства их суммы некоторому фиксированному значению p . Амплитуда $\Gamma_{l,l'}(k, k', p)$ является суммой по всем графам с входящими линиями l , несущими импульсы k , и исходящими линиями l' с импульсами k' . При этом неотдельный пропагатор ставится в соответствие входящим линиям l , а исходящим l' .

В § 12.1 с помощью теоремы о подсчете степеней было показано, что область интегрирования, в которой импульс в степени k проходит только через подграф с внешними линиями l и l' , дает вклад в $\Gamma_{l,l'}(k, k', p)$ порядка $k^{d(l,l')}$. При этом $d(l, l')$ — размерность этого

подграфа в единицах массы или импульса:

$$d(l, l'') = 4 - \sum_{i \in l, l''} (1 + s_i) - \sum_{i \in l} (2 - 2s_i). \quad (20.A.1)$$

(Последний член в уравнении (20.A.1) появляется из пропагаторов, соответствующих линиям в наборе l .) Удобно переписать (20.A.1) в виде

$$d(l, l') = 4 - 4n(l) - N(l') + N(l), \quad (20.A.2)$$

где $n(l)$ — число линий в наборе l , а $N(l)$ — суммарная размерность полей из этого набора:

$$n(l) \equiv \sum_{i \in l} 1, \quad N(l) \equiv \sum_{i \in l} (s_i + 1). \quad (20.A.3)$$

Здесь s_i — “спин” поля, соответствующего линии i , в смысле, определенном в § 12.3: размерность поля, соответствующего линии i , равна $1 + s_i$, недетый пропагатор такого поля ведет себя как k^{-2+2s_i} . (Для скаляров и калибровочных бозонов $s_i = 0$, для частиц со спином $1/2$ $s_i = 1/2$.)

Принимая во внимание асимптотическое поведение, соответствующее этим подграфам, мы хотим показать, что при $k \rightarrow \infty$ (при этом все компоненты импульса стремятся к бесконечности одновременно, в произвольных направлениях) и при фиксированных k' и p асимптотическое поведение $\Gamma_{l,l'}(k, k', p)$ в произвольном порядке теории возмущений имеет вид

$$\Gamma_{ll'}(k, k', p) \rightarrow \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} U_{\mathcal{O}}^l(k) F_{\mathcal{O},l'}(k', p) + o(k^{4-4n(l)+N(l)-N}), \quad (20.A.4)$$

причем суммирование идет по операторам $\mathcal{O}$ с размерностью $N(\mathcal{O}) \leq N$, функция $U_N^l(\mathcal{O})$ ведет себя как $k^{4+N(l)-4n(l)-N(N(\mathcal{O}))}$. Здесь $o(k^A)$ обозначает члены, которые стремятся к нулю быстрее чем k^A , по крайней мере в $1/k$ раз.

Чтобы исключить вклад операторов с размерностью, меньшей N , введем N -неприводимую амплитуду $I_{ll'}^N(k, k', p)$ как сумму всех таких графов из $\Gamma_{l,l'}(k, k', p)$, в которых нельзя отделить линии из набора l от линий из набора l' с помощью разреза какого-либо набора l'' внутренних линий с $N(l'') \leq N$. Так как разность $\Gamma - I^N$ состоит из графов, которые могут быть разрезаны таким образом, то

$$\Gamma_{ll'}(k, k', p) - I_{ll'}^N(k, k', p) = \sum_{l''}^{(N)} \int dk'' I_{ll''}^N(k, k'', p) \Gamma_{l''l'}(k'', k', p), \quad (20.A.5)$$

где $\sum_{l''}^{(N)}$ обозначает сумму по всем наборам l'' линий с $N(l'') \leq N$, а $\int dk''$ обозначает интеграл по компонентам 4-импульса в наборе l'' при условии, что сумма этих импульсов равна p .

Асимптотическое поведение ядра $I_{ll''}^N(k, k'', p)$ намного проще поведения $\Gamma_{ll''}(k, k'', p)$. Для $k \rightarrow \infty$ при фиксированных k'' и p наибольший вклад в него дает область интегрирования, в которой каждая линия несет импульс порядка k , при этом его асимптотическое поведение имеет вид $k^{d(l, l')}$ так как члены, в которых только некоторая подобласть несет такой большой импульс, будет связана с остальной частью графа мостом l''' , состоящим из линий с $N(l''') > N \geq N(l'')$ и, таким образом, будет меньше за счет множителя $k^{N(l''')-N-1}$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, дифференцирование $I_{ll''}^N(k, k', p)$ по любой из компонент k' или p будет уменьшать его асимптотику в $k^{d(l, l'')-1}$ раз. Но дифференцирование d раз уменьшит асимптотику до $k^{d(l, l'')-d}$, только если $d \leq N - N(l'') + 1$, так как для старших производных мы будем иметь большой вклад от областей интегрирования, в которых подграф, несущий импульс порядка k , будет связан с остальным графом мостом l''' с полной размерностью, большей N , с производными, действующими только на линии с импульсом порядка p или k'' . Следовательно, чтобы принять во внимание вклад операторов, содержащих производные полей, мы можем записать асимптотическое поведение I^N в виде

$$I_{ll''}^N(k, k'', p) = \sum_{\nu: d_\nu + N(l'') \leq N} I_{ll''\nu}^N(k) P_{l''\nu}(k'', p) + o(k^{d(l, l'')-N+N(l'')}). \quad (20.A.6)$$

Здесь $P_{l''\nu}(k'', p)$ — полный набор однородных полиномов степеней d_ν , зависящих от $n(l'')$ импульсов k'' и от p , а $I_{ll''\nu}^N(k)$ — функции только от k , ведущие себя как $k^{d(l, l'')-d}$ при $k \rightarrow \infty$.

Мы не можем сразу использовать уравнение (20.A.6) в уравнении (20.A.5), так как в интеграл по k'' важный вклад вносит область интегрирования, где некоторые из k'' имеют тот же порядок, что и k . Чтобы убедиться в этом, используем математическую индукцию: предположим, что уравнение (20.A.4) выполняется вплоть до какого-то конкретного порядка теории возмущений, тогда можно использовать правую часть уравнения (20.A.5) для вычисления асимптотического поведения Γ в следующем порядке теории возмущений. Перепишем уравнение (20.A.5) в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{ll'}(k, k', p) &= I_{ll'}^N(k, k', p) + \\ &+ \sum_{l''}^{(N)} \int dk'' I_{ll''}^N(k, k'', p) \left[\Gamma_{l''l'}(k'', k', p) - \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} U_{\mathcal{O}}^{l''}(k'') F_{\mathcal{O}, l'}(k', p) \right] + \\ &+ \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} F_{\mathcal{O}, l'}(k', p) \sum_{l'': N(l'') \leq N} \int dk'' I_{ll''}^N(k, k'', p) U_{\mathcal{O}}^{l''}(k''). \end{aligned} \quad (20.A.7)$$

Согласно уравнению (20.A.4) величина в квадратных скобках во втором члене правой части уравнения (20.A.7) стремится к нулю при

$k'' \rightarrow \infty$ быстрее, чем $(k'')^{4-4n(l'')+N(l'')-N}$, таким образом произведение этой величины на полином $P_{l''\nu}(k'')$ степени $\nu \leq N - N(l'')$ стремится к нулю быстрее, чем $(k'')^{4-4n(l'')}$, и, следовательно, интеграл от него по $4(n(l'') - 1)$ независимым компонентам k''^1 конечен. Таким образом, можно использовать для этого члена уравнение (20.A.6), в результате чего получим:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ll'}(k, k', p) \rightarrow & \sum_{\nu: d_\nu + N(l') \leq N} I_{ll'\nu}^N(k) P_{l'\nu}(k', p) + \\ & + \sum_{l''}^{(N)} \sum_{\nu: d_\nu + N(l'') \leq N} I_{ll''\nu}^N(k) \int dk'' P_{l''\nu}(k'', p) \times \\ & \times \left[\Gamma_{l''l'}(k'', k', p) - \sum_{\theta}^{(N)} U_{\theta}^{l''}(k'') F_{\theta, l'}(k', p) \right] + \\ & + \sum_{\theta}^{(N)} F_{\theta, l'}(k', p) \sum_{l''}^{(N)} \int dk'' I_{ll''}^N(k, k'', p) U_{\theta}^{l''}(k''), \quad (20.A.8) \end{aligned}$$

причем поправка оказывается меньше выписанных членов на множитель $1/k$. (Конечно, первый член в правой части уравнения (20.A.8) существует только при $N(l') \leq N$.)

Таким образом, для всех значений l и ν с $d_\nu + N(l) \leq N$ существует оператор $\mathcal{O}$, который включает поля, соответствующие линиям из l , и d_ν производных, так что в нулевом приближении теории возмущений вершинная функция (с входящим импульсом p , внесенным оператором $\mathcal{O}$, и исходящим импульсом, уносимым внешними линиями l) является полиномом $P_{l,\nu}(k, p)$. Тогда полная вершинная функция для перенормированного оператора $\mathcal{O}_R = \sum_{\theta'} Z_{\theta, \theta'} \mathcal{O}'$ равна

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{O}, l}(k, p) = \sum_{\theta'} Z_{\theta, \theta'} \left\{ \delta_{l_{\theta'}, l} P_{l_{\nu_{\theta'}}}(k, p) + \right. \\ \left. + \int dk' P_{l_{\theta'}, \nu_{\theta'}}(k', p) \Gamma_{l_{\theta'}, l}(k', k, p) \right\}, \quad (20.A.9) \end{aligned}$$

где l_{θ} и ν_{θ} обозначают типы полей и производные по пространственно-временным координатам в операторе $\mathcal{O}$. Мы видим, что урав-

¹⁾ При этом мы не учитываем возможность того, что, хотя подсчет степеней говорит нам, что интеграл во втором члене правой части уравнения (20.A.7) сходится в области интегрирования, в которой все k'' одновременно стремятся к бесконечности, все же при $n(l'') \geq 3$ интеграл может разойтись на некоторой подобласти интегрирования. По этой причине рассуждения из этого приложения не дают доказательства операторного разложения, за исключением простого случая, рассмотренного в § 20.2, где мы рассмотрели ситуацию, когда импульсы только двух внешних линий стремятся к бесконечности и мы следили за членами в степенных рядах, связанными с операторами, квадратичными по полям.

нение (20.A.4) выполняется при

$$U_{\mathcal{O}}^l(k) = \sum_{\mathcal{O}'}^{(N)} I_{l\mathcal{O}'}^N(k) \left[Z_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}^{-1} - \int dk'' U_{\mathcal{O}}^l(k'') P_{\mathcal{O}'}(k'') \right] + \\ + \sum_{l''}^{(N)} \int dk'' I_{ll''}^N(k, k'') U_{\mathcal{O}}^l(k''), \quad (20.A.10)$$

где использованы обозначения

$$I_l(k) \equiv I_{ll\nu_{\mathcal{O}}}(k), \quad P_{\mathcal{O}}(k) \equiv P_{l\nu_{\mathcal{O}}}(k). \quad (20.A.11)$$

(Зависимость $\Gamma_{l\mathcal{O}''l'}$ опущена по причине, указанной в § 20.2: здесь p пренебрежимо мало по сравнению с k , независимо от соотношения k'' и k .) Определим нормировочную постоянную $Z_{\mathcal{O}',\mathcal{O}}$ так, чтобы в точке нормировки $k(\mu)$, $p(\mu)$ функция $F_{\mathcal{O},l}(k(\mu), p(\mu))$ принимала такое же значение $\delta_{l,l\mathcal{O}} P_{\mathcal{O}}(k(\mu), p(\mu))$, какое она имела бы в отсутствие взаимодействия:

$$\delta_{l,l\mathcal{O}} P_{\mathcal{O}}(k(\mu), p(\mu)) = F_{\mathcal{O},l}(k(\mu), p(\mu)) = \sum_{\mathcal{O}'} Z_{\mathcal{O},\mathcal{O}'} \times \\ \times \left\{ \delta_{l\mathcal{O}',l} P_{l\nu_{\mathcal{O}'}}(k(\mu), p(\mu)) + \int dk' P_{l\mathcal{O}'\nu_{\mathcal{O}'}}(k', p(\mu)) \Gamma_{l\mathcal{O}',l}(k', k(\mu), p(\mu)) \right\}. \quad (20.A.12)$$

Для $\gamma = 0$ это уравнение имеет решение $Z = 1$, которое единственно (вследствие того, что полиномы, соответствующие выбранному набору линий, предполагаются линейно независимыми), следовательно, по непрерывности, уравнение (20.A.12) имеет единственное решение для констант связи в некоторой конечной области. Уравнение (20.A.10), таким образом, дает нам рекуррентное определение коэффициентных функций $U_{\mathcal{O}}^l(k)$, появляющихся в операторном разложении общего вида (20.A.4).

Задачи

1. Рассмотрите теорию фермионного поля ψ и скалярного поля ϕ с взаимодействиями вида: $\bar{\psi}\psi$ и ϕ^4 . Перечислите операторы, входящие в операторное разложение величины $\bar{\psi}(x)\psi(0)$ с коэффициентными функциями, которые в рамках теории возмущений не исчезают и являются сингулярными при $x \rightarrow 0$. Как вы будете вычислять эти функции в однопетлевом приближении?

2. Рассмотрите квантовую хромодинамику с N безмассовыми кварками и определите спектральные функции для скалярной и псевдоскалярной квадратичных комбинаций полей кварков:

$$\sum_N \langle \text{BAK} | \bar{\psi}(0) \lambda_{\alpha} \psi(0) | \text{BAK} \rangle \langle \text{BAK} | \bar{\psi}(0) \lambda_{\beta} \psi(0) | \text{BAK} \rangle^* = \\ = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \rho_{\alpha\beta}^S(-p^2),$$

$$\sum_N \langle \text{BAK} | \bar{\psi}(0) \gamma_5 \lambda_\alpha \psi(0) | \text{BAK} \rangle \langle \text{BAK} | \bar{\psi}(0) \gamma_5 \lambda_\beta \psi(0) | \text{BAK} \rangle^* = \\ = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \rho_{\alpha\beta}^P(-p^2),$$

где λ_α — полный набор безследовых эрмитовых матриц размера $N \times N$, нормированных так, что $\text{Tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}$. Каким правилам сумм для спектральных функций подчиняются линейные комбинации $\rho_{\alpha\beta}^S(\mu^2)$ и $\rho_{\alpha\beta}^P(\mu^2)$?

3. Выведите уравнение (20.6.8) в рамках партонной модели из формул (8.7.7) и (8.7.38) для комптоновского рассеяния.

4. Перечислите калибровочно-инвариантные симметричные бесследовые тензоры твиста 4 в квантовой хромодинамике.

5. В каком месте на комплексной плоскости функция (20.7.3) для теории безмассового скалярного поля с взаимодействием $-g\phi^4/24$ (при $g > 0$) будет иметь сингулярность — ренормалон?

Литература

1. *Wilson K.* // Phys. Rev. **179**, 1499 (1969).
2. *Zimmerman W.* Лекции по элементарным частицам и квантовой теории поля — 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, eds. S. Deser, H. Pendleton, M. Grisaru (MIT Press, Cambridge, 1970).
3. *Weinberg S.* // Phys. Rev. **118**, 838 (1960).
4. *Bernard C., Duncan A., LoSecco J., Weinberg S.* // Phys. Rev. **D12**, 792 (1975).
5. *Weinberg S.* // Phys. Rev. Lett. **18**, 507 (1967). Общий случай см. ссылку 4.
6. *Kawarabayashi K., Suzuki M.* Phys. Rev. Lett. **16**, 255 (1966); *Riazuddin и Fayyazuddin*, Phys. Rev. **147**, 1071 (1966).
7. *Ademollo M., Veneziano G., Weinberg S.* // Phys. Rev. Lett. **22**, 83 (1969).
8. *Donoghue J.F., Golowich E.* // Phys. Rev. **D49**, 1513 (1994).
9. Этот результат был объявлен на “Рочестерской” конференции в Вене в 1968 г. и опубликован в *Bloom E.D. et al.* // Phys. Rev. Lett. **23**, 930 (1969); *Breidenbach M. et al.* // Phys. Rev. Lett. **23**, 935 (1969).
10. *Bjorken J.D.* // Phys. Rev. **179**, 1547 (1969).
11. *Feynman R.P.* // Phys. Rev. Lett. **23**, 1415 (1969); Photon-Hadron Interactions (Benjamin, N.Y., 1972).

12. *Callan C.G., Gross D.J.* // Phys. Rev. Lett. **22**, 156 (1969). Читатель должен иметь в виду, что символ ω , использованный Калланом и Гроссом, в обозначениях этой книги имеет вид $2/\omega$.
13. *Gross D., Treiman S.* // Phys. Rev. **D4**, 1059 (1971).
14. *Christ N., Hasslacher B., Mueller A.H.* // Phys. Rev. **D6**, 3543 (1972).
15. *Altarelli G., Parisi G.* // Nucl. Rev. **B126**, 298 (1972).
16. *Georgi H., Politzer H.D.* // Phys. Rev. **D9**, 416 (1974).
17. *Gross D.J., Wilczek F.* // Phys. Rev. **D9**, 980 (1974).
18. *Dyson F.J.* // Phys. Rev. **85**, 631 (1952).
19. См., например: *Hardy G.N.* // Divergent Series (Oxford University Press, Oxford, 1949). [*Рус. пер.: Харди Г.Х. Расходящиеся ряды.* — М.: Изд-во иностранной литературы, 1951.]
20. *Lipatov L.N.* // Leningrad Nuclear Physics Institute report, 1976 (unpublished); Proceedings of the XVIII International Conference on High Energy Physics at Tbilisi, 1976.
21. 't Hooft G., в The Whys of Subnuclear Physics — Proceedings of the 1977 Erice Summer School, ed. A. Zichichi (Plenum, N.Y., 1978). Для ссылок на статьи о ренормалонах и высших порядках теории возмущений см.: Large Order Behavior of Perturbation Theory, eds. J.C. Le Guillou и J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1990). В качестве ссылок на дальнейшие работы об инфракрасных ренормалонах см.: *Mueller A.H.* // Phys. Rev. Lett. **B 308**, 355 (1993); Nucl. Phys. **B250**, 327 (1995); *Duncan A., Pernice S.* // Phys. Rev. **D 51**, 1956 (1995), а также статьи, цитированные в этих ссылках.
22. *Lautrup B.* // Phys. Lett. **76B**, 109 (1977).

СПОНТАННО НАРУШЕННЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ

Доказанная в 1961 г. теорема Голдстоуна [1], согласно которой нарушение симметрии влечет возникновение безмассовых голдстоуновских бозонов с нулевым спином, сначала рассматривалась как серьезный аргумент против существования в природе нарушенных симметрий. Однако через несколько лет рядом авторов были указаны исключения из этой теоремы, уже упоминавшиеся в §19.2: голдстоуновские бозоны не появляются, если нарушается локальная, а не глобальная симметрия [2]. Вместо них новые степени свободы оказываются принадлежащими состояниям с нулевой спиральностью векторных частиц, соответствующих нарушенной локальной симметрии; последние, таким образом, приобретают массу. Такое явление, известное как механизм Хиггса, долгое время не использовалось для построения реалистичных теорий (возможно, поскольку в середине 60-х годов стало ясно, что пион является голдстоуновским бозоном, соответствующим спонтанно нарушенной приближенной симметрии, и исключение голдстоуновских бозонов перестало рассматриваться как первоочередная задача). Однако впоследствии выяснилось, что спонтанное нарушение калибровочной симметрии дает естественную основу для построения теории слабых и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц [3].

§ 21.1. Унитарная калибровка

В гл. 19 мы видели, что в теории с группой глобальной симметрии G , спонтанно нарушенной до подгруппы H , каждой нарушенной симметрией степени свободы соответствует безмассовый голдстоуновский бозон, а именно: массовая матрица M_{nm}^2 для действительных бесспиновых полей $\phi_n(x)$ имеет собственный вектор $\sum_m (t_\alpha)_{nm} v_m$ с нулевым собственным значением для каждого независимого генератора t_α нарушенной симметрии в группе G . (Мы рассматриваем случай, когда голдстоуновские бозоны включаются в число элементарных бесспиновых частиц, представленных входящими в лагранжиан скалярными или псевдоскалярными полями ϕ_n ; более общая ситуация обсуждается в § 21.4.) Мы также выяснили, что в результате G -преобразования $\gamma^{-1}(x)$ полей,

$$\tilde{\phi}_n(x) = \sum_m \gamma_{nm}^{-1}(x) \phi_m(x), \quad (21.1.1)$$

голдстоуновские моды можно исключить, сделав новые поля ортогональными голдстоуновским направлениям¹⁾:

$$0 = \sum_{nm} \tilde{\phi}_n(x) (t_\alpha)_{nm} v_m, \quad (21.1.2)$$

где v_n — вакуумные средние, $v_n \equiv \langle \phi_n(0) \rangle_{\text{ВАК}}$. После такого вращения, когда равенство (21.1.2) оказывается выполненным, голдстоуновские бозонные поля появляются в виде переменных в пространстве–времени параметров преобразования $\gamma(x)$. Смысл такой процедуры в том, что ввиду инвариантности лагранжиана относительно преобразования (21.1.1) с постоянным $\gamma(x)$, вся зависимость лагранжиана от $\gamma(x)$ должна сводиться к зависимости от производных $\gamma(x)$.

С другой стороны, если лагранжиан инвариантен не только относительно постоянных, но и относительно переменных в пространстве–времени G -преобразований, то (21.1.1) является точной симметрией теории. При этом лагранжиан вообще не может зависеть от $\gamma(x)$, и потому поля $\phi(x)$ можно всюду заменить на $\tilde{\phi}(x)$. Это соответствует выбору *калибровки* за счет наложения условий (21.1.2) на поля $\tilde{\phi}(x)$, а не на сами калибровочные поля. Например, в электродинамике заряженного скалярного поля $\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2$ мы можем выбрать калибровку (типа лоренцевой или кулоновской) за счет наложения условий $\partial_\mu A^\mu = 0$ или $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Можно, однако, зафиксировать калибровку и посредством выбора условий для ϕ — в частности, потребовав действительности ϕ (иначе говоря, повернув вектор $(\text{Re } \phi, \text{Im } \phi)$ в направлении 1). Калибровка, определяемая соотношением (21.1.2), называется *унитарной* [3а], поскольку она позволяет особенно легко видеть, что в теории отсутствуют степени свободы с отрицательной вероятностью (типа времениподобных калибровочных бозонов). Вообще, в этой калибровке все имеющиеся в теории физические частицы присутствуют явным образом.

Соотношение (21.1.2) показывает, что голдстоуновских бозонных полей в унитарной калибровке нет. Поскольку теория является калибровочно инвариантной, из этого следует, что физические голдстоуновские бозоны не появляются ни при каком выборе калибровки. Как обстоит дело с векторными бозонами? Если ϕ_n — элементарные, стандартным образом нормированные скалярные поля, лагранжиан обязан содержать слагаемое

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \sum_n \left(\partial_\mu \tilde{\phi}_n - i \sum_{m,\alpha} t_{nm}^\alpha A_{\alpha\mu} \tilde{\phi}_m \right)^2, \quad (21.1.3)$$

где суммирование производится по всем генераторам t_α калибровочной группы G . (Ниже мы будем всюду опускать тильды; подразумева-

¹⁾ Мы работаем с действительным (приводимым или неприводимым) представлением алгебры симметрий, в котором матрицы it_α действительны. Переход к комплексному случаю описан ниже.

ется, что мы уже перешли в данном разделе к унитарной калибровке.) Предположим, что G -симметрия нарушена ненулевым вакуумным средним v_n поля ϕ_n . Для того чтобы найти спектр частиц, введем поле ϕ' согласно

$$\phi_n \equiv v_n + \phi'_n. \quad (21.1.4)$$

(Часто оказывается удобным выбрать v_n в (21.1.2) и (21.1.4) равным вакуумному среднему в древесном приближении. Для построения удобной теории возмущений необходимо лишь, чтобы величина v_n совпадала с вакуумным средним в главном порядке.) Раскладывая (21.1.3) до второго порядка по ϕ' и A , получаем

$$\mathcal{L}_{\phi, \text{квэд}} = -\frac{1}{2} \sum_n \left(\partial_\mu \phi'_n - i \sum_{m, \alpha} t_{nm}^\alpha A_{\alpha\mu} v_m \right)^2. \quad (21.1.5)$$

Из (21.1.2) следует, что перекрестные $\phi' - A$ члены обращаются в нуль, и в результате имеем

$$\mathcal{L}_{\phi, \text{квэд}} = -\frac{1}{2} \sum_n \partial_\mu \phi'_n \partial^\mu \phi'_n - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 A_{\alpha\mu} A_\beta^\mu, \quad (21.1.6)$$

где

$$\mu_{\alpha\beta}^2 \equiv - \sum_{nm} t_{nm}^\alpha t_{nl}^\beta v_m v_l. \quad (21.1.7)$$

После добавления квадратичных членов лагранжиана Янга–Миллса, $-(1/4)F_{\alpha\mu\nu}F_{\alpha}^{\mu\nu}$, получаем, что массовая матрица векторных частиц равна $\mu_{\alpha\beta}^2$. В наших обозначениях генераторы t_{nm}^α пропорциональны константам калибровочных взаимодействий. Согласно (21.1.7) массы векторных бозонов пропорциональны этим константам связи.

Выясним некоторые алгебраические свойства $\mu_{\alpha\beta}^2$. Поскольку генераторы t_{mn}^α являются чисто мнимыми и антисимметричными (а следовательно, эрмитовыми), матрица $\mu_{\alpha\beta}^2$ действительна, симметрична и неотрицательно определена. Далее, если некоторая линейная комбинация $\sum_\alpha c_\alpha t_\alpha$ соответствует ненарушенной симметрии, то

$$\sum_{\alpha, m} c_\alpha (t_\alpha)_{nm} v_m = 0 \quad (21.1.8)$$

и, как указал Киббл [2], из определения (21.1.7) следует равенство

$$\sum_\beta \mu_{\alpha\beta}^2 c_\beta = 0. \quad (21.1.9)$$

Это означает, что каждой ненарушенной калибровочной симметрии по-прежнему соответствует безмассовый калибровочный бозон. Верно и обратное: из (21.1.7) следует, что для произвольного набора действительных постоянных c_α

$$\sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 c_\alpha c_\beta = \sum_n \left(\sum_{\alpha, m} c_\alpha \cdot i t_{nm}^\alpha v_m \right)^2 \geq 0, \quad (21.1.10)$$

причем равенство достигается лишь при выполнении условий (21.1.8).

В частности, если имеется лишь одна ненарушенная симметрия $\sum_{\alpha} c_{\alpha} t_{\alpha}$, то произвольное калибровочное поле можно представить в виде

$$A_{\alpha}^{\mu} = c_{\alpha} A^{\mu} + \dots, \quad (21.1.11)$$

где многоточие означает некоторую линейную комбинацию калибровочных полей с определенными ненулевыми массами, а c_{α} — коэффициент при t^{α} в разложении единственного генератора ненарушенной симметрии q ,

$$q = \sum_{\alpha} c_{\alpha} t_{\alpha}, \quad (21.1.12)$$

так что поле A^{μ} войдет с нулевым коэффициентом в массовый член

$$-\frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 A_{\alpha}^{\mu} A_{\mu\beta}.$$

Чтобы коэффициент при $-(1/4)(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu})^2$ в кинетической части калибровочного лагранжиана

$$-\frac{1}{4} \sum_{\alpha} (\partial_{\mu} A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} A_{\alpha\mu})^2$$

имел стандартное значение 1, должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}^2 = 1. \quad (21.1.13)$$

Отметим, что q — заряд, с которым взаимодействует A^{μ} , т. е.

$$\sum_{\alpha} t_{\alpha} A_{\alpha}^{\mu} = q A^{\mu} + \dots, \quad (21.1.14)$$

где многоточие снова означает сумму по массивным калибровочным полям. Мы воспользуемся этими общими результатами при изучении электрослабой теории в § 21.3.

Полученные выше формулы справедливы для скалярных полей, образующих действительное представление калибровочной группы, однако они допускают непосредственное обобщение на случай комплексного представления. В § 19.6 мы видели, что комплексное скалярное поле $\chi(x)$, принадлежащее представлению калибровочной группы с эрмитовыми генераторами T_{α} , может быть записано в виде пары действительных полей:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \text{Re } \chi(x) \\ \text{Im } \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (21.1.15)$$

доставляющих действительное представление калибровочной группы с генераторами

$$it^{\alpha} = \begin{pmatrix} -\text{Im } T^{\alpha} & -\text{Re } T^{\alpha} \\ \text{Re } T^{\alpha} & -\text{Im } T^{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (21.1.16)$$

После подстановки (21.1.15) и (21.1.16) в (21.1.7) для массовой матрицы векторных бозонов получим выражение

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = \text{Re}(\langle\chi\rangle_{\text{ВАК}}^\dagger, T_\alpha T_\beta \langle\chi\rangle_{\text{ВАК}}) = \frac{1}{2} (\langle\chi\rangle_{\text{ВАК}}^\dagger, \{T_\alpha, T_\beta\} \langle\chi\rangle_{\text{ВАК}}). \quad (21.1.17)$$

Рассмотрим теперь пропагатор векторного поля. Учитывая квадратичное слагаемое в лагранжиан Янга–Миллса, получаем, что квадратичная по A часть полного лагранжиана есть

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \sum_{\alpha} (\partial_{\lambda} A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} A_{\alpha\lambda})^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 A_{\alpha\lambda} A_{\beta}^{\lambda} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha}^{\nu} \mathcal{D}_{\alpha\nu,\beta\lambda}(\partial) A_{\beta}^{\lambda} + \text{полные производные}, \end{aligned} \quad (21.1.18)$$

где

$$\mathcal{D}_{\alpha\nu,\beta\lambda}(\partial) = \delta_{\alpha\beta} [\eta_{\nu\lambda} \square - \partial_{\nu} \partial_{\lambda}] - \mu_{\alpha\beta}^2 \eta_{\nu\lambda}. \quad (21.1.19)$$

Предположим для простоты, что все калибровочные симметрии нарушены, так что у матрицы $\mu_{\alpha\beta}^2$ нет нулевых собственных значений. В соответствии с приведенными в § 9.4 общими правилами, пропагатор калибровочного поля имеет в импульсном представлении вид

$$\Delta_{\alpha\nu,\beta\lambda}(k) = -(\mathcal{D}^{-1})_{\alpha\nu,\beta\lambda}(ik) = [(k^2 + \mu^2)^{-1} (\eta_{\nu\lambda} + \mu^{-2} k_{\nu} k_{\lambda})]_{\alpha\beta}. \quad (21.1.20)$$

Ввиду наличия членов $k_{\nu} k_{\lambda}$, пропагатор имеет асимптотическое поведение $\Delta(k) \sim O(k^0)$, и мы не можем воспользоваться простым подсчетом степеней для доказательства перенормируемости. К счастью, существует другая калибровка, в которой перенормируемость теории становится очевидной (но вопрос об имеющихся в теории частицах уже не столь прост). Мы рассмотрим ее в следующем параграфе.

* * *

Важно отметить, что хотя голдстоуновские бозоны вдруг снова появляются в пределе нулевых констант калибровочных взаимодействий, физические матричные элементы непрерывны в этом пределе. Этот факт связан с тем, что в унитарной калибровке калибровочные бозоны не становятся полностью невзаимодействующими при нулевых значениях констант калибровочных взаимодействий. Рассмотрим процесс рассеяния $A + B \rightarrow C + D$, где A и C принадлежат некоторому фиксированному представлению калибровочной алгебры, а B и D — некоторому другому ее представлению. Элемент S -матрицы для такого процесса содержит вклад от обмена векторным бозоном:

$$\begin{aligned} S_{CD,AB} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) \times \\ \times \langle C | J_{N_{\alpha}}^{\nu} | A \rangle \Delta_{\alpha\nu,\beta\lambda}(k) \langle D | J_{N_{\beta}}^{\lambda} | B \rangle, \end{aligned} \quad (21.1.21)$$

где $k = p_A - p_C = p_D - p_B$, а $J_{N\alpha}^\nu$ — ток, с которым взаимодействуют калибровочные бозоны (индекс N напоминает, что вклад полюса, соответствующего голдстоуновскому бозону, опускается). Этот ток пропорционален константам калибровочных взаимодействий, и в пределе нулевых констант связи в (21.1.21) остаются лишь слагаемые, содержащие матрицу μ^{-2} (которая сингулярна в этом пределе). Поэтому для нулевых констант калибровочных взаимодействий элемент S -матрицы равен

$$S_{CD,AB} \rightarrow i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) \times \\ \times k_\nu k_\lambda (\mu^{-2})_{\alpha\beta} \langle C | J_{N\alpha}^\nu | A \rangle \frac{1}{k^2} \langle D | J_{N\beta}^\lambda | B \rangle. \quad (21.1.22)$$

Константы связи, входящие в токи, сокращаются за счет констант связи, входящих в матрицу μ^2 .

Сравним теперь этот результат с вкладом от обмена голдстоуновскими бозонами. Для нулевых констант калибровочных взаимодействий имеется набор голдстоуновских бозонов B_α , соответствующих генераторам t_α (для простоты предполагаем, что калибровочная симметрия полностью нарушена). Лагранжиан содержит кинетическую часть

$$-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_\alpha \partial^\mu \phi_\beta \sum_n Z_{\alpha n} Z_{\beta n},$$

где $Z_{\gamma n}$ — компонента голдстоуновского бозона B_α , входящая в бесспиновое поле ϕ_n (см. (19.2.39)). Чтобы голдстоуновские бозонные поля были нормированы стандартным образом, должно выполняться соотношение

$$\sum_n Z_{\alpha n} Z_{\beta n} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (21.1.23)$$

Согласно (19.2.49), константа связи, соответствующая взаимодействию голдстоуновского бозона B_α с токами $J_{N\beta}^\mu$, равна $F_{\alpha\beta}^{-1}$, где $F_{\alpha\beta}$ — константа связи, соответствующая взаимодействию голдстоуновского бозона для генератора t_α с током $J_{N\beta}^\nu$, определенная в (19.2.38). Следовательно, вследствие обмена голдстоуновскими бозонами матричный элемент для рассматриваемого процесса рассеяния принимает вид

$$S_{CD,AB} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) \times \\ \times k_\nu k_\lambda F_{\alpha\gamma}^{-1} F_{\beta\gamma}^{-1} \langle C | J_{N\alpha}^\nu | A \rangle \frac{1}{k^2} \langle D | J_{N\beta}^\lambda | B \rangle. \quad (21.1.24)$$

Из формул (19.2.40), (21.1.7) и (21.1.23) получаем для массовой матрицы векторных бозонов выражение

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = \sum_n F_{\alpha\gamma} Z_{\gamma n} F_{\beta\delta} Z_{\delta n} = F_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma}, \quad (21.1.25)$$

так что в пределе нулевых констант калибровочных взаимодействий матричные элементы (21.1.22) и (21.1.24), соответствующие обмену калибровочными и голдстоуновскими бозонами, совпадают. Приведенное рассуждение можно обратить: условие непрерывности амплитуд при нулевых значениях калибровочных констант связи позволяет получить формулу для масс калибровочных бозонов даже в случае, когда все остальные взаимодействия являются сильными.

§ 21.2. Перенормируемые ξ -калибровки

В 1971 г. 'т Хофт [4] показал, что функциональные интегралы в калибровочных теориях со спонтанным нарушением симметрии можно вычислять в такой калибровке, где пропагаторы векторных бозонов стремятся при больших значениях импульса $k \rightarrow \infty$ к нулю как k^{-2} . Такие теории удовлетворяют стандартному тесту на перенормируемость, связанному с подсчетом степеней (см. § 12.2). Ниже мы опишем более широкий (индексруемый параметром ξ) класс перенормируемых калибровок, введенный несколько позднее Фуджикавой, Ли и Санда [5].

В общей калибровке кинетический член (21.1.3) в лагранжиане скалярных полей теории содержит перекрестное слагаемое

$$i \sum_{nm\alpha} \partial_\mu \phi'_n t_{nm}^\alpha A_\alpha^\mu v_m,$$

где v_m — вакуумное среднее поля ϕ_m , а ϕ'_n — сдвинутое поле, определенное согласно (21.1.4). В унитарной калибровке это слагаемое обращалось в нуль вследствие калибровочного условия (21.1.2). Ниже мы воспользуемся другим подходом, аналогичным изложенному в § 15.5 и § 15.6. Введем в функциональный интеграл функционал $B[f]$, где

$$B[f] = \exp\left(\frac{-i}{2\xi} \int d^4x \sum_\alpha f_\alpha f_\alpha\right). \quad (21.2.1)$$

Это эквивалентно добавлению к лагранжиану фиксирующего калибровку слагаемого

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} \sum_\alpha f_\alpha f_\alpha. \quad (21.2.2)$$

Вместо того чтобы полагать $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$, как в § 15.5, выберем теперь фиксирующую калибровку функцию в виде

$$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu - i\xi(t_\alpha)_{nm} \phi'_n v_m. \quad (21.2.3)$$

При таком выборе упомянутые выше перекрестные члены в (21.1.3) уничтожаются за счет перекрестных членов в (21.2.2). Унитарная калибровка оказывается частным случаем: при $\xi \rightarrow \infty$ фиксирующий калибровку функционал (21.2.1) имеет бесконечно резкий пик при ϕ' ,

удовлетворяющем условию унитарной калибровки (21.1.2). Другой частный случай получается в пределе $\xi \rightarrow 0$, когда фиксирующий калибровку функционал имеет пик для калибровочных полей, удовлетворяющих условию калибровки Ландау: $\partial_\mu A_\alpha^\mu = 0$.

Введем также в лагранжиан полином четвертой степени $-P(\phi)$, для которого выполняется условие калибровочной инвариантности

$$\frac{\partial P(\phi)}{\partial \phi_n} (t_\alpha)_{nm} \phi_m = 0. \quad (21.2.4)$$

Разумеется, в лагранжиан должен также входить соответствующий калибровочным полям член

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} \sum_\alpha F_\alpha^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu}. \quad (21.2.5)$$

Полная плотность лагранжиана калибровочных и скалярных полей будет тогда равна

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A,\phi} &= \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{gf} = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_\alpha F_\alpha^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{n\alpha\beta} (t^\alpha \phi)_n (t^\beta \phi)_n A_\alpha^\mu A_{\beta\mu} - \frac{1}{2\xi} \sum_\alpha (\partial_\mu A_\alpha^\mu) (\partial_\nu A_\alpha^\nu) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_n \partial_\mu \phi'_n \partial^\mu \phi'_n + \frac{\xi}{2} \sum_{\alpha nm} (t_\alpha v)_n (t_\alpha v)_m \phi'_n \phi'_m - \\ &\quad - P(\phi) + i \sum_{\alpha nm} \partial_\mu \phi'_n (t_\alpha)_{nm} \phi'_m A_\alpha^\mu + \text{полные производные}. \end{aligned} \quad (21.2.6)$$

Как мы видели в § 15.6, введение в лагранжиан фиксирующего калибровку функционала $B[f]$ требует также введения духов $\omega_\alpha(x)$, лагранжиан которых зависит от калибровочных трансформационных свойств f_α . Для общего калибровочного преобразования с произвольной функцией $\epsilon_\alpha(x)$,

$$\delta A_\alpha^\mu = - \sum_{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A_\gamma^\mu + \partial^\mu \epsilon_\alpha, \quad (21.2.7)$$

$$\delta \phi_n = i \sum_{\alpha m} \epsilon_\alpha (t_\alpha)_{nm} \phi_m, \quad (21.2.8)$$

имеем

$$\delta f_\alpha = \square \epsilon_\alpha - \sum_{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma} \partial_\mu (\epsilon_\beta A_\gamma^\mu) + \xi \sum_{n\beta} (t_\alpha v)_n \epsilon_\beta (t_\beta \phi)_n. \quad (21.2.9)$$

В соответствии с полученными в § 15.6 общими формулами для лагранжиана духов получаем выражение

$$\mathcal{L}_\omega = \omega_\alpha^* \left[\square \omega_\alpha - \sum_{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma} \partial_\mu (\omega_\beta A_\gamma^\mu) + \xi \sum_{n\beta} (t_\alpha v)_n \omega_\beta (t_\beta \phi)_n \right]. \quad (21.2.10)$$

Наконец, если в теории присутствуют фермионы спина $1/2$, соответствующие перенормируемые слагаемые в лагранжиане будут иметь вид

$$\mathcal{L}_\psi = -\bar{\psi}(\not{\partial} - i\mathcal{A}_\alpha t_\alpha^{(\psi)} + m_0 + \Gamma_n \phi_n)\psi, \quad (21.2.11)$$

где $t_\alpha^{(\psi)}$ — матрицы генераторов в представлении калибровочной группы, которому принадлежат рассматриваемые фермионы (константы связи считаем включенными в $t_\alpha^{(\psi)}$), а m_0 и Γ_n — постоянные матрицы (обычно являющиеся линейными комбинациями дираковских матриц 1 и γ_5), удовлетворяющие условиям калибровочной инвариантности

$$[t_\alpha^{(\psi)}, \gamma_4 m_0] = 0, \quad (21.2.12)$$

$$[t_\alpha^{(\psi)}, \gamma_4 \Gamma_n] + \sum_m (t_\alpha)_{mn} \gamma_4 \Gamma_m = 0. \quad (21.2.13)$$

(Множитель $\gamma_4 \equiv i\gamma^0$ возникает из определения $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_4$. Он существует лишь в случае, когда матрицы $t_\alpha^{(\psi)}$ содержат члены, пропорциональные γ_5 .) Согласно доказанной в § 15.5 и § 15.6 теореме, S -матрица, вычисляемая при помощи лагранжиана, даваемого суммой (21.2.6), (21.2.10) и (21.2.11), не зависит от выбора постоянной ξ , входящей в фиксирующую калибровку функцию (21.2.3). Следовательно, для любого ξ получаемые результаты будут совпадать с результатами для унитарной калибровки, соответствующей пределу $\xi = \infty$.

Чтобы получить выражения для пропагаторов всех введенных полей, нам нужна квадратичная по полям часть лагранжиана:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{квэд}} = & -\frac{1}{4} \sum_\alpha (\partial^\mu A_\alpha^\nu - \partial^\nu A_\alpha^\mu)(\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 A_\alpha^\mu A_{\beta\mu} - \frac{1}{2\xi} \sum_\alpha (\partial_\mu A_\alpha^\mu)(\partial_\nu A_\alpha^\nu) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_n (\partial_\mu \phi'_n)(\partial^\mu \phi'_n) - \frac{1}{2} \sum_{nm} M_{nm}^2 \phi'_n \phi'_m - \\ & - \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi - \partial_\mu \omega_\alpha^* \partial^\mu \omega_\alpha - \xi \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 \omega_\alpha^* \omega_\beta + \\ & + \text{полные производные.} \end{aligned} \quad (21.2.14)$$

где $\mu_{\alpha\beta}^2$ — массовая матрица векторных бозонов (21.1.7):

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = - \sum_n (t^\alpha v)_n (t^\beta v)_n, \quad (21.2.15)$$

а M_{nm}^2 и m — новые массовые матрицы для скаляров и фермионов:

$$M_{nm}^2 = \frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \Big|_{\phi=v} - \frac{\xi}{2} \sum_{\alpha} (t_{\alpha} v)_n (t_{\alpha} v)_m, \\ m = m_0 + \sum_n \Gamma_n v_n. \quad (21.2.16)$$

Из (21.2.14) видно, что массы духов зависят от выбора калибровки (и в $\sqrt{\xi}$ раз отличаются от соответствующих масс векторных бозонов).

Полученные формулы дают массы частиц в нулевом порядке теории возмущений. В этом приближении вакуумное среднее v_n равно просто положению минимума полиномиального “потенциала” $P(\phi)$:

$$\frac{\partial P(\phi)}{\partial \phi_n} \Big|_{\phi=v} = 0. \quad (21.2.17)$$

Кроме того, в § 19.2 мы видели, что из формул (21.2.4) и (21.2.17) следует равенство

$$\sum_m \frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \Big|_{\phi=v} (t_{\alpha} v)_m = 0 \quad (21.2.18)$$

для всех α . Таким образом, вместо соответствующих голдстоуновским бозонам нулевых масс матрица квадратов масс скалярных бозонов (21.2.16) имеет собственные значения для масс, равные произведениям $\sqrt{\xi}$ на ненулевые массы векторных бозонов, а именно: если матрица $\mu_{\alpha\beta}^2$ обладает собственным вектором c_{β} , соответствующим собственному значению μ^2 , то $\sum_{\beta} c_{\beta} t_{\beta} v$ будет собственным вектором M^2 , соответствующим собственному значению $\xi\mu^2$:

$$\sum_m M_{nm}^2 \left(\sum_{\beta} c_{\beta} t_{\beta} v \right)_m = \xi \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 c_{\beta} (t_{\alpha} v)_n = \xi \mu^2 \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha} t_{\alpha} v \right)_n. \quad (21.2.19)$$

Остальные собственные векторы M_{nm}^2 ортогональны всем получаемым описанным выше способом, а потому и всем векторам вида $t_{\alpha} v$; следовательно, они (и соответствующие им собственные значения) те же, что и для матрицы

$$(\partial^2 P(\phi) / \partial \phi_m \partial \phi_n)_{\phi=v}.$$

В унитарной калибровке $\xi \rightarrow \infty$ голдстоуновские бозоны становятся настолько тяжелыми, что выпадают из теории (в то время как остальные массы бозонов сохраняют свои обычные значения).

Пропагаторы вычисляются по обычным правилам: если свободная часть лагранжиана имеет вид (возможно, после интегрирования по частям) $-\zeta^{\dagger} \mathcal{D}(\partial) \zeta$ для комплексного поля ζ или $-(1/2) \zeta^{\dagger} \mathcal{D}(\partial) \zeta$ для действительного поля ζ , то пропагатор равен $\mathcal{D}^{-1}(ik)$. В результате

получаем пропагаторы

$$A: \quad \Delta_{\alpha\mu,\beta\nu}(k) = \left[\frac{1}{k^2 + \mu^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{(1-\xi)k_\mu k_\nu}{k^2 + \mu^2 \xi} \right) \right]_{\alpha\beta}, \quad (21.2.20)$$

$$\phi: \quad \Delta_{nm}(k) = (k^2 + M^2)_{nm}^{-1} + \xi \sum_{\alpha\beta} (t_\alpha v)_n (t_\beta v)_m (k^2)^{-1} (k^2 + \xi \mu^2)_{\alpha\beta}^{-1}, \quad (21.2.21)$$

$$\psi: \quad \Delta(k) = \frac{-i\not{k} + m}{k^2 + m^2}, \quad (21.2.22)$$

$$\omega: \quad \Delta_{\alpha\beta}(k) = (k^2 + \xi \mu^2)_{\alpha\beta}^{-1}. \quad (21.2.23)$$

Полюсы в (21.2.20), соответствующие нефизическим квадратам масс, пропорциональным ξ , уничтожаются за счет полюсов в (21.2.21), соответствующих тем же значениям масс. Заметим, что при конечном значении ξ все пропагаторы обладают одинаковым асимптотическим поведением (таким же, как и в случае ненарушенной симметрии). Именно такое поведение и необходимо для перенормируемости. В частности, слагаемое $k_\mu k_\nu$ в пропагаторе векторного бозона более не является препятствием для доказательства перенормируемости, поскольку оно сопровождается лишним множителем $(k^2 + \mu^2 \xi)^{-1}$. Его можно даже исключить, выбрав фейнмановскую калибровку $\xi = 1$. Лишь в случае унитарной калибровки $\xi \rightarrow \infty$ асимптотическое поведение не совпадает с требуемым для перенормируемости.

Однако из корректного асимптотического поведения пропагаторов не следует автоматически перенормируемость теории. Необходимо еще показать, что нарушенные калибровочные симметрии накладывают на ультрафиолетовые расходимости такие ограничения, что все бесконечности могут быть уничтожены посредством перенормировки полей и параметров лагранжиана. Это можно сделать, следуя схеме рассуждений § 17.2 и § 17.3, но при этом рассматривая вакуумные средние бесспиновых полей как внешние поля (а не как фиксированные величины, нарушающие симметрии) [5a].

§ 21.3. Теория электрослабых взаимодействий

Наиболее важным применением теории спонтанного нарушения калибровочной симметрии является теория слабых и электромагнитных взаимодействий [3]. При низких энергиях слабые взаимодействия хорошо описываются эффективным лагранжианом, который представляет собой сумму произведений векторных (в том числе аксиально-векторных) токов, аналогичную (19.4.22). Это наводит на мысль о возможности описания слабых взаимодействий при помощи некоторой калибровочной теории, подобно случаю электромагнетизма. Чтобы обеспечить сохранение лептонных чисел электронного и мюонного типов, а также числа барионов (или кварков), естественно предпо-

ложить, что лептоны электронного и мюонного типов и кварки все принадлежат различным представлениям калибровочной группы. После этого для структуры калибровочной группы остается не так много возможностей.

Рассмотрим сначала лептонные поля электронного типа. Насколько мы знаем, они состоят лишь из левой и правой частей поля электрона e :

$$e_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)e, \quad e_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)e, \quad (21.3.1)$$

и из строго левого нейтринного поля ν_{eL} :

$$\gamma_5 \nu_{eL} = \nu_{eL}. \quad (21.3.2)$$

Поля в любом представлении калибровочной группы должны обладать одинаковыми трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца, так что представления калибровочной группы разделяются¹⁾ на левый дублет (ν_{eL}, e_L) и правый синглет e_R . Максимально возможная калибровочная группа, следовательно, есть

$$SU(2)_L \times U(1)_L \times U(1)_R.$$

Под действием этой группы поля преобразуются согласно

$$\delta \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} = i[\vec{\epsilon} \cdot \vec{t} + \epsilon_L t_L + \epsilon_R t_R] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad (21.3.3)$$

где генераторы равны

$$\vec{t} = \frac{g}{4}(1 + \gamma_5) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (21.3.4)$$

$$t_L \propto (1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21.3.5)$$

$$t_R \propto (1 - \gamma_5), \quad (21.3.6)$$

а постоянная g будет определена ниже. Вместо t_L и t_R удобно ввести генераторы

$$y \equiv g' \left[\left(\frac{1 + \gamma_5}{4} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \right] \quad (21.3.7)$$

и

$$n_e \equiv g'' \left[\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \right], \quad (21.3.8)$$

¹⁾ Если разрешить калибровочным взаимодействиям изменять число лептонов электронного типа, левое поле $\bar{e}_R$ можно включить в одно представление калибровочной группы с ν_{eL} и e_L . Так было сделано в раннем $SO(3)$ -варианте [6] электрослабой теории, которая оказалась в противоречии с экспериментом.

где постоянные g' и g'' , подобно g , будут определены позднее. Генератор y входит в виде линейной комбинации с t_3 , играющей особую роль в физике — она соответствует электрическому заряду:

$$q = e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{e}{g} t_3 - \frac{e}{g'} y. \quad (21.3.9)$$

Наконец, n_e — число лептонов электронного типа. Поскольку мы хотим включить в нашу теорию и изменяющие заряд слабые взаимодействия (подобные бета-распаду), и электромагнетизм, предположим существование калибровочных полей $\vec{A}^\mu$ и B^μ , взаимодействующих с $\vec{t}$ и y . Кроме того, мы можем включать либо не включать в теорию калибровочное поле, взаимодействующее с оставшейся независимой линейной комбинацией генераторов t_L и t_R , в качестве которой можно выбрать число лептонов электронного типа (21.3.8). Имеются очень сильные ограничения [7] на дальнедействующие силы, к появлению которых привело бы наличие взаимодействующего с n_e калибровочного поля с константой связи g'' , сравнимой по силе с константами слабого или электромагнитного взаимодействий; мы вынуждены были бы предположить, что такая калибровочная симметрия спонтанно нарушена²⁾. Однако не имеется никаких экспериментальных свидетельств в пользу существования слабых взаимодействий, к появлению которых привело бы наличие такого калибровочного поля (в то время как экспериментальные свидетельства в пользу отсутствия таких взаимодействий сейчас имеются в избытке), так что мы просто исключим n_e из генераторов калибровочной группы. В результате получаем калибровочную группу вида [8]

$$G = SU(2)_L \times U(1), \quad (21.3.10)$$

где генераторы $\vec{t}$ и y даются формулами (21.3.4) и (21.3.7) соответственно. Константы взаимодействий g и g' следует выбрать так, чтобы калибровочные поля $\vec{A}^\mu$ и B^μ , взаимодействующие с этими генераторами, были стандартным образом нормированными. Калибровочно-инвариантный перенормируемый лагранжиан максимально общего вида, содержащий лишь такие калибровочные поля и поля лептонов

²⁾ Заметим, что это возможно сделать без нарушения закона сохранения полного числа лептонов электронного типа. Необходимо предположить, что лагранжиан инвариантен как относительно глобального фазового преобразования, действующего только на поля лептонов электронного типа, так и относительно локального фазового преобразования, действующего на поля лептонов электронного типа и на некоторые скалярные поля, не взаимодействующие с лептонами. Вакуумные средние таких скалярных полей нарушили бы локальную симметрию, что привело бы к генерации массы взаимодействующих с n_e калибровочных бозонов без нарушения глобальной симметрии.

электронного типа, дается выражением

$$\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_e = -\frac{1}{4} (\partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 - \bar{l} (\not{\partial} - i \vec{\not{A}} \cdot \vec{t}_L - i \not{B} y) l. \quad (21.3.11)$$

(Мы воспользовались тем фактом, что структурные константы групп $SU(2)_L$ и $U(1)$ равны $C_{ijk} = -ig\epsilon_{ijk}$ и 0 соответственно.)

Разумеется, лишь одна линейная комбинация четырех взаимодействующих с $\vec{t}$ и y калибровочных полей (электромагнитное поле A^μ) является безмассовой. Следовательно, мы должны предположить, что группа $SU(2)_L \times U(1)$ спонтанно нарушается до подгруппы $U(1)_{em}$, генератор которой дается зарядом (21.3.9). Детали механизма нарушения симметрии мы обсудим позже. Однако (вне зависимости от этих деталей) нам известно, что канонически нормированные векторные поля, соответствующие частицам спина единица и имеющим определенную массу, состоят из векторного поля заряда $+e$ и массы m_W :

$$W^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1^\mu + iA_2^\mu), \quad (21.3.12)$$

поля заряда $-e$ и той же массы:

$$W^{\mu*} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1^\mu - iA_2^\mu), \quad (21.3.13)$$

и двух электрически нейтральных полей с массами m_Z и 0 соответственно, даваемых ортонормированными линейными комбинациями A_3^μ и B^μ :

$$Z^\mu = \cos \theta A_3^\mu + \sin \theta B^\mu, \quad (21.3.14)$$

$$A^\mu = -\sin \theta A_3^\mu + \cos \theta B^\mu, \quad (21.3.15)$$

или, эквивалентно,

$$A_3^\mu = \cos \theta Z^\mu - \sin \theta A^\mu, \quad (21.3.16)$$

$$B^\mu = \sin \theta Z^\mu + \cos \theta A^\mu. \quad (21.3.17)$$

В соответствии с общим результатом (21.1.11)–(21.1.12), генератор ненарушенной симметрии (которой в нашем случае является электромагнитная калибровочная инвариантность) дается линейной комбинацией генераторов с теми же коэффициентами, что и при соответствующих безмассовых полях в разложении канонически нормированных калибровочных полей, взаимодействующих с этими генераторами. Из (21.3.16) и (21.3.17) получаем, что

$$q = -\sin \theta t_3 + \cos \theta y. \quad (21.3.18)$$

Сравнение с формулой (21.3.9) дает

$$g = -\frac{e}{\sin \theta}, \quad g' = -\frac{e}{\cos \theta}. \quad (21.3.19)$$

Слагаемое для взаимодействия лептона с калибровочным бозоном

можно записать с использованием констант g и g' в виде

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{L}'_e &= -\overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}} \left[\sum_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha} t_{\alpha} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} = \\
 &= -\overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} W(t_{1L} - it_{2L}) + \frac{1}{\sqrt{2}} W^*(t_{1L} + it_{2L}) + \right. \\
 &\quad \left. + Z(t_{3L} \cos \theta + y \sin \theta) + \mathcal{A}(-t_{3L} \sin \theta + y \cos \theta) \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{e} W \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \nu_e \right) + \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_e W^* \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) e \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \bar{\nu}_e Z \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \nu_e + \frac{(g^2 - g'^2)}{2\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} Z \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) e + \\
 &\quad + g' \bar{e} Z \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) e - e(\bar{e} \mathcal{A} e). \quad (21.3.20)
 \end{aligned}$$

Чтобы завершить построение теории, нужно сделать некоторые предположения о механизме нарушения симметрии. Мы хотим, чтобы в рамках этого механизма генерировалась масса не только для частиц $W^{\pm}$ и Z^0 , но также и для электрона. Единственный способ добиться этого в перенормируемой теории со слабыми взаимодействиями состоит во введении скалярного поля, взаимодействующего (без градиентов) с $\bar{l}_R$ и l_L (а также с $\bar{l}_L$ и l_R). Тогда из $SU(2)_L \times U(1)$ -инвариантности будет следовать, что скаляр должен принадлежать $SU(2)_L$ -дублету, как и l_L , но при этом иметь смещенное значение y (а потому и q). Поэтому мы предположим наличие “юкавского” взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\phi e} = -G_e \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} e_R + \text{эрмит. сопр.}, \quad (21.3.21)$$

где (ϕ^+, ϕ^0) — дублет, для которого генераторы $SU(2) \times U(1)$ представлены матрицами

$$\vec{t}^{(\phi)} = \frac{g}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (21.3.22)$$

$$y^{(\phi)} = -\frac{g'}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21.3.23)$$

так что зарядовая матрица имеет вид

$$q^{(\phi)} = \frac{e}{g} t_3^{(\phi)} - \frac{e}{g'} y^{(\phi)} = e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21.3.24)$$

Возможно наличие в теории и других скалярных мультиплетов, но пока ограничимся предположением о том, что введенный выше мультиплет является единственным.

В лагранжиан следует добавить калибровочно-инвариантное слагаемое, содержащее скалярное и калибровочное поля. Его наиболее общий вид, совместный с требованиями $SU(2) \times U(1)$ -калибровочной инвариантности, лоренц-инвариантности и перенормируемости, есть

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} |(\partial_\mu - i\vec{A}_\mu \cdot \vec{t}^{(\phi)} - iB_\mu y^{(\phi)})\phi|^2 - \frac{\mu^2}{2} \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (21.3.25)$$

где $\lambda > 0$ и

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (21.3.26)$$

При $\mu^2 < 0$ в древесном приближении вакуумное среднее, соответствующее стационарной точке лагранжиана, равно

$$\langle \phi \rangle^\dagger \langle \phi \rangle \equiv v^2 = \frac{|\mu^2|}{\lambda}. \quad (21.3.27)$$

Мы всегда можем проделать калибровочное $SU(2) \times U(1)$ -преобразование к унитарной калибровке, в которой $\phi^+ = 0$ и компонента ϕ^0 эрмитова с положительным значением вакуумного среднего. (Именно поэтому мы выбрали несколько нестандартную нормировку дублета ϕ с множителем $1/2$ перед кинетическим членом в (21.3.25); поле $\text{Re } \phi^0$ — единственное физическое скалярное поле, и сделанный в (21.3.25) выбор превращает его в канонически нормированное.) В унитарной калибровке вакуумные средние компонент ϕ равны

$$\langle \phi^+ \rangle = 0, \quad \langle \phi^0 \rangle = v > 0. \quad (21.3.28)$$

Из формулы (21.3.25) для скалярного лагранжиана следует выражение для массового члена векторного мезона:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} |(\vec{A}_\mu \cdot \vec{t}^{(\phi)} + B_\mu y^{(\phi)})\langle \phi \rangle|^2 &= -\frac{1}{2} \left| \left(\frac{g}{2} \vec{A}_\mu \cdot \vec{\tau} - \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2 = \\ &= -\frac{v^2 g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu - \frac{v^2}{8} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu. \end{aligned} \quad (21.3.29)$$

Видно, что масса фотона равна нулю, а частицы $W^\pm$ и Z^0 имеют массы

$$m_W = \frac{v|g|}{2}, \quad m_Z = \frac{v\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}. \quad (21.3.30)$$

Кроме того, из (21.3.21) и (21.3.28) получаем, что в главном порядке масса электрона равна

$$m_e = G_e v. \quad (21.3.31)$$

Трудно изучать реакции, включающие лишь лептоны электронного типа, хотя сейчас имеются данные о процессах типа $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$. Для сравнения с достаточно точными экспериментальными данными нужно ввести хотя бы лептоны мюонного типа, например рассмотреть хорошо изученный процесс распада $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$. Построенную выше модель легко расширить, включив в нее мюонные лептоны — достаточно добавить в лагранжиан слагаемые $\mathcal{L}_\mu$ и $\mathcal{L}_{\phi\mu}$,

аналогичные последним слагаемым в (21.3.11) и (21.3.21), с точностью до замены полей e и ν_e на поля мюона и мюонного нейтрино μ^- и ν_μ и величины G_e на $G_\mu = G_e(m_\mu/m_e)$. Анализ формулы (21.3.20) и соответствующего выражения, получаемого в результате замены e и ν_e на μ и ν_μ , показывает, что W -обмен между низкоэнергетичными лептонами e - и μ -типов приводит к появлению эффективного взаимодействия

$$\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{m_W^2} \left(\bar{e}\gamma^\lambda \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\nu_e\right) \left(\bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mu\right) + \text{эрмит. сопр.} \quad (21.3.32)$$

Полученное выражение можно сравнить со взаимодействием в эффективной “ $V - A$ ”-теории, которая хорошо описывает распад мюона:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{e}\gamma^\lambda (1+\gamma_5)\nu_e) (\bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda (1+\gamma_5)\mu) + \text{эрмит. сопр.}, \quad (21.3.33)$$

где G_F — константа взаимодействия Ферми, значение которой известно из опытов по распаду мюона, $G_F = 1,6639(2) \times 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$. Сравнивая выписанные формулы, получаем

$$\frac{g^2}{m_W^2} = 4\sqrt{2} G_F. \quad (21.3.34)$$

Отсюда сразу можно найти вакуумное среднее v , которое в соответствии с (21.3.30) равно

$$v = \frac{2m_W}{g} = \frac{1}{2^{1/4} G_F^{1/2}} = 247 \text{ ГэВ}. \quad (21.3.35)$$

Кроме того, из (21.3.31) следует, что G_e — очень малая величина,

$$G_e = \frac{0,511 \text{ МэВ}}{247 \text{ ГэВ}} = 2,07 \times 10^{-6}. \quad (21.3.36)$$

Из уравнения (21.3.30) видно, что $m_Z > m_W$. Однако мы не можем найти m_Z и m_W при помощи (21.3.30) без дополнительной информации о g и g' . Используя (21.3.30) и (21.3.19), мы можем выразить m_Z и m_W через угол электрослабого смешивания θ :

$$m_W = \frac{ev}{2|\sin\theta|} = \frac{37,3 \text{ ГэВ}}{|\sin\theta|},$$

$$m_Z = \frac{ev}{2|\sin\theta||\cos\theta|} = \frac{74,6 \text{ ГэВ}}{|\sin 2\theta|}.$$

Такие результаты были исходно получены в работах Вайнберга и Салама [3]. Разумеется, имеются радиационные поправки различного происхождения, большая часть которых определяется деталями теории, не конкретизированными в этом параграфе. Однако имеется один тип особенно больших радиационных поправок, который может быть учтен без привлечения какой-либо дополнительной информации.

Приведенные выше значения масс m_W и m_Z вычислялись с использованием стандартно определенного электрического заряда e . Однако как мы видели в § 18.2, использование этой величины не вполне оправдано при рассмотрении процессов на масштабах энергий порядка $E \gg m_e$; следует использовать значение электрического заряда e_μ , определенное на плавающем масштабе μ , сравнимом с характерными энергиями изучаемого процесса. Для значений μ порядка 90 ГэВ эффективная постоянная тонкой структуры $e_\mu^2/4\pi$ равна примерно $1/129$ (и очень мало чувствительна к точному значению μ). Следовательно, приведенные выше значения масс m_W и m_Z следует умножить на $\sqrt{137/129}$, что дает

$$m_W = \frac{38,4 \text{ ГэВ}}{|\sin \theta|}, \quad (21.3.37)$$

$$m_Z = \frac{76,9 \text{ ГэВ}}{|\sin 2\theta|}. \quad (21.3.38)$$

Каково бы ни было значение θ , эти массы оказываются слишком большими для того, чтобы можно было обнаружить частицы W или Z в 60-е годы или в начале 70-х годов. Экспериментальные подтверждения электрослабой теории следовало ожидать в результате обнаружения нового типа слабых взаимодействий, предсказываемых теорией — нейтральных токов, обусловленных Z^0 -обменом [9]. Впервые связанные с нейтральными токами эффекты наблюдались в 1973 г. при регистрации в пузырьковой камере чисто лептонного упругого рассеяния [10] $\nu_\mu - e^-$. Хотя такие процессы удобны для теоретического рассмотрения, частота событий оказывается довольно низкой (сечение пропорционально квадрату энергии в системе центра масс)³⁾. Лишь годы спустя исследование чисто лептонных реакций, обусловленных нейтральными токами, позволило получить достаточно точное значение параметра $\sin^2 \theta$. К 1994 г. в результате изучения чисто лептонных процессов, обусловленных нейтральными токами вида $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ и $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$ была получена величина $\sin^2 \theta = 0,222 \pm 0,011$, что соответствует $m_W = 81,5 \text{ ГэВ}$ и $m_Z = 92,5 \text{ ГэВ}$.

Еще до открытия нейтральных токов теория электрослабых взаимодействий была расширена за счет включения слабых и электромагнитных взаимодействий адронов с лептонами и друг с другом. В середине 60-х стало ясно, что слабые взаимодействия с обменом заряда между лептонами и адронами на низких энергиях хорошо

³⁾ Сечение пропорционально G_F^2 и имеет размерность [энергия]⁻². Поэтому оно должно быть также пропорционально квадрату некоторой энергии. Поскольку энергия в системе центра масс значительно превосходит массу электрона, только она и может входить в формулу для сечения.

описываются эффективным лагранжианом

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\nu_e + \bar{\mu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\nu_\mu] J^\lambda + \text{эрмит. сопр.}, \quad (21.3.39)$$

где J^λ — адронный ток. В рамках кварковой модели коммутационные свойства и свойства сохранения J^λ позволили отождествить его с кварковым током:

$$J^\lambda = \bar{u}\gamma^\lambda(1+\gamma_5)d \cos \theta_c + \bar{u}\gamma^\lambda(1+\gamma_5)s \sin \theta_c. \quad (21.3.40)$$

Здесь u , d , s — кварковые поля, а θ_c — другой угол, известный как угол Кабиббо [11]. Эксперименты по изучению процессов вида $O^{14} \rightarrow N^{14*} + e^+ + \nu_e$ и $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ подтвердили, что G_F имеет с хорошей точностью то же значение, что и для чисто лептонного процесса $\mu^+ \rightarrow \bar{\nu} + e^+ + \nu_e$, и дали для угла θ_c величину [12] $\sin \theta_c = 0,220 \pm 0,003$. Естественно заключить, что кварки образуют еще один $SU(2) \times U(1)$ -дублет

$$\mathcal{Q} = \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \begin{bmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{bmatrix}, \quad (21.3.41)$$

и правые синглеты, для которых значение y смещается так, чтобы обеспечить равенство зарядов величинам $2e/3$ и $-e/3$. Само по себе это привело бы к серьезным трудностям. Бозон Z^0 взаимодействует с кварковым нейтральным током:

$$\sum_{\mathcal{Q}} \bar{\mathcal{Q}}\gamma^\mu(t_{3L} \cos \theta + y \sin \theta) \mathcal{Q} = \sum_{\mathcal{Q}} \bar{\mathcal{Q}}\gamma^\mu(t_{3L} \sec \theta + q \operatorname{tg} \theta) \mathcal{Q}, \quad (21.3.42)$$

где суммирование ведется по всем кварковым дублетам $\mathcal{Q}$ вида (21.3.41). Зарядовая матрица q диагональна по кварковым ароматам, но если бы единственный кварковый дублет давался бы выражением (21.3.41), то слагаемое с матрицей t_{3L} содержало бы перекрестные слагаемые, пропорциональные $\bar{s}\gamma^\mu(1+\gamma_5)d$ и $\bar{d}\gamma^\mu(1+\gamma_5)s$, что привело бы к эффективным Z -обменным взаимодействиям вида $s + \bar{d} \leftrightarrow d + \bar{s}$ и $s + \bar{d} \leftrightarrow \mu^+ + \mu^-$, сила которых соответствовала бы силе слабых взаимодействий первого порядка. Отсюда следовали бы, что сечения процессов типа осцилляций $K^0 - \bar{K}^0$ или $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ должны на много порядков превосходить экспериментально измеренные. Более того, даже в отсутствие соответствующих нейтральным токам слагаемых в лагранжиане, однопетлевые диаграммы, содержащие взаимодействие (21.3.39) с заряженным током (21.3.40), приводили бы к эффективному взаимодействию $s + \bar{d} \leftrightarrow d + \bar{s}$, лишь в $\alpha/2\pi$ раз более слабому, чем обычные слабые взаимодействия первого порядка. Это тоже приводило бы к слишком большому значению сечения осцилляций $K^0 - \bar{K}^0$. Чтобы избежать этой трудности, было предложено [13] ввести в J^λ еще один член; в современных обозначениях он имеет вид

$$\bar{c}\gamma^\lambda(1+\gamma_5)[-d \sin \theta_c + s \cos \theta_c], \quad (21.3.43)$$

где s — четвертый кварк, имеющий заряд $2e/3$ (как и u -кварк). Складывая (21.3.43) и (21.3.40), получаем выражение для заряженного тока

$$J^\lambda = (\bar{u} \cos \theta_c - \bar{c} \sin \theta_c) \gamma^\lambda (1 + \gamma_5) d + (\bar{u} \sin \theta_c + \bar{c} \cos \theta_c) \gamma^\lambda (1 + \gamma_5) s.$$

Единственная причина, по которой взаимодействие W с этим током не сохраняет странность — различие масс s и u , приводящее к осцилляциям между $u \cos \theta_c - c \sin \theta_c$ и $u \sin \theta_c + c \cos \theta_c$. Но отсюда следует, что петлевые диаграммы для эффективного взаимодействия $s + d \rightarrow d + \bar{s}$ подавлены дополнительными множителями m_c^2/m_W^2 (так как $m_u \ll m_c$), что приводит теоретическое значение сечения осцилляций $K^0 - \bar{K}^0$ в согласие с экспериментом.

Впоследствии было отмечено [14], что таким способом решается и проблема Z^0 -взаимодействий, не сохраняющих странность. В терминах $SU(2) \times U(1)$ -калибровочной теории комбинация

$$-d_L \sin \theta_c + s_L \cos \theta_c$$

не может быть синглетом, но должна составлять часть другого дублета

$$\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{bmatrix} c \\ -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c \end{bmatrix}. \quad (21.3.44)$$

После включения этого дублета в слабый нейтральный ток (21.3.42) не сохраняющие странность слагаемые, пропорциональные $\bar{s} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) d$ и $\bar{d} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) s$, сокращаются, и проблема избыточного вклада Z -обмена в сечения процессов типа осцилляций $K^0 - \bar{K}^0$ и распада $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ исчезает. Частицы, содержащие s -кварк в виде связанного состояния $s - \bar{c}$, были обнаружены [15] в 1974 г.; для массы s -кварка была получена оценка $m_c \approx 1,5 \text{ ГэВ}$ ⁴). Так было завершено построение двух поколений кварков и лептонов — кваркового дублета (u, d) , смешанного с дублетом (c, s) , и двух лептонных дублетов (ν_e, e) и (ν_μ, μ) .

Первым признаком существования третьего поколения стало обнаружение третьего заряженного лептона τ [16]. Впоследствии был обнаружен кварк пятого типа b [17], с зарядом $-e/3$ и массой порядка 4,5 ГэВ. Появилась теоретическая необходимость в шестом кварке t с зарядом $2e/3$. Спустя довольно продолжительное время он также был открыт экспериментально [18], и в 1995 г. его масса оценивалась как $181 \pm 12 \text{ ГэВ}$ [19]. Сегодня адронный ток (21.3.39) записывают

⁴) Мы не можем наблюдать кварки в изолированном состоянии, поэтому их массы определены неточно. Приведенная в тексте масса s -кварка примерно равно половине массы $J - \psi$ частицы, интерпретируемой как связанное состояние пары $s - \bar{c}$. Кварки b и t настолько тяжелы, что их массы можно извлекать из масс содержащих их адронов практически без введения какой-либо неопределенности.

в виде

$$J^\lambda = \overline{\begin{bmatrix} u \\ c \\ t \end{bmatrix}} \gamma^\lambda (1 + \gamma_5) V \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}, \quad (21.3.45)$$

где V — неизвестная полностью унитарная матрица 3×3 , называемая матрицей Кобаяши–Маскавы [20]. В терминах $SU(2) \times U(1)$ -калибровочной теории это означает, что имеются три кварковых дублета:

$$\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{bmatrix} u \\ V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b \end{bmatrix}, \quad (21.3.46)$$

$$\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{bmatrix} c \\ V_{cd}d + V_{cs}s + V_{cb}b \end{bmatrix}, \quad (21.3.47)$$

$$\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{bmatrix} t \\ V_{td}d + V_{ts}s + V_{tb}b \end{bmatrix}. \quad (21.3.48)$$

Важно отметить, что именно этого следовало ожидать для трех кварковых дублетов в общем случае. Перенормируемое $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -инвариантное взаимодействие скалярных дублетов ϕ_n с кварками в наиболее общем виде может быть записано как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi = & - \sum_{ijn} G_{ij}^n \overline{\begin{pmatrix} U_{iL} \\ D_{iL} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \phi_n^0 \\ \phi_n^- \end{pmatrix} U_{jR} - \\ & - \sum_{ijn} H_{ij}^n \overline{\begin{pmatrix} U_{iL} \\ D_{iL} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -\phi_n^{-\dagger} \\ \phi_n^{0\dagger} \end{pmatrix} D_{jR} + \text{эрмит. сопр.}, \end{aligned} \quad (21.3.49)$$

где U_i и D_i — три независимых кварковых поля с зарядами $2e/3$ и $-e/3$ соответственно ($i = 1, 2, 3$), индексы L и R обозначают левую и правую части кварковых полей, а G_{ij}^n и H_{ij}^n — неизвестные константы. При наличии у нейтральных скаляров вакуумных средних массовый член для кварков будет иметь вид

$$\mathcal{L}_m = - \sum_{ij} \overline{U_{iL}} m_{ij}^U U_{jR} - \sum_{ij} \overline{D_{iL}} m_{ij}^D D_{jR} + \text{эрмит. сопр.}, \quad (21.3.50)$$

где

$$m_{ij}^U = \sum_n G_{ij}^n \langle \phi_n^0 \rangle_{\text{ВАК}}, \quad m_{ij}^D = \sum_n H_{ij}^n \langle \phi_n^0 \rangle_{\text{ВАК}}^*. \quad (21.3.51)$$

На матрицы m_{ij}^U и m_{ij}^D не накладывается никаких ограничений; в частности, они могут быть комплексными и недиагональными (в этом случае в $\mathcal{L}_m$ появляются не сохраняющие четность и аромат слагаемые). Однако мы можем ввести новые кварковые поля по формулам $U'_R = U_R^U U_R$, $U'_L = U_L^U U_L$, $D'_R = A_R^D D_R$, $D'_L = A_L^D D_L$, где на 3×3 -матрицы A накладывается лишь условие унитарности (для сохранения

вида кинетического члена (19.4.1)). При этом массовый член (21.3.50) сохраняет свой вид после записи его через штрихованные поля, но матрицы m^U и m^D заменяются на

$$m^{U'} = A_L^U m^U A_R^{U\dagger}, \quad m^{D'} = A_L^D m^D A_R^{D\dagger}. \quad (21.3.52)$$

Однако согласно общей теореме для любой матрицы m можно найти такие унитарные матрицы A и B , что матрица AmB будет действительной и диагональной. (Действительно, по теореме о полярном разложении можно записать $m = HU$, где H — эрмитова матрица, а U — унитарная. Достаточно положить $A = S^\dagger$ и $B = U^\dagger S$, где S — унитарная матрица, диагонализующая H .) Следовательно, мы сможем выбрать матрицы A так, чтобы матрицы $m^{U'}$ и $m^{D'}$ стали действительными и диагональными, после чего кварковые поля u , c , t , d , s и b можно будет отождествить с компонентами $U'_L + U'_R$ и $D'_L + D'_R$. Слабые дублеты запишутся как

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} (A_L^{U-1} U'_L)_i \\ (A_L^{D-1} D'_L)_i \end{pmatrix}.$$

Однако с равным основанием в качестве дублетов можно взять линейные комбинации $A_L^U Q_L$, первыми компонентами которых являются кварки определенных масс u , c и t с зарядами $2e/3$. При этом дублеты примут вид (21.3.46)–(21.3.48) с

$$V = A_L^U A_L^{D-1}. \quad (21.3.53)$$

По наиболее точным современным (1995 г.) данным элементы матрицы Кобаяши–Маскавы с доверительностью 90% равны [20a]

$$\begin{pmatrix} 0,9745 \text{ до } 0,9757 & 0,219 \text{ до } 0,224 & 0,002 \text{ до } 0,005 \\ 0,218 \text{ до } 0,224 & 0,9736 \text{ до } 0,9750 & 0,036 \text{ до } 0,046 \\ 0,004 \text{ до } 0,014 & 0,034 \text{ до } 0,046 & 0,9989 \text{ до } 0,9993 \end{pmatrix},$$

где строки нумеруются кварками u , c и t , а столбцы — кварками d , s и b .

Если бы существовали лишь два кварковых дублета, образованные из кварков u , d , c , s , то возможно было бы выбрать фазы кварковых полей так, чтобы все элементы V_{ij} стали действительными⁵⁾, матрица V ортогональной, а дублеты (21.3.46) и (21.3.47) (без b -кварка) приняли бы вид (21.3.41) и (21.3.44) соответственно. В этом случае калибровочные взаимодействия автоматически сохраняли бы симметрии T и CP . Важность включения третьего поколения обусловлена тем, что теперь уже невозможно выбрать фазы кварков так, чтобы матрица V стала действительной, а потому калибровочные взаимодействия могут

⁵⁾ Выберем фазы d и s так, чтобы V_{us} и V_{ud} стали действительными. Из условия унитарности тогда будет следовать, что фазы V_{cd} и V_{cs} одинаковы и могут быть сделаны произвольными за счет выбора фазы c .

нарушать Т и СР. Однако по неясным причинам элементы V_{ub} , V_{cb} , V_{td} , V_{ts} , связывающие третье поколение с первыми двумя, все очень малы. Поэтому третье поколение оказывает очень слабое влияние на физику первых двух, что до некоторой степени объясняет, почему предположение Кабиббо (21.3.40) настолько успешно и почему Т- и СР-симметрии нарушаются настолько слабо. Симметрии Т и СР могут также нарушаться за счет взаимодействий со скалярными бозонами, если имеются два или более скалярных дублета [20b]; в этом случае нарушение ожидается слабым, поскольку скалярные дублеты слабо взаимодействуют с легкими кварками. До сих пор не известно, какой из этих механизмов отвечает за наблюдаемое нарушение симметрий Т и СР при распаде K_2^0 , обсуждавшемся в § 3.3.

Нейтральные токи с участием адронов, такие как глубоко неупругое рассеяние нейтрино на нуклоне, были открыты в 1973 г. [21], вскоре после обнаружения чисто лептонного процесса $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$. Поскольку в этом случае масса частицы-мишени намного больше, стало возможным наблюдать большое число событий и использовать экспериментальные данные для подтверждения электрослабой теории и измерения ее параметров. Дополнительная информация о взаимодействии лептонов с адронами посредством нейтральных токов была получена из опытов по наблюдению нарушения четности в атомной физике. К 1983 г. результаты определения $\sin^2 \theta$ при помощи различных экспериментальных методов стали согласованными и давали значение $\sin^2 \theta = 0,23$, что соответствовало $m_W = 80,1$ ГэВ и $m_Z = 91,4$ ГэВ. Затем в 1983 г. был обнаружен W -бозон, а вскоре после этого и Z -бозон [22]. Современные (на 1995 г.) данные об их массах,

$$m_W = 80,410 \pm 0,180 \text{ ГэВ}^{23}, \quad m_Z = 91,1887 \pm 0,0022 \text{ ГэВ}^{24},$$

удовлетворительно согласуются с предсказаниями электрослабой теории.

Очень высокая точность определения массы Z , достигнутая за счет прецизионной подстройки энергии $e^+ - e^-$ соударений на точку Z -резонанса в LEP (CERN's Large Electron Positron Collider) и SLC (Stanford Linear Collider) изменила методы анализа данных об электрослабых взаимодействиях. Вместо сравнения предсказываемых величин масс m_W и m_Z с их экспериментально измеренными значениями теперь в качестве экспериментальных входных данных берутся: масса Z , константа взаимодействия Ферми

$$G_F = 1,16639(2) \times 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2},$$

измеренная в экспериментах по распаду мюона (с учетом радиационных поправок порядка α) и постоянная тонкой структуры $\alpha(m_Z) = (128,87 \pm 0,12)^{-1}$, экстраполированная по результатам низкоэнергетических измерений (см. § 18.2). Таким образом, $\sin^2 \theta$ перестает быть

независимой величиной; если определить его согласно (21.3.38), получим $\sin^2 \theta = 0,2312 \pm 0,003$. При наличии настолько точно измеренных параметров, электрослабая теория позволяет делать предсказания величин типа массы m_W с достаточной точностью для того, чтобы необходимо было принимать во внимание электрослабые радиационные поправки [25]. В однопетлевом приближении эти поправки зависят от массы t -кварка и скалярного (“хиггсовского”) бозона и потому могут быть использованы для оценки масс этих частиц. Например, до открытия t -кварка для его массы из анализа радиационных поправок были получены границы 130–200 ГэВ [26], в согласии с позднее найденной экспериментально величиной. В 1994 г. предсказывалось значение массы W $m_W = 80,29$ ГэВ с неопределенностью $\pm 0,02$ ГэВ, связанной с неточностью известных значений m_Z , G_F и $\alpha(m_Z)$, и неопределенностью $\pm 0,11$ ГэВ, связанной с неизвестными массами m_t и m_{Higgs} . Согласно опубликованной в 1995 г. работе [27]

$$m_{\text{Higgs}} < 225 \text{ ГэВ.}$$

Точное измерение массы m_W , ожидаемое в экспериментах на электрон-позитронном коллайдере LEP 2 в CERN, позволит получить полезную оценку m_{Higgs} .

* * *

Перенормируемый лагранжиан наиболее общего вида, содержащий набор полей и обладающий симметриями $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -электрослабой теории, автоматически сохраняет числа барионов и лептонов. Это очевидным образом справедливо для калибровочных взаимодействий и голых массовых членов, поскольку кварки, антикварки, лептоны и антилептоны все принадлежат различным представлениям группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Если все скаляры $SU(3)$ -нейтральны, принадлежат $SU(2)$ -дублетам и обладают $U(1)$ -квантовым числом $\pm 1/2$, то единственное перенормируемое взаимодействие скаляров с фермионами или антифермионами — взаимодействие с парами лептон–антилептон и кварк–антикварк; разумеется, оно сохраняет барионные и лептонные числа. (Аналогичным образом можно убедиться, что заряженные адронные токи, с которыми взаимодействуют лептоны, с необходимостью являются линейными комбинациями токов, связанных с обсуждавшейся в § 19.7 спонтанно нарушенной $SU(3) \times SU(3)$ -симметрией. В оригинальной работе, посвященной изучению нарушения этой симметрии, подобное предположение было сделано без каких-либо обоснований.)

Эти результаты критически зависят от предположения о перенормируемости стандартной модели. Однако как мы неоднократно подчеркивали, ожидается, что к перенормируемому лагранжиану стандартной модели имеются добавки вида слагаемых размерности $d > 4$, подавленных $(4 - d)$ -ми степенями некоторой очень большой мас-

сы M . Ведущие поправки к предсказаниям стандартной модели происходят от слагаемых наименьшей возможной размерности, большей четырех.

Лоренц-инвариантные слагаемые размерности 5, которые можно построить при помощи присутствующих в стандартной модели полей, не более чем билинейны по фермионным полям; они могут также содержать либо два скаляра, либо один скаляр и одну калибровочно-ковариантную производную, либо не включать скалярных полей, но содержать две калибровочно-ковариантные производные (в том числе их коммутатор, т.е. тензор напряженности поля). Из цветовой $SU(3)$ -инвариантности следует, что участвующие в таком взаимодействии фермионные поля представляют собой пару кварк–антикварк либо пару лептонных полей. Все такие операторы сохраняют число барионов. Имеется очень много членов такого типа, однако число лептонов не будут сохранять только операторы, содержащие два лептонных поля или два антилептонных поля. Левые лептонные дублеты (l_{Li}^-, ν_i) и правые заряженные лептонные синглеты l_{Ri}^- (с $i = e, \mu$ или τ) имеют квантовые числа относительно $U(1)$, равные соответственно $1/2$ и $+1$, в то время как скалярный дублет (или скалярные дублеты) (ϕ^+, ϕ^0) обладает $U(1)$ -квантовым числом $-1/2$. Следовательно, мы можем построить $U(1)$ -инвариантное взаимодействие размерности 5 при помощи двух левых лептонных дублетов и двух скалярных дублетов. Если имеется лишь один скалярный дублет, то существует лишь одно такое взаимодействие, удовлетворяющее условиям $SU(2)$ - и лоренц-инвариантности [27a]:

$$\sum_{ij} f_{ij} (\bar{l}_{Li}^c \phi^+ - \bar{\nu}_i^c \phi^0) (l_{Lj} \phi^+ - \nu_j \phi^0), \quad (21.3.54)$$

где i и j — индексы типов лептонов, а индекс s соответствует операции зарядового сопряжения. Для энергий ниже масштаба электрослабого нарушения симметрии получаем эффективный лагранжиан

$$\sum_{ij} f_{ij} \bar{\nu}_i^c \nu_j \langle \phi^0 \rangle^2. \quad (21.3.55)$$

Мы ожидаем, что величины f_{ij} будут по порядку величины сравнимы с $1/M$, возможно с точностью до умножения на некоторые малые константы связи. Поэтому такое не сохраняющее число лептонов взаимодействие соответствует массам нейтрино не выше [27b] $(300 \text{ ГэВ})^2/M$. Как выяснится в § 21.5, M имеет порядок 10^{15} – 10^{18} ГэВ, так что ожидаемая величина массы нейтрино равна 10^{-4} – 10^{-1} эВ (или меньше, если скажется влияние малых констант связи). Такие массы слишком малы для прямого измерения. Однако нет оснований предполагать, что массовая матрица нейтрино диагональна; массы нейтрино можно определить по осцилляциям между различными типами на больших длинах пролета.

Аналогичный анализ показывает, что возможны взаимодействия размерности 6, не сохраняющие ни лептонное, ни барионное число и содержащие три кварковых поля и одно лептонное поле [27с]. Соответствующие им константы связи должны быть пропорциональны M^{-2} , а сечения обусловленных ими процессов (таких как распад протона) — пропорциональны M^{-4} .

§ 21.4. Динамически нарушенные локальные симметрии ¹⁾

Наше обсуждение спонтанно нарушенных калибровочных симметрий до сих пор не выходило за рамки теории возмущений. До некоторой степени такое ограничение неизбежно. В то время как в случае спонтанно нарушенной глобальной симметрии можно доказать строгие теоремы о существовании и структуре взаимодействий безмассовых голдстоуновских бозонов, спонтанное нарушение локальной симметрии не приводит к появлению подобных точных соотношений. Даже существование массивных векторных бозонов не является теоремой — при достаточно больших значениях константы взаимодействия такие частицы распадаются настолько быстро, что уже не могут считаться четкими резонансами спина $j = 1$.

Однако когда константы связи типа e , g или g' достаточно малы, теория со спонтанно нарушенной локальной симметрией должна быть достаточно близка к теории со спонтанно нарушенной глобальной симметрией, для которой можно доказать строгие теоремы. Следовательно, в таких теориях можно получать полезные приближенные результаты, *даже если остальные некалибровочные взаимодействия очень сильны*. Один из примеров дает стандартная электрослабая $SU(2) \times U(1)$ -теория с большой константой самодействия скалярного поля λ (а следовательно, большой массой скалярного поля, см. (21.3.27)). Более интересная ситуация — нарушение электрослабой симметрии за счет сильных взаимодействий, связанных с некоторой новой калибровочной группой, действующей на новый набор фермионов. Мы рассмотрим утверждения, справедливые для всех таких теорий вне зависимости от конкретного механизма спонтанного нарушения симметрии [28].

Будем предполагать, что в пределе нулевых значений констант калибровочных взаимодействий теория инвариантна относительно некоторой группы G глобальных симметрий, спонтанно нарушенной до подгруппы H . В § 19.5 мы показали, что в этом случае теория может быть описана в терминах голдстоуновских бозонных полей ξ_a

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

и других полей материи $\tilde{\psi}$, G -трансформационные свойства которых таковы, что H -инвариантный лагранжиан, построенный из полей $\tilde{\psi}$ и ковариантных производных $D_{a\mu}$, $D_\mu\tilde{\psi}$ и т.д., даваемых формулами (19.6.14), (19.6.15) и т.д., будет с необходимостью G -инвариантным.

Включим теперь калибровочные взаимодействия. Калибровочная группа $\mathcal{G}$ должна быть, конечно же, подгруппой $\mathcal{G} \subset G$ полной группы симметрий G и при спонтанном нарушении G до H должна нарушаться до подгруппы $\mathcal{H}$, которая представляет собой пересечение $\mathcal{G}$ с H . Генераторы $\mathcal{T}_\alpha$ калибровочной группы $\mathcal{G}$ можно представить в виде линейных комбинаций генераторов T_A полной группы G :

$$\mathcal{T}_\alpha = \sum_A e_{\alpha A} T_A, \quad (21.4.1)$$

с очень малыми коэффициентами $e_{\alpha A}$ (калибровочными константами связи). Индекс A здесь пробегает наборы значений i, a , соответствующие генераторам ненарушенной симметрии t_i и генераторам нарушенной симметрии x_a . (Мы предполагаем, что генераторы T_A нормированы обычным образом, т.е. они представлены матрицами с элементами порядка единицы. В частности, для генераторов x_a и t_i структурные константы не содержат множителей, соответствующих константам взаимодействий, в отличие от генераторов $\mathcal{T}_\alpha$.)

В исходной теории с линейно реализованной G -инвариантностью мы вводим взаимодействие между калибровочными полями $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ и другими полями ψ посредством замены обычных производных на калибровочно-ковариантные производные

$$\left(\partial_\mu - i \sum_\alpha \mathcal{T}_\alpha \mathcal{A}_{\alpha\mu} \right) \psi = \left(\partial_\mu - i \sum_A T_A A_{A\mu} \right) \psi, \quad (21.4.2)$$

где

$$A_{A\mu} \equiv \sum_\alpha e_{\alpha A} \mathcal{A}_{\alpha\mu}. \quad (21.4.3)$$

Получаемая теория будет тогда инвариантной относительно *формальных* локальных преобразований, действие которых на поля определено согласно

$$\psi \rightarrow g\psi, \quad (21.4.4)$$

$$\sum_A T_A A_{A\mu} \rightarrow g \left(\sum_A T_A A_{A\mu} \right) g^{-1} - i(\partial_\mu g)g^{-1}, \quad (21.4.5)$$

где $g(x)$ — произвольный зависящий от точки в пространстве-времени элемент группы G . Эта инвариантность чисто формальна, поскольку калибровочные взаимодействия, вообще говоря, нарушают G -симметрию. Последнее проявляется в том, что преобразование (21.4.5) в общем случае не сохраняет вид линейного соотношения (21.4.3).

Тем не менее мы можем на время забыть о формуле (21.4.3) и рассматривать A_A^μ как произвольное классическое внешнее поле. Тогда можно исследовать структуру лагранжиана полей материи и их взаимодействий с калибровочными полями, потребовав его инвариантности относительно локальных преобразований (21.4.4), (21.4.5). Так мы гарантируем не только инвариантность лагранжиана относительно истинной группы локальных симметрий $\mathcal{G}$ (а при $e_{\alpha A} \rightarrow 0$ — относительно большей группы глобальных симметрий G), но также и то, что токи (вариационные производные действия материи по $\mathcal{A}_\alpha^\mu$) будут иметь правильные трансформационные свойства относительно группы нарушенных глобальных симметрий G . Впоследствии мы наложим на A_α^μ условие (21.4.3) и будем рассматривать $\mathcal{A}_\alpha^\mu$ как квантовое поле, добавив в лагранжиан соответствующее кинетическое слагаемое.

Чтобы исследовать эффекты, связанные с нарушением группы симметрий G до ее подгруппы H , будем следовать схеме вычислений из § 19.6. Прежде всего заменим ψ и A на новые поля $\tilde{\psi}$ и $\tilde{A}$:

$$\tilde{\psi} = \gamma^{-1}(\xi)\psi, \quad (21.4.6)$$

$$\tilde{A}_A^\mu = \sum_B D_{AB}(\gamma^{-1}(\xi))A_B^\mu, \quad (21.4.7)$$

где $\gamma(\xi)$ — стандартное G -преобразование, исключаяющее голдстоуновские степени свободы поля ψ , а $D(g)$ — представление G , даваемое калибровочными полями:

$$gT_A g^{-1} = \sum_B D_{BA}(g)T_B. \quad (21.4.8)$$

Голдстоуновские степени свободы отражены в пространственно-временной зависимости параметров ξ_a , функцией которых является $\gamma(\xi)$. Как и в § 19.6, и для локальных, и для глобальных преобразований формула (21.4.4) переходит в

$$\xi^a \rightarrow \xi^{a'} = f^a(\xi, g), \quad (21.4.9)$$

$$\tilde{\psi} \rightarrow \tilde{\psi}' = h(\xi, g)\tilde{\psi}, \quad (21.4.10)$$

где h и f определены согласно

$$g\gamma(\xi) = \gamma(f(\xi, g))h(\xi, g) \quad (21.4.11)$$

и h принадлежит ненарушенной подгруппе симметрий H . Нам нужно также найти закон преобразования для $\tilde{A}_A^\mu$. Согласно (21.4.5) относительно локальных преобразований линейные комбинации калибровочных полей в (21.4.2) преобразуются как

$$\sum_A T_A A_{A\mu} \rightarrow \sum_A T_A A'_{A\mu} = g \left[\sum_A T_A A_{A\mu} - ig^{-1} \partial_\mu g \right] g^{-1}.$$

Умножая слева на $\gamma^{-1}(\xi')$ и справа на $\gamma(\xi')$ и используя формулы (21.4.7), (21.4.8) и (21.4.11), последнее выражение можно переписать в виде

$$i \sum_A T_A \tilde{A}_{A\mu} = h(\xi, g) \left[i \sum_A T_A \tilde{A}_{A\mu} + \gamma^{-1}(\xi) [g^{-1} \partial_\mu g] \gamma(\xi) \right] h^{-1}(\xi, g). \quad (21.4.12)$$

Чтобы понять, как уничтожить неоднородное слагаемое $g^{-1} \partial_\mu g$, заметим, что после дифференцирования соотношения (21.4.11) и последующего умножения на соответствующую обратную величину получим

$$\gamma^{-1}(\xi') \partial_\mu \gamma(\xi') = h(\xi, g) \gamma^{-1}(\xi) [g^{-1} \partial_\mu g] \gamma(\xi) h^{-1}(\xi, g) + h(\xi, g) [\gamma^{-1}(\xi) \partial_\mu \gamma(\xi)] h^{-1}(\xi, g) + h(\xi, g) \partial_\mu h^{-1}(\xi, g). \quad (21.4.13)$$

Поэтому для исключения неоднородного члена нам следует вычесть (21.4.12) из (21.4.13):

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\xi') \partial_\mu \gamma(\xi') - i \sum_A T_A \tilde{A}'_{A\mu} &= \\ &= h(\xi, g) \left[\gamma^{-1}(\xi) \partial_\mu \gamma(\xi) - i \sum_A T_A \tilde{A}_{A\mu} \right] h^{-1}(\xi, g) - [\partial_\mu h(\xi, g)] h^{-1}(\xi, g). \end{aligned} \quad (21.4.14)$$

Определим новые калибровочно ковариантные объекты $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ согласно

$$\sum_a i \mathcal{D}_{a\mu} x_a + \sum_i i \mathcal{E}_{i\mu} t_i \equiv \gamma^{-1}(\xi) \partial_\mu \gamma(\xi) - i \sum_A T_A \tilde{A}_{A\mu} \quad (21.4.15)$$

и зададим их трансформационные свойства:

$$\mathcal{D}_{a\mu} \rightarrow \mathcal{D}'_{a\mu}, \quad \mathcal{E}_{i\mu} \rightarrow \mathcal{E}'_{i\mu}, \quad (21.4.16)$$

где

$$\sum_a \mathcal{D}'_{a\mu} x_a = h(\xi, g) \left(\sum_a \mathcal{D}_{a\mu} x_a \right) h^{-1}(\xi, g), \quad (21.4.17)$$

$$\sum_i \mathcal{E}'_{i\mu} t_i = h(\xi, g) \left(\sum_i \mathcal{E}_{i\mu} t_i \right) h^{-1}(\xi, g) + i(\partial_\mu h(\xi, g)) h^{-1}(\xi, g), \quad (21.4.18)$$

аналогично соотношениям (19.6.26) и (19.6.27). При помощи $\mathcal{E}$ можно строить полностью ковариантные производные полей материи:

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi} = \partial_\mu \tilde{\psi} + i \sum_i t_i \mathcal{E}_{i\mu} \tilde{\psi}, \quad (21.4.19)$$

равно как и более высокие производные вида $\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}$ и т.д. Из-за неоднородного члена в (21.4.12), мы не можем просто ввести в лагранжиан величины $\tilde{A}_{A\mu}$ или ковариантные производные $\tilde{A}_{A\mu}$

типа (21.4.19). Однако несложно определить “ротор”, ковариантно преобразующийся относительно локальных $\mathcal{G}$ -преобразований и глобальных G -преобразований. Положим

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} \equiv \sum_B D_{AB}(\gamma^{-1}(\xi)) \left(\partial_\mu A_{B\nu} - \partial_\nu A_{B\mu} - \sum_{CD} C_{BCD} A_{C\mu} A_{D\nu} \right). \quad (21.4.20)$$

Под действием формальных локальных G -преобразований эта величина преобразуется согласно

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}'_{A\mu\nu} = \sum_B \mathcal{D}_{AB}(h(\xi, g)) \tilde{F}_{B\mu\nu}. \quad (21.4.21)$$

Следовательно, лагранжиан, являющийся произвольной функцией $\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_{a\mu}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}$, $\tilde{F}_{A\mu\nu}$ и высших ковариантных производных и обладающий глобальной H -инвариантностью, с необходимостью будет формально инвариантен и относительно локальных G -преобразований.

Теперь вернемся к нашему исходному случаю и будем рассматривать A_A^μ как квантовое поле вида (21.4.3). Соотношения (21.4.15) и (21.4.20) перейдут в

$$\sum_a i \mathcal{D}_{a\mu} x_a + \sum_i i \mathcal{E}_{i\mu} t_i = \gamma^{-1} \partial_\mu \gamma(\xi) - i \sum_{AB\alpha} T_A D_{AB}(\gamma^{-1}(\xi)) e_{\alpha B} \mathcal{A}_{\alpha\mu} \quad (21.4.22)$$

и

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} = \sum_{B\alpha} D_{AB}(\gamma^{-1}(\xi)) e_{\alpha B} \mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}, \quad (21.4.23)$$

где

$$\mathcal{F}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\beta\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\beta\mu} - \sum_{\gamma\delta} \mathcal{C}_{\beta\gamma\delta} \mathcal{A}_{\gamma\mu} \mathcal{A}_{\delta\nu}, \quad (21.4.24)$$

а $\mathcal{C}_{\beta\gamma\delta}$ — структурные константы калибровочной группы, связанные со структурными константами G посредством соотношений

$$\sum_{CD} C_{BCD} e_{\gamma C} e_{\delta D} = \sum_{\beta} \mathcal{C}_{\beta\gamma\delta} e_{\beta B}. \quad (21.4.25)$$

В качестве кинетического слагаемого для этого поля введем в лагранжиан обычный янг-миллсовский член

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha\mu\nu} \mathcal{F}_{\alpha}^{\mu\nu}, \quad (21.4.26)$$

в котором при помощи линейного преобразования $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ и $e_{\alpha A}$ мы положили коэффициент при $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu} \mathcal{F}_{\beta}^{\mu\nu}$ равным $\delta_{\alpha\beta}$. Линейный член в $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}$ равен просто $\partial_\mu \mathcal{A}_{\alpha\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\alpha\mu}$, так что выбор (21.4.26) делает $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ канонически нормализованным векторным полем. Плотность эффективного лагранжиана должна, следовательно, быть суммой функции полей $\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{\psi}$ и $\mathcal{D}_{a\mu}$, инвариантной относительно

глобальных H -преобразований, и некоторых членов, инвариантных относительно $\mathcal{G}$ (но не G), коэффициенты при которых содержат два или более множителей $e_{\alpha A}$.

Как может выглядеть теория возмущений, построенная на основе развитого выше формализма? Мы знаем, что в пределе $e_{\alpha A} \rightarrow 0$ калибровочные бозоны становятся безмассовыми и перестают взаимодействовать со спонтанно нарушающими симметрию полями материи. Сделаем предположение, что их масса при малых $e_{\alpha A}$ имеет порядок eM , где e — характерное значение $e_{\alpha A}$ (считаем, что генераторы T_A нормированы на структурные константы порядка единицы), а M — характерный масштаб энергий для динамики, приводящей к спонтанному нарушению симметрии. Рассмотрим произвольную фейнмановскую диаграмму, содержащую калибровочные и голдстоуновские бозоны с энергиями (импульсами) порядка $Q \lesssim eM$. Все частицы с более высокими энергиями или импульсами, а также все более тяжелые частицы материи будем полагать учтенными в поправках к константам связи в эффективной теории поля. Наша теория возмущений будет давать разложения по степеням e и Q/M . Анализ, аналогичный проведенному в §§ 19.4–19.6, показывает, что полное число степеней e и Q/M для такой диаграммы равно

$$\nu = \sum_i V_i(d_i + e_i - 2) + 2L + 2, \quad (21.4.27)$$

где V_i — число вершин типа i , d_i — число операторов дифференцирования в слагаемом для взаимодействия типа i , e_i — число множителей $e_{\alpha A}$ в таком слагаемом, L — число петель. При выполнении условия (21.4.3) поля $A_{A\mu}$ и $\tilde{A}_{A\mu}$ дают по одному множителю e . Из (21.4.15) следует, что каждая ковариантная производная голдстоуновского бозона $\mathcal{D}_{a\mu}$ дает вклад $+1$ в $d_i + e_i$, а из (21.4.19) и (21.4.15) видно, что каждая дополнительная ковариантная производная $\mathcal{D}_{a\mu}$ увеличивает $d_i + e_i$ еще на $+1$. Для всех допустимых членов в лагранжиане имеем $d_i + e_i \geq 2$, так что доминирующий вклад дают древесные диаграммы, построенные только при помощи взаимодействий с $d_i + e_i = 2$. Единственными такими взаимодействиями являются кинетический член для голдстоуновского бозона

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}^2 \mathcal{D}_{a\mu} \mathcal{D}_b^\mu, \quad (21.4.28)$$

янг-миллсовский член (21.4.26) и, возможно, некоторые из нарушающих симметрию слагаемых, имеющих второй порядок по $e_{\alpha A}$.

Чтобы понять физический смысл поля ξ_a , заметим, что линейная часть $\mathcal{D}_{\alpha\mu}$ равна

$$(\mathcal{D}_{a\mu})_{\text{LIN}} = \partial_\mu \xi_a - \sum_\alpha e_{\alpha a} \mathcal{A}_{\alpha\mu}. \quad (21.4.29)$$

Как показано в приложении к этой главе, мы всегда можем выбрать “унитарную калибровку”, в которой для всех α выполнено соотношение

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \xi_a e_{ab} = 0, \quad (21.4.30)$$

обеспечивающее взаимное уничтожение перекрестных членов в (21.4.28). Чтобы прояснить смысл этого условия, рассмотрим частный случай, когда все нарушенные симметрии являются калибровочными. Тогда любой генератор x_a можно представить в виде линейной комбинации калибровочных генераторов и генераторов ненарушенной симметрии:

$$x_a = \sum_{\alpha} c_{a\alpha} \mathcal{T}_{\alpha} + \sum_i c_{ai} t_i = \sum_{\alpha} c_{a\alpha} \left(\sum_b e_{ab} x_b + \sum_i e_{\alpha i} t_i \right) + \sum_i c_{ai} t_i,$$

и потому

$$\sum_{\alpha} c_{a\alpha} e_{ab} = \delta_{ab}.$$

После взятия свертки (21.4.30) с c_{ab} получаем $\xi_a = 0$; в такой калибровке голдстоуновские бозоны отсутствуют. В общем случае соотношение (21.4.30) означает, что имеются лишь голдстоуновские бозоны, не соответствующие калибровочным симметриям. Некоторые из них связаны с элементами G , для которых симметрия оказывается нарушенной за счет калибровочных взаимодействий; они имеют массы, квадратичные по калибровочным константам связи и называются псевдоголдстоуновскими бозонами.

Если ξ выбирается исходя из условия унитарной калибровки (21.4.30), квадратичная часть лагранжиана принимает простой вид

$$(\mathcal{L}_{\xi})_{\text{квад}} = -\frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}^2 \partial_{\mu} \xi_a \partial^{\mu} \xi_b - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 \mathcal{A}_{\alpha\mu} \mathcal{A}_{\beta}^{\mu}, \quad (21.4.31)$$

где

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = \sum_{ab} F_{ab}^2 e_{\alpha a} e_{\beta b}. \quad (21.4.32)$$

Из этого можно вывести два важных следствия. Во-первых, ξ_a можно выразить через канонически ортонормированное поле π_a по формуле

$$\xi_a = \sum_b F_{ab}^{-1} \pi_b, \quad (21.4.33)$$

где F_{ab} — положительный квадратный корень из неотрицательно определенной матрицы F_{ab}^2 . Следовательно, множители F_{ab}^{-1} аналогичны множителям F_{π}^{-1} , связанным с излучением и поглощением низкоэнергетических голдстоуновских бозонов. Во-вторых, поскольку $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ является стандартным образом нормированным векторным полем, из формулы (21.4.31) следует, что $\mu_{\alpha\beta}^2$ — квадрат массовой матрицы векторных бозонов. Соотношение (21.4.32) представляет собой универсальную формулу для массовой матрицы векторных бозонов,

справедливую во втором порядке по константам калибровочных взаимодействий, но в любом порядке по всем остальным константам связи. Подставляя (21.4.1) в (21.4.7), легко видеть, что полученный ранее результат (21.1.7) является частным случаем формулы (21.4.32) с

$$F_{ab}^2 = - \sum_{nml} (x_a)_{nm} (x_b)_{nl} v_m v_l.$$

Соотношение (21.4.32) можно также понять, основываясь на требовании непрерывности, аналогично тому, как это было сделано в конце § 21.1 (в несколько иных обозначениях). Оно гарантирует, что эффекты от обмена калибровочными бозонами, сохраняющиеся в пределе нулевых калибровочных констант связи, тождественны эффектам от обмена голдстоуновскими бозонами, существующими в отсутствие калибровочных взаимодействий.

В общем случае мы не можем найти матрицу F_{ab}^2 . Однако мы знаем, что она должна быть инвариантной относительно ненарушенной подгруппы симметрий H , т. е. должно выполняться соотношение

$$\sum_d [C_{ibd} F_{dc}^2 + C_{icd} F_{bd}^2] = 0.$$

Это равенство позволяет наложить важные ограничения на массы калибровочных бозонов (21.4.32).

В качестве примера рассмотрим электрослабую группу $SU(2) \times U(1)$, спонтанно нарушенную до группы электромагнитных симметрий $U(1)$. В качестве трех генераторов нарушенных симметрий x_a можно взять три генератора группы $SU(2)$ (t_1, t_2, t_3 в обозначениях § 21.3), не включающих константу связи g , а в качестве единственного генератора ненарушенной симметрии t — заряд q (без множителя e). При этом для лептонных дублетов x_a и t будут представлены матрицами

$$\vec{x} = \frac{1}{4} (1 + \gamma_5) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$t = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Калибровочные генераторы будут даваться формулами

$$\vec{\mathcal{T}} = g\vec{x}, \quad \mathcal{T}_y = g'(x_3 - t). \quad (21.4.34)$$

Таким образом, ненулевые коэффициенты $e_{\alpha a}$ при x_a в разложении калибровочного генератора $\mathcal{T}_\alpha$ будут равны

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = g, \quad e_{y3} = g'.$$

Далее, поскольку под действием t 3-вектор $\vec{x}$ поворачивается относительно третьей координатной оси, наличие такой ненарушенной

симметрии приводит к требованию, чтобы ненулевые элементы матрицы F_{ab}^2 были таковы

$$F_{11}^2 = F_{22}^2 \equiv F_C^2, \quad F_{33}^2 \equiv F_N^2.$$

Согласно (21.4.32) матрица квадратов масс калибровочных бозонов имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} \mu_{11}^2 &= \mu_{22}^2 = g^2 F_C^2, & \mu_{33}^2 &= g^2 F_N^2, \\ \mu_{3y}^2 &= gg' F_N^2, & \mu_{yy}^2 &= g'^2 F_N^2. \end{aligned}$$

Ее собственные значения равны

$$m_W^2 = g^2 F_C^2, \quad m_Z^2 = (g^2 + g'^2) F_N^2, \quad m_A^2 = 0. \quad (21.4.35)$$

Чтобы продвинуться дальше, нам необходимо соотношение, связывающее F_C и F_N . Его можно получить из условия инвариантности теории в пределе $g = g' = 0$ относительно группы глобальных симметрий G , большей $SU(2) \times U(1)$ (и спонтанно нарушающейся до подгруппы H , включающей трехмерные вращения, относительно которых $\vec{x}$ преобразуется как 3-вектор). Наличие такой ненарушенной симметрии привело бы к пропорциональности F_{ab}^2 скалярной матрице δ_{ab} , откуда

$$F_C = F_N.$$

Симметрия такого типа известна как “заключающая” симметрия. Из ее наличия следует, что отношение масс m_Z/m_W выражается через калибровочную константу связи по обсуждавшейся в § 21.3 формуле

$$\frac{m_Z}{m_W} = \sqrt{1 + \frac{g'^2}{g^2}} = \frac{1}{\sin \theta}. \quad (21.4.36)$$

Например, в отсутствие калибровочных взаимодействий лагранжиан (21.3.28) для скалярного дублета ϕ в простейшем варианте электрослабой $SU(2) \times U(1)$ теории может быть записан в виде

$$(\mathcal{L}_\phi)_{g=g'=0} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - \frac{\mu^2}{2} \phi_n \phi_n - \frac{\lambda}{4} (\phi_n \phi_n)^2,$$

где

$$\phi_1 \equiv \text{Im } \phi^+, \quad \phi_2 \equiv \text{Re } \phi^+, \quad \phi_3 \equiv \text{Im } \phi^0, \quad \phi_4 \equiv \text{Re } \phi^0.$$

Он автоматически оказывается инвариантным относительно “случайной” $SO(4) \equiv SU(2) \times SU(2)$ глобальной группы симметрий, которая спонтанно нарушается вакуумным средним поля $\text{Re } \phi^0$ до приближенной ненарушенной $SO(3)$ заключающей подгруппы [29]. Формула (21.4.36) остается справедливой и при наличии более одного скалярного дублета: несмотря на то что в этом случае массовый и взаимодействующий члены в скалярном лагранжиане, вообще говоря, не обладают заключающей симметрией, для проделанного выше вывода существенным является лишь кинетический член, который заведомо $SO(4)$ -симметричен.

Закрывающие симметрии могут возникать и в других теориях. Пусть, например, в теории нет скалярных полей, но имеются новые сверхсильные векторные калибровочные взаимодействия [30], называемые сверхцветовыми, в которых участвует новый $SU(2) \times U(1)$ -дублет (U_r, D_r) “сверхкварков” U_r и D_r , где r — индекс сверхцвета²⁾. Если левые и правые части U_r и D_r одинаково преобразуются относительно сверхцветовой калибровочной группы, в пределе нулевых констант электрослабых взаимодействий лагранжиан будет инвариантным относительно группы $SU(2) \times SU(2)$ независимых $SU(2)$ -преобразований левых и правых сверхкварковых дублетов. В соответствии с приведенными в §19.9 аргументами, симметрия относительно подгруппы $SU(2)_V$, состоящей из одновременных преобразований левых и правых сверхцветовых дублетов, не будет спонтанно нарушена. Естественно предположить, что сверхцветовые взаимодействия приведут к спонтанному нарушению $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии до $SU(2)_V$ (аналогично тому, как цветовые взаимодействия приводят к спонтанному нарушению киральной $SU(2) \times SU(2)$ -симметрии квантовой хромодинамики с нулевыми массами u - и d -кварков до изоспиновой подгруппы). Под действием ненарушенной $SU(2)_V$ -симметрии электрослабый генератор $\vec{x}$ (или $\vec{\mathcal{F}}$) преобразуется как 3-вектор при вращениях, что снова влечет равенство $F_C = F_N$ и справедливость формулы, успешно предсказывающей отношение масс частиц W и Z .

Гипотеза существования сверхцвета привлекательна тем, что она предоставляет естественный механизм нарушения электрослабой симметрии на характерном масштабе, значительно меньшем того, который обычно считается фундаментальным (в теории струн он дается планковской массой 10^{18} ГэВ). Необходимо лишь предположить, что непосредственно ниже фундаментального масштаба имеются ненарушенная калибровочная группа $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, соответствующая сильным и электрослабым взаимодействиям, и сверхцветовая калибровочная группа (все с достаточно малыми константами связи). Если сверхцветовые калибровочные взаимодействия обладают свойством асимптотической свободы, то при уменьшении энергии сверхцветовая константа связи будет медленно расти (как и константа связи КХД) и станет большой на энергиях, значительно меньших фундаментального масштаба. Энергия, при которой сверхцветовые взаимодействия станут сильными, определит характерный масштаб величин F_{ab} в формуле (21.4.32), т. е. масс калибровочных бозонов (предположительно, 300 ГэВ). Поскольку при уменьшении энергии константа связи растет логарифмически, умеренное различие в бета-функциях для цвета и сверхцвета может легко привести к различию

²⁾ Часто квантовое число “сверхцвет” называют “техницветом”, — от английского “technicolor”. (Примеч. ред.)

на три порядка между масштабами, на которых становятся сильными соответствующие взаимодействия.

К сожалению, несмотря на то что сверхцвет дает очень привлекательную картину спонтанного нарушения $SU(2) \times U(1)$ -симметрии, он не предлагает какого-либо механизма генерации масс кварков и лептонов. В связи с этим было предложено ввести дополнительные “расширенные сверхцветовые” взаимодействия, связывающие кварки и сверхкварки [31]. В таких теориях имеются определенные проблемы с изменяющимися аромат слабыми нейтральными токами; хотя возникающие трудности преодолимы, вводимые усложнения делают подобные теории менее привлекательными. Вопрос о выборе между слабо взаимодействующими элементарными скалярными полями и динамическим нарушением симметрии остается открытым.

§ 21.5. Объединенная теория сильных и электрослабых взаимодействий

В § 15.2 мы видели, что в калибровочной теории каждой простой подгруппе или $U(1)$ -подгруппе соответствует независимая константа взаимодействия. Так, электрослабая теория с калибровочной группой $SU(2) \times U(1)$ содержит две независимые константы связи g и g' . Чтобы уменьшить число свободных параметров, было предложено [32] вложить калибровочную группу $SU(2) \times U(1)$ в группу $SU(3)$, что давало бы $g' = g/\sqrt{3}$; однако это предсказание противоречило эксперименту. После построения квантовой электродинамики теоретики рассматривали калибровочную группу $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, которая соответствует теории с тремя независимыми параметрами — константой сильных взаимодействий g_s и константами электрослабых взаимодействий g и g' . Чтобы свести произвол к одному параметру, предлагалось вложить группу $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ в различные простые группы Ли¹⁾: $SU(4)$ [33], $SU(5)$ [34], $SO(10)$ [35]. Подобные модели обычно называют теориями великого объединения.

К счастью, отношения констант взаимодействия для подгрупп $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ оказываются для приведенных выше моделей (и для широкого класса других моделей) не зависящими от деталей их реализации [36]. Такие теории характеризуются тем, что в них тремя наблюдаемыми поколениями кварков и лептонов исчерпываются все фермионы (по крайней мере, все фермионы, не являющиеся нейтральными относительно группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$).

Как было показано в § 15.2, для любой компактной простой группы Ли можно выбрать генераторы T_α так, что все структурные констан-

¹⁾ Группа $SU(4) \times SU(4)$ становится простой после включения дискретной симметрии, переставляющей две $SU(4)$ -компоненты.

ты окажутся полностью антисимметричными, а в любом приводимом или неприводимом представлении D будет выполнено условие нормировки

$$\text{Tr}\{T_\alpha T_\beta\} = N_D \delta_{\alpha\beta}. \quad (21.5.1)$$

Мы предполагаем, что все левые фермионы образуют n_g поколений:

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L & \cdots, \\ \bar{e}_R & \bar{\mu}_R & \bar{\tau}_R & \cdots, \\ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L & \cdots, \\ \bar{u}_R & \bar{c}_R & \bar{t}_R & \cdots, \\ \bar{d}_R & \bar{s}_R & \bar{b}_R & \cdots \end{array}$$

В группе $SU(3)$ генератор $(1/2)g_s\lambda_3$ имеет следующие собственные значения: $+(1/2)g_s$ для красных кварковых дублетов и белых антикварковых синглетов; $-(1/2)g_s$ для белых кварковых дублетов и красных антикварковых синглетов; 0 для всех остальных левых фермионов. Таким образом, след его квадрата равен

$$\text{Tr}\left(\frac{1}{2}g_s\lambda_3\right)^2 = 4n_g \times \left(\frac{1}{2}g_s\right)^2 + 4n_g \times \left(-\frac{1}{2}g_s\right)^2 = 2n_g g_s^2. \quad (21.5.2)$$

Генератор t_3 группы $SU(2)$ имеет следующие собственные значения: $(1/2)g$ для красных, белых и синих кварков заряда $2/3$ и нейтрино; $-(1/2)g$ для красных, белых и синих кварков заряда $-1/3$ и заряженных лептонов; 0 для всех остальных фермионов. Таким образом, след его квадрата равен

$$\text{Tr}(t_3)^2 = [3n_g + n_g] \times \left[\left(\frac{1}{2}g\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}g\right)^2\right] = 2n_g g^2. \quad (21.5.3)$$

Наконец, генератор $y = t_3 - q$ группы $U(1)$ имеет следующие собственные значения: $(1/2)g'$ для нейтрино и заряженных лептонов; $-g'$ для заряженных антилептонов; $-(1/6)g'$ для кварков; $(2/3)g'$ для антикварков заряда $-2/3$; $-(1/3)g'$ для антикварков заряда $+1/3$. Таким образом, след его квадрата равен

$$\begin{aligned} \text{Tr } y^2 = 2n_g \left(\frac{1}{2}g'\right)^2 + n_g (-g')^2 + 6n_g \left(-\frac{1}{6}g'\right)^2 + 3n_g \left(\frac{2}{3}g'\right)^2 + \\ + 3n_g \left(-\frac{1}{3}g'\right)^2 = \frac{10}{3}n_g g'^2. \end{aligned} \quad (21.5.4)$$

Из формулы (21.5.1) следует, что величины (21.5.2)–(21.5.4) все равны между собой, и в рассматриваемом классе моделей вложение группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ в простую группу Ли влечет выполнение соотношений

$$g_s^2 = g^2 = \frac{5}{3}g'^2. \quad (21.5.5)$$

Однако формула (21.5.5) сильно не согласуется с наблюдаемыми значениями констант взаимодействия. Из равенства $g'^2/g^2 = 3/5$ для угла электрослабого смешивания следует формула $\sin^2 \theta \equiv g'^2/(g^2 + g'^2) = 3/8$, в то время как экспериментально измеренное значение соответствует $\sin^2 \theta = 0,231$. Более того, константа сильного взаимодействия g_s^2 значительно превосходит g^2 и g'^2 .

Решение возникшей проблемы [36] состоит в том, что подобные (21.5.5) соотношения для констант взаимодействий применимы лишь для констант связи, измеренных на масштабах энергий M порядка характерных масс [47] калибровочных бозонов, становящихся массивными при спонтанном нарушении калибровочной симметрии от полной простой группы до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Если энергия E , для которой проводятся измерения констант связи, значительно меньше M , возникнут большие радиационные поправки, пропорциональные $\ln(M/E)$.

Как подчеркивалось в гл. 19, в соотношениях для констант, измеренных на близких энергиях μ и $\mu - d\mu$, большие логарифмы не возникают. При помощи интегрирования таких соотношений от M до E можно получить выражения для констант связи на энергиях порядка $E \ll M$, не содержащие больших логарифмов. Для возможности такой процедуры необходимо лишь, чтобы константы взаимодействия оставались малыми во всем рассматриваемом интервале. В случае группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ с n_g поколениями фермионов из (18.7.2) получаем, что²⁾

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_s(\mu) = -\frac{g_s^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{n_g}{3} \right), \quad (21.5.6)$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = -\frac{g^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{6} - \frac{n_g}{3} \right), \quad (21.5.7)$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} g'(\mu) = -\frac{g'^3(\mu)}{4\pi^2} \left(-\frac{5n_g}{9} \right). \quad (21.5.8)$$

²⁾ Согласно формуле (18.7.2) второе слагаемое в скобках в (21.5.6) и (21.5.7) равно $-n_f/6$, где n_f — число фермионов в определяющем представлении соответствующей калибровочной группы $SU(N)$. Однако это выражение было получено в предположении, что левые и правые фермионы принадлежат одному и тому же представлению калибровочной группы. Если учитывать только левые фермионы и антифермионы, второй член в скобках в (21.5.6) и (21.5.7) будет равен $-n_f/12$. Для группы $SU(3)$ имеем два левых кварковых триплета и два левых антикварковых триплета в каждом поколении, так что $n_f = 4n_g$, в то время как для группы $SU(2)$ имеем три левых кварковых дублета и один левый лептонный дублет в каждом поколении, так что снова $n_f = 4n_g$. В случае группы $U(1)$ бета-функция равна произведению $g'/24\pi^2$ на сумму квадратов $U(1)$ -зарядов левых фермионов и антифермионов (см. (18.2.38)), что в соответствии с (21.5.4) есть $(g'^2/24\pi^2) \times (10n_g g'^2/3)$.

Решения этих уравнений имеют вид

$$\frac{1}{g_s^2(\mu)} = \frac{1}{g_s^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(11 - \frac{4n_g}{3}\right) \ln\left(\frac{M}{\mu}\right), \quad (21.5.9)$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{22}{3} - \frac{4n_g}{3}\right) \ln\left(\frac{M}{\mu}\right), \quad (21.5.10)$$

$$\frac{1}{g'^2(\mu)} = \frac{1}{g'^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(-\frac{20n_g}{9}\right) \ln\left(\frac{M}{\mu}\right), \quad (21.5.11)$$

Далее, соотношение (21.5.5) следует понимать как

$$g_s^2(M) = g^2(M) = \frac{5}{3} g'^2(M). \quad (21.5.12)$$

Следовательно, можно оценить величины констант взаимодействий (21.5.12) и число поколений, рассмотрев разность (21.5.10) и (21.5.9):

$$\frac{1}{g_s^2(\mu)} - \frac{1}{g^2(\mu)} = -\frac{11}{24\pi^2} \ln\left(\frac{M}{\mu}\right), \quad (21.5.13)$$

а также разность (21.5.10) и умноженного на $3/5$ соотношения (21.5.11):

$$\frac{1}{g^2(\mu)} - \frac{3}{5g'^2(\mu)} = -\frac{11}{12\pi^2} \ln\left(\frac{M}{\mu}\right). \quad (21.5.14)$$

Поделив два последних уравнения одно на другое, получим формулу для угла смешивания $\sin^2 \theta \equiv g'^2/(g^2 + g'^2)$:

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{6} + \frac{5e^2(m_Z)}{9g_s^2(m_Z)}. \quad (21.5.15)$$

В полученном выражении мы положили μ равным характерной энергии процесса, используемого для измерения $\sin^2 \theta$, т.е. $\mu \approx m_Z$. Преимущество такого выбора в том, что уравнения ренормгруппы (21.5.6)–(21.5.8) используются лишь на энергиях выше m_Z , где спонтанное нарушение $SU(2) \times U(1)$ -симметрии не оказывает на них серьезного влияния. Кроме того, из соотношений (21.5.13) и (21.5.14) можно получить выражение для масштаба объединения M :

$$\ln\left(\frac{M}{m_Z}\right) = \frac{4\pi^2}{11e^2} \left(1 - \frac{8e^2(m_Z)}{3g_s^2(m_Z)}\right), \quad (21.5.16)$$

где мы снова положили μ по порядку величины равным m_Z , чтобы избежать необходимости учитывать влияние спонтанного нарушения электрослабой симметрии на уравнения ренормгруппы.

В § 18.2 мы видели, что значение $e(\mu)$ при $\mu \approx m_Z$ равно $e(m_Z)^2/4\pi = (128,87 \pm 0,12)^{-1}$. Такова величина заряда, определенно-го обычным образом (по Гелл-Манну и Лоу), т.е. через поляризацию вакуума. Для сравнения с g_s , g' и g лучше использовать константы, определенные по модифицированной схеме минимального вычитания (см. § 18.6), при этом $e(m_Z)^2/4\pi = (127,9 \pm 0,1)^{-1}$. Наибольшая

неопределенность в (21.5.13) и (21.5.14) связана с величиной $g_s^2(m_Z)$. Как было указано в § 18.7, экстраполяция g_s по результатам низкоэнергетических измерений дает $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0,118 \pm 0,006$, в то время как прямые измерения скорости распада Z^0 на адроны соответствуют $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0,120 \pm 0,0025$. Полагая $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0,118$ и $e(m_Z)^2/4\pi = 1/128$, из (21.5.15) и (21.5.16) получим $\sin^2 \theta = 0,203$ и $M \approx 1,1 \times 10^{15}$ ГэВ.

Как было отмечено в § 21.3, нет оснований полагать, что подавленные неперенормируемые члены в описывающем физику на обычных энергиях лагранжиане сохраняют барионные и лептонные числа. Следовательно, можно ожидать наличия $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -сохраняющего четырехфермионного взаимодействия (трех кварков и лептона), коэффициент перед которым имеет (из размерных соображений) порядок M^{-2} . Время жизни протона впервые было оценено именно из таких соображений как 10^{32} лет [36]. Подобные четырехфермионные взаимодействия, не сохраняющие числа кварков и лептонов, возникают в моделях типа описанных в ссылках 33–35 в результате обмена калибровочными бозонами с массами порядка M . Вообще, после того как в рамках стандартной модели было показано, что процессы с несохранением чисел барионов и лептонов оказываются естественным образом подавленными, исчезли все причины полагать, что эти числа должны точно сохраняться.

Мы видели, что предсказание теории (21.5.15) для угла смешивания оказывается довольно близким к измеренному значению $0,23$ величины $\sin^2 \theta$. Однако точность измерений и вычислений достаточно высока для того, чтобы убедиться в различии этих величин. Дополнительные частицы, имеющиеся в суперсимметричных теориях, устраняют остающуюся невязку [36a] и приводят к оценке $M \simeq 2 \times 10^{16}$ ГэВ, примерно на порядок большей полученной выше [36b]. Любопытно, что такое значение M оказывается не столь далеким от энергии 10^{18} ГэВ, на которой становятся сильными гравитационные взаимодействия. Большее значение M приводит также к увеличению времени жизни протона, которое пропорционально M^4 .

§ 21.6. Сверхпроводимость ¹⁾

Явление сверхпроводимости сильно отличается от физики элементарных частиц, составляющей основную тему этой книги. Однако по ряду причин ей все же стоит уделить внимание: исторически сверхпроводимость дает самый ранний реалистический пример теории со спонтанным нарушением калибровочной симметрии, и, кроме того,

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

она представляет собой особенно наглядный пример успешного использования эффективных теорий поля и применения в теории поля топологических методов.

Сверхпроводник – это материал, в котором спонтанно нарушена электромагнитная калибровочная симметрия²⁾. Для того чтобы выяснить причины этого нарушения и определить температуру, при которой оно происходит, необходимо построение детальных динамических теорий. Однако последние не являются необходимыми для вывода наиболее интересных свойств сверхпроводников: выталкивания магнитного поля, квантования потока, исчезновения сопротивления электрическому току, возникновения осцилляций тока между двумя сверхпроводниками, находящимися при различных напряжениях. Ниже мы увидим, что эти следствия нарушения калибровочной инвариантности можно получить способом, аналогичным использованному при рассмотрении свойств мягких пионов, основываясь исключительно на общих свойствах голдстоуновских мод [39].

Для любой системы действие должно быть инвариантным относительно калибровочных преобразований, которые в системе единиц СГС имеют вид

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (21.6.1)$$

$$\psi_n(x) \rightarrow \exp(iq_n \Lambda(x)/\hbar) \psi_n(x), \quad (21.6.2)$$

где $\Lambda(x)$ произвольная функция, а q_n – заряд, уничтожаемый полем ψ_n . Предполагается, что все заряды кратны заряду электрона $-e$, так что возникающая группа компактна: фазы Λ и $\Lambda + 2\pi\hbar/e$ считаются одинаковыми. Примем, что в сверхпроводнике эта группа симметрий нарушается за счет возникновения ненулевых вакуумных средних у операторов заряда $-2e$ (например, произведений двух электронных полей) до подгруппы Z_2 , состоящей из калибровочных преобразований с $\Lambda = 0$ и $\Lambda = \pi\hbar/e$.

Введем голдстоуновское бозонное поле $\phi(x)$, переписав все заряженные поля в виде

$$\psi_n(x) = \exp(iq_n \phi(x)/\hbar) \tilde{\psi}_n(x). \quad (21.6.3)$$

Поле $\phi(x)$ параметризует факторпространство $U(1)/Z_2$ и потому под действием калибровочных преобразований должно изменяться со-

²⁾ Исторически сверхпроводимость обычно рассматривали с другой точки зрения. В ранних феноменологических теориях электромагнитная калибровочная симметрия оказывалась нарушенной, но это воспринималось скорее как досадная неприятность, а не как ключевой эффект. В пионерской работе Бардина, Купера и Шриффера [37], в которой впервые была предложена микроскопическая теория сверхпроводимости, нарушение симметрии не упоминается вообще. Впоследствии на важность нарушения симметрии указал Андерсон [38], но даже сегодня в большинстве учебников сверхпроводимость излагается в терминах конкретных динамических моделей, а наличие нарушенной симметрии упоминается редко.

гласно

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \Lambda(x). \quad (21.6.4)$$

Поскольку $\phi(x)$ параметризует $U(1)/Z_2$, а не $U(1)$, мы должны отождествлять $\phi(x)$ с $\phi(x) + \pi\hbar/e$. Все поля $\tilde{\psi}_n(x)$ калибровочно-инвариантны, и после интегрирования по ним лагранжиан станет калибровочно-инвариантным функционалом, зависящим лишь от полей A^μ и ϕ . Следовательно, лагранжиан для голдстоуновского и электромагнитного полей можно записать как

$$L = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + L_s[A_\mu - \partial_\mu\phi], \quad (21.6.5)$$

где L_s — частично известный функционал. Электрический ток и плотность заряда равны

$$\mathbf{J}(x) = \frac{\delta L_s}{\delta \mathbf{A}(x)}, \quad (21.6.6)$$

$$J^0(x) = -\frac{\delta L_s}{\delta A^0(x)} = -\frac{\delta L_s}{\delta \dot{\phi}(x)}. \quad (21.6.7)$$

Уравнения движения для поля голдстоуновских бозонов принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L_s}{\delta \dot{\phi}(x)} = \frac{\delta L_s}{\delta \phi(x)} = \nabla \cdot \frac{\delta L_s}{\delta \mathbf{A}(x)}, \quad (21.6.8)$$

что в свете (21.6.6) и (21.6.7) эквивалентно закону сохранения электрического заряда

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} J^0 = 0. \quad (21.6.9)$$

Воспользуемся теперь развитым формализмом для объяснения необычных свойств сверхпроводников. Относительно L_s нам нужно будет сделать лишь одно предположение: будем считать, что в отсутствие голдстоуновских или внешних электромагнитных полей система стабильна, т. е. энергия имеет по крайней мере локальный минимум при $A_\mu = \partial_\mu\phi$, где вторые производные по $A_\mu - \partial_\mu\phi$ не обращаются в нуль.

Одним из непосредственных следствий является то, что глубоко внутри массивного сверхпроводника (где граничные условия становятся несущественными) электромагнитное поле будет чистой калибровкой:

$$A_\mu = \partial_\mu\phi. \quad (21.6.10)$$

В частности, магнитное поле должно обращаться в нуль. Этот эффект известен как *эффект Мейсснера*. Можно получить более точное количественное определение понятия “глубоко внутри массивного сверхпроводника”. Поскольку энергия имеет минимум при выполнении условия (21.6.10), при малых значениях $|\mathbf{A} - \nabla\phi|$ она должна иметь порядок

$$|\mathbf{A} - \nabla\phi|^2 L^3 / \lambda^2,$$

где λ — некоторая длина, зависящая от материала сверхпроводника,

а L^3 — его объем. Если магнитное поле величины B проникает в сверхпроводник, то $|\mathbf{A} - \nabla\phi|$ можно оценить как BL , так что наличие в сверхпроводнике магнитного поля требует энергии $B^2 L^5 / \lambda^2$. С другой стороны, исключение магнитного поля из объема L^3 соответствует проигрышу в энергии порядка $B^2 L^3$. Таким образом, слабое магнитное поле выталкивается из сверхпроводника при выполнении условия $B^2 L^5 / \lambda^2 \gg B^2 L^3$, т.е. $L \gg \lambda$. В связи с этим величину λ называют *глубиной проникновения* магнитного поля в сверхпроводник.

Аналогичные энергетические соображения показывают, что для любого сверхпроводящего материала существует критическое магнитное поле, выше которого сверхпроводимость разрушается. Наличие сверхпроводимости при нулевом значении магнитного поля означает, что объемная плотность энергии в нормальном состоянии выше, чем в сверхпроводящем (скажем, на величину Δ). При помещении массивного сверхпроводника с линейными размерами много больше λ в магнитное поле B последнее выталкивается из объема сверхпроводника, что приводит к равному $B^2/2$ проигрышу в плотности энергии. Поэтому материалу выгодно находиться в сверхпроводящем состоянии, если и только если магнитное поле не превосходит критического значения

$$B_c = \sqrt{2\Delta}. \quad (21.6.11)$$

(Эта формула справедлива для однородных сверхпроводников. Как мы увидим ниже, для некоторых типов сверхпроводников возможно существование сверхпроводящего состояния в большей части объема материала при наличии магнитного поля, величина которого находится в некотором конечном интервале выше значения B_c . При этом образуются тонкие вихревые линии, вблизи оси которых материал находится в нормальном состоянии.) Магнитное поле величины $B < B_c$ проникает в сверхпроводник на глубину λ , но и в этом слое сверхпроводимость не разрушается; из полевых уравнений $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}$ следует, что именно в поверхностном слое сверхпроводника и циркулируют электрические токи.

Рассмотрим теперь толстую сверхпроводящую проволоку (с толщиной, много большей λ), согнутую в виде замкнутого кольца. Можно построить замкнутый контур $\mathcal{C}$, проходящий глубоко внутри проволоки; в точках такого контура величина $|\mathbf{A} - \nabla\phi|$ равна нулю. Это не означает, что $\mathbf{A}$ или ϕ обращаются в нуль в точках $\mathcal{C}$, но после обхода контура фаза ϕ должна иметь значение, эквивалентное исходному. Следовательно, она может измениться лишь на величину $n\pi\hbar/e$, где n — целое число. Из теоремы Стокса получаем, что поток магнитного поля через поверхность $\mathcal{A}$, натянутую на контур $\mathcal{C}$, удовлетворяет закону квантования потока

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{x} = \frac{n\pi\hbar}{e}. \quad (21.6.12)$$

Электрический ток, обеспечивающий выполнение (21.6.12), течет в слое толщины λ вблизи поверхности сверхпроводящего кольца. Из закона квантования потока следует, что этот ток не может уменьшаться непрерывно (а может лишь испытывать скачки, при которых поток (21.6.12) уменьшается на величину, кратную $\pi\hbar/e$). Поэтому обычного сопротивления электрическому току сверхпроводник оказывать не может.

Отсутствие сопротивления электрическому току в сверхпроводнике можно показать и в более общем контексте, рассматривая нестационарные явления в сверхпроводниках. Заметим, что из соотношения (21.6.7) следует, что величины $-J^0$ и ϕ канонически сопряжены. Гамильтониан H_s поэтому необходимо рассматривать как функционал ϕ и J^0 , а не как функционал ϕ и $\dot{\phi}$. Временная динамика ϕ описывается уравнением

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\delta H_s}{\delta(-J^0(x))}. \quad (21.6.13)$$

Далее, “потенциал” $V(x)$ в некоторой точке представляет собой вариационную производную плотности энергии по плотности заряда, так что из (21.6.13) для временной зависимости голдстоуновского бозонного поля получаем

$$\dot{\phi}(x) = -V(x). \quad (21.6.14)$$

Отсюда следует, что часть сверхпроводника, по которой течет постоянный во времени ток, должна обладать нулевой разностью потенциалов между своими концами — в противном случае поле $\phi(x)$ имело бы переменный во времени градиент. Нулевая разность потенциалов при конечном значении тока и означает равенство сопротивления нулю.

Рассмотрим теперь зазор между двумя сверхпроводниками. В отсутствие каких-либо пространственных градиентов вдоль граничных поверхностей и при нулевом векторном потенциале из калибровочной инвариантности следует, что величина L_s может зависеть лишь от разности $\Delta\phi$ значений голдстоуновского бозонного поля на границах зазора:

$$L_s = \mathcal{A}F(\Delta\phi), \quad (21.6.15)$$

где $\mathcal{A}$ — площадь граничной поверхности. Более того, изменение величины ϕ для любого из сверхпроводников на величину, кратную $\pi\hbar/e$ не имеет никаких физических последствий, так что функция F должна быть периодичной³⁾:

$$F(\Delta\phi) = F(\Delta\phi + \pi\hbar n/e). \quad (21.6.16)$$

³⁾ Эта функция была найдена Джозефсоном [40], который показал, что она пропорциональна $\cos(2e\Delta\phi/\hbar)$. Однако эта формула является приближенной, в то время как периодичность — точный результат.

Через такой зазор течет ток, который можно вычислить, рассматривая контакт в присутствии векторного потенциала $\mathbf{A}$. Из калибровочной инвариантности следует, что теперь функция F должна зависеть не от разности фаз $\Delta\phi$, а от

$$\Delta_A\phi = \int \mathbf{dx} \cdot (\nabla\phi - \mathbf{A}),$$

где интеграл берется по кривой, соединяющей два берега контакта. Согласно (21.6.6) плотность тока будет равна

$$\mathbf{J} = \frac{\delta L_s}{\delta \mathbf{A}} = -\hat{\mathbf{n}}F'(\Delta\phi),$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор, перпендикулярный граничным поверхностям. После исключения векторного потенциала для тока получаем выражение

$$\mathbf{J} = -\hat{\mathbf{n}}F'(\Delta\phi). \quad (21.6.17)$$

Если мы теперь предположим, что потенциалы обоих сверхпроводников поддерживаются постоянными (а разность потенциалов равна ΔV), то из (21.6.16) для разности значений голдстоуновских бозонных полей будет следовать формула

$$\Delta\phi = -t\Delta V + \text{const.} \quad (21.6.18)$$

Подставляя этот результат в (21.6.17) и используя соотношение (21.6.16), видим, что ток осциллирует с частотой

$$\nu = \frac{e|\Delta V|}{\pi\hbar}. \quad (21.6.19)$$

Это явление называется *эффектом Джозефсона* [40]. Частоты и напряжения могут быть измерены с очень высокой точностью, так что этот эффект позволяет очень точно измерить отношение $e\hbar$.

Как было отмечено в конце § 19.6, описание системы с нарушенной симметрией в терминах одних лишь голдстоуновских мод становится неадекватным вблизи точки, где симметрия становится ненарушенной. В такой ситуации помимо голдстоуновских мод существуют также другие моды, имеющие почти нулевую частоту в длинноволновом пределе. Вместе с голдстоуновскими модами они дают *линейное* представление группы симметрии (обычно оказывающееся неприводимым), известное как параметр порядка. Естественно предположить, что однородный сверхпроводник, находящийся в медленно меняющемся внешнем электромагнитном поле, описывается *локальным* параметром порядка: любая нелокальность с необходимостью требует наличия микроскопически определяемого масштаба длины (например, среднего междоузликового расстояния), но все такие длины значительно меньше характерных пространственных масштабов изменения голдстоуновских или электромагнитных полей. В случае

сверхпроводимости относительно природы параметра порядка нет никаких сомнений. Единственное нетривиальное линейное представление группы $U(1)$ дается действительным 2-вектором ψ_n , т. е. голдстоуновской модой ϕ и полем модуля ρ :

$$\psi_1 + i\psi_2 = \rho \exp(2ie\phi/\hbar) \equiv \psi. \quad (21.6.20)$$

Коэффициент при $i\phi$ в показателе должен быть равен $2e/\hbar$, поскольку при калибровочном преобразовании с $\Lambda = \pi\hbar/e$ (но не с меньшим значением Λ) параметр порядка ψ_n должен оставаться неизменным. В почти однородной стационарной системе вблизи точки нарушения симметрии параметр порядка мал и медленно изменяется в пространстве, и для лагранжиана в присутствии внешнего векторного потенциала $\mathbf{A}$ можно приближенно записать (ниже всюду используем естественную систему единиц с $\hbar = 1$)

$$L_s \simeq \int d^3x \left[-\frac{1}{2} (\nabla\psi_n - 2iet_{nm}\mathbf{A}\psi_m)^2 + \frac{1}{2} m^2 \psi_n \psi_n - \frac{1}{4} g(\psi_n \psi_n)^2 \right], \quad (21.6.21)$$

где t — эрмитов генератор $U(1)$,

$$t = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

а константа g должна быть выбрана положительной, чтобы обеспечить ограниченность гамильтониана. Мы получили теорию сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау [41]. Вывод этой теории из микроскопической теории сверхпроводимости, изложенной ниже, в случае короткодействующих потенциалов и температуры, близкой к критической (т. е. вблизи точки разрушения сверхпроводимости), был дан Горьковым [42].

Переписывая формулу (21.6.21) через ρ и ϕ , получаем

$$L_s \simeq \int d^3x \left[-2e^2 \rho^2 (\nabla\phi - \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2} m^2 \rho^2 - \frac{1}{4} g \rho^4 - \frac{1}{2} (\nabla\rho)^2 \right]. \quad (21.6.22)$$

Полевые уравнения принимают вид

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4e^2 \rho^2 (\nabla\phi - \mathbf{A}), \quad (21.6.23)$$

$$\nabla^2 \rho = -m^2 \rho + g \rho^3 + 4e^2 \rho (\nabla\phi - \mathbf{A})^2. \quad (21.6.24)$$

$U(1)$ -симметрия нарушается, если эти уравнения удовлетворяются при $\rho \neq 0$, что в случае однородного материала в отсутствие внешнего поля возможно при $m^2 > 0$; в этом случае ρ принимает значение $\langle \rho \rangle = m/\sqrt{g}$. Выше мы определили глубину проникновения как обратный квадратный корень из коэффициента при $-(1/2)(\nabla\phi - \mathbf{A})^2$, так что

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4e^2 \langle \rho \rangle^2}} = \frac{\sqrt{g}}{2em}. \quad (21.6.25)$$

Согласно (21.6.23) эта длина задает характерный пространственный масштаб, на котором изменяется величина магнитного поля. С другой стороны, модуляция модуля ρ характеризуется так называемой *корреляционной длиной*, которая в соответствии с (21.6.24) равна ⁴⁾

$$\xi = 1/m\sqrt{2}. \quad (21.6.26)$$

Далее, разность между объемными плотностями энергий для сверхпроводящего состояния ($\rho = \langle \rho \rangle$) и нормального состояния ($\rho = 0$) дается выражением

$$\Delta = \frac{1}{2} m^2 \langle \rho \rangle^2 - \frac{1}{4} \langle \rho \rangle^4 = m^4/4g. \quad (21.6.27)$$

После исключения из (21.6.25)–(21.6.27) параметров m и g , получаем важное приближенное соотношение, связывающее экспериментально измеримые параметры λ , ξ и δ :

$$\Delta \simeq \frac{1}{8e^2 \lambda^2 \xi^2}. \quad (21.6.28)$$

Поле модуля ρ становится важным при изучении динамики вихрей в сверхпроводнике. Вихри образуются в сверхпроводниках некоторых типов при помещении материала в магнитное поле, достаточно сильное для того, чтобы оказалось энергетически выгодным проникновение трубок магнитного потока (вихревых линий) в объем сверхпроводника [43]. (Условия возникновения вихрей обсуждаются ниже.) Выберем окружающий вихрь замкнутый контур $\mathcal{C}$, расположенный на большом по сравнению с глубиной проникновения расстоянии от оси вихря (где магнитное поле равно нулю). Рассуждения, аналогичные использованным при выводе соотношения (21.6.12), показывают, что магнитный поток через натянутую на контур $\mathcal{C}$ поверхность $\mathcal{A}$ должен быть равен изменению величины ϕ вдоль контура, а потому обязан составлять целое кратное кванта потока π/e (как и для толстого сверхпроводящего кольца). Если этот поток не равен нулю, то внутри трубки существует линия, в точках которой электромагнитная калибровочная инвариантность *не* нарушена. Чтобы убедиться в этом, представим, что мы стягиваем контур $\mathcal{C}$, переводя его в область сильного магнитного поля. При этом мы уже не вправе утверждать, что $\nabla\phi = \mathbf{A}$, однако изменение величины ϕ вдоль контура по-прежнему должно оставаться кратным π/e ; из соображений непрерывности следует тогда, что оно остается постоянным. Поэтому мы обязаны пересечь линию (точнее область предположительно ненулевого объема), вдоль которой поле ϕ становится плохо определенным, т. е. $\rho = 0$. (Это простейший пример чисто топологического рассуждения. В гл. 23 мы

⁴⁾ Мы включили множители m и $\sqrt{2}$, поскольку в точке $\rho = \langle \rho \rangle$ производная входящей в (21.6.24) функции $-m^2\rho + g\rho^3$ равна $2m^2$.

будем часто использовать подобные методы.) Вблизи такой линии надлежит рассматривать и ϕ , и ρ как динамические переменные.

Квантование магнитного потока влечет стабильность сверхпроводящей вихревой линии с минимальным потоком π/e . Вихрь, несущий большой поток, также не может полностью исчезнуть; однако одно лишь квантование потока не запрещает его распад на несколько вихрей, несущих меньший поток. Богомольный [43а] показал, что вихри с потоком $n\pi/e$, где $n > 1$, нестабильны относительно распада на n вихрей с потоком π/e каждый, если и только если $\lambda > \xi$.

По этой причине, а также по ряду других соображений удобно разделить сверхпроводящие материалы на два класса: сверхпроводники первого рода (большинство чистых металлов, за исключением ниобия), для которых $\xi > \lambda$, и сверхпроводники второго рода (ниобий и большинство сплавов), для которых $\lambda > \xi$. Различие между этими классами аналогично различию между электрослабыми теориями, в которых масса скалярного поля (аналогичная величине $1/\xi$) больше (соответственно меньше) масс частиц W и Z (аналогов величины $1/\lambda$).

Из определения корреляционной длины ξ и глубины проникновения следует, что модуль параметра порядка увеличивается от нуля на оси вихря до асимптотического значения $\langle \rho \rangle$ на расстоянии порядка корреляционной длины ξ от оси, а магнитное поле затухает с удалением от оси вихря на характерном масштабе λ . Поэтому вихрь в сверхпроводнике первого рода (для которого $\xi \gg \lambda$) состоит из тонкого внутреннего цилиндра, содержащего нормальный металл (внутри этого цилиндра магнитное поле спадает до нуля), окруженного значительно большим внешним цилиндром, в котором модуль параметра порядка возрастает до своего асимптотического значения $\langle \rho \rangle$. Напротив, в сверхпроводнике второго рода (для которого $\lambda \gg \xi$) вихрь состоит из тонкого внутреннего цилиндра, внутри которого магнитное поле постоянно, а параметр порядка возрастает до величины $\langle \rho \rangle$, окруженного толстым внешним цилиндром сверхпроводящей фазы, внутри которого магнитное поле спадает до нуля. Вихревые решения существуют для сверхпроводников обоих родов и для всех значений магнитного поля. Однако ниже мы увидим, что возникновение вихрей оказывается энергетически выгодным только в сверхпроводниках второго рода и лишь в некотором конечном интервале магнитных полей.

Поскольку каждый вихрь имеет сечение площади порядка $\pi\xi^2$, внутри которого материал находится в нормальном или почти нормальном состоянии, объемная плотность энергии, связанная с созданием вихрей, равна по порядку величины $\mathcal{N}\pi\xi^2\Delta$, где $\mathcal{N}$ — число вихревых линий на единицу площади. На плотность числа вихрей имеется естественное ограничение $\mathcal{N} < 1/\pi\xi^2$, поскольку в противном случае цилиндры нормального металла будут перекрываться и материал будет находиться в нормальном состоянии. Магнитное поле будет выталкиваться из доли объема $1 - \mathcal{N}\pi\lambda^2$, если $\mathcal{N} < 1/\pi\xi^2$, и из

всего объема, если $\mathcal{N} > 1/\pi\xi^2$. Поэтому объемная плотность энергии в вихревом состоянии будет отличаться от объемной плотности энергии в чистом сверхпроводящем состоянии в отсутствие магнитных полей на величину

$$W_V \approx \mathcal{N}\pi\xi^2\Delta + \frac{1}{2}B^2 \times \begin{cases} 1 - \mathcal{N}\pi\lambda^2, & \mathcal{N} \leq 1/\pi\lambda^2, \\ 0, & \mathcal{N} \geq 1/\pi\lambda^2. \end{cases} \quad (21.6.29)$$

(Числовые множители типа $1/2$ и π лишь отражают происхождение соответствующих слагаемых и не должны восприниматься буквально.) Для сравнения, плотность энергии нормального состояния превосходит плотность энергии сверхпроводящего состояния на $W_N = +\Delta$, а энергия, связанная с выталкиванием магнитного поля, равна $W_S = B^2/2$. Вопрос о реализуемом состоянии решается посредством сравнения величин W_S , W_N и W_V при заданном значении магнитного поля.

В сверхпроводниках первого рода следует различать магнитные поля, большие и меньшие критического поля $B_c \equiv \sqrt{2\Delta}$. В этом случае из $\mathcal{N} < 1/\pi\xi^2$ и $\xi > \lambda$ следует, что $\mathcal{N} < 1/\pi\lambda^2$. Поэтому при $B < B_c$ из (21.6.29) следует, что $W_V > (1/2)B^2 + \mathcal{N}\pi(\xi^2 - \lambda^2)\Delta > W_S$, и возникновение вихревых линий невозможно. Далее, для таких полей $W_N > W_S$, так что материал находится в сверхпроводящем состоянии. С другой стороны, при $B > B_c$ из (21.6.9) следует, что

$$W_V > \Delta[1 + \mathcal{N}\pi(\xi^2 - \lambda^2)] > W_N,$$

т. е. вихревое состояние по-прежнему энергетически невыгодно. Однако для таких полей $W_S > W_N$, и материал должен находиться в нормальном состоянии.

В сверхпроводниках второго рода необходимо различать три интервала магнитных полей: $B < B_{c1}$, $B_{c1} < B < B_{c2}$ и $B_{c2} < B$, где B_{c1} и B_{c2} — два критических поля, по порядку величины равные

$$B_{c1} \approx \sqrt{2\Delta}\xi/\lambda, \quad B_{c2} \approx \sqrt{2\Delta}\lambda/\xi.$$

Выше было упомянуто, что в сверхпроводниках второго рода стабильны лишь вихри, несущие минимально возможный поток⁵⁾ π/e , поэтому в магнитном поле величины B входящая в формулу (21.6.9)

⁵⁾ Приведенный выше вывод закона квантования потока для уединенного вихря не вполне применим в рассматриваемом случае. Как мы увидим ниже, при $B > B_{c1}$ расстояние между вихрями оказывается меньше глубины проникновения λ . В такой ситуации нельзя выбрать контур $\mathcal{C}$, в точках которого $\mathbf{A} - \nabla\phi = 0$, просто проведя его на большом по сравнению с λ расстоянии от оси вихря. Вместо этого необходимо воспользоваться соображениями непрерывности (М. Тинкхам, частное сообщение). Предположим, что мы соединили оси двух вихрей некоторой непрерывной кривой. Как мы покажем ниже, в лежащих вблизи осей вихрей точках вектор $\mathbf{A} - \nabla\phi$ будет иметь очень большую величину, а на различных концах кривой его направ-

плотность числа вихрей $\mathcal{N}$ принимает значение eB/π . При $B < B_{c1}$ из (21.6.28) следует, что $eB/\pi < 1/\pi\lambda^2$. Поэтому коэффициент при плотности числа вихрей в выражении (21.6.29) — положительная величина, равная $\pi\xi^2\Delta - (1/2)B^2\lambda^2$, и в этом случае $W_V > W_S$, т.е. вихревые линии отсутствуют при $B < B_{c1}$. Кроме того, для таких полей $W_N > W_S$, т.е. материал является однородным сверхпроводником. При $B > B_{c1}$ из (21.6.28) получаем, что плотность вихрей $\mathcal{N} = eB/\pi$ превосходит $1/\pi\lambda^2$, и в вихревом состоянии магнитное поле полностью проникает в сверхпроводник. При этом объемная плотность энергии согласно (21.6.29) и (21.6.28) равна

$$W_V \approx \mathcal{N}\pi\xi^2\Delta = eB\xi^2\Delta \approx (B/B_{c2})W_N \approx (B_{c1}/B)W_S.$$

Следовательно, при $B_{c1} < B < B_{c2}$ имеем $W_V < W_N$ и $W_V < W_S$, так что материал находится в вихревом состоянии. При $B > B_{c2}$ по-прежнему будет выполнено неравенство $W_V < W_S$, но при этом будем иметь $W_N < W_V$, т.е. вихри исчезнут и сверхпроводимость пропадет. Способность сверхпроводников второго рода выдерживать магнитные поля, значительно превосходящие полученную ранее критическую величину $B_c \approx \sqrt{\Delta}$, имеет большое технологическое значение (в частности, для магнитов, используемых в ускорителях частиц).

Теория Гинзбурга–Ландау применима лишь вблизи линии перехода между нормальным и сверхпроводящим состоянием. Воспользуемся ею для описания сверхпроводника вблизи оси вихря, где величина ρ обращается в нуль. В достаточной близости от оси мы можем пренебречь ее кривизной и принять наличие цилиндрической симметрии. Поле $\mathbf{A} - \nabla\phi$ имеет только азимутальную компоненту:

$$(\mathbf{A} - \nabla\phi)_\theta = A(r), \quad (21.6.30)$$

так что у магнитного поля отлична от нуля лишь аксиальная компонента:

$$B_z = (\nabla \times (\mathbf{A} - \nabla\phi))_z = A'(r) + A(r)/r, \quad (21.6.31)$$

где ρ зависит только от r . Структура вихревой линии определяется парой дифференциальных уравнений

$$A''(r) + r^{-1}A'(r) - r^{-2}A(r) = \frac{\rho^2(r)A(r)}{\lambda^2\langle\rho\rangle^2}, \quad (21.6.32)$$

$$\rho''(r) + r^{-1}\rho'(r) + \frac{1}{2\xi^2}\left(\rho(r) - \frac{\rho^3(r)}{\langle\rho\rangle^2}\right) = 4e^2\rho(r)A^2(r). \quad (21.6.33)$$

Для расстояний r , достаточно малых по сравнению с корреляционной длиной ξ и глубиной проникновения λ , в уравнениях (21.6.32)

ление (относительно кривой) будет противоположным. Поэтому на кривой найдется хотя бы одна точка, где $\mathbf{A} - \nabla\phi = 0$. Поскольку вектор $\mathbf{A} - \nabla\phi$ калибровочно-инвариантен, он должен быть непрерывным, поэтому для любого вихря существует окружающий его контур, на котором $\mathbf{A} - \nabla\phi = 0$.

и (21.6.33) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными $1/\xi^2$ и $1/\lambda^2$. В результате получим более простые уравнения

$$A'' + \frac{A'}{r} - \frac{A}{r^2} = 0, \quad (21.6.34)$$

$$\rho'' + \frac{\rho'}{r} = 4e^2 A^2 \rho. \quad (21.35)$$

Общее решение (21.6.34) имеет вид

$$A(r) = \frac{Br}{2} + \frac{C}{2er}, \quad (21.6.36)$$

где B — постоянная, равная (согласно (21.6.31)) значению магнитного поля на оси вихря, а C — произвольная действительная константа. Подставляя полученное решение в уравнение (21.6.35), получаем, что при $r \rightarrow 0$ функция $\rho(r)$ представляет собой линейную комбинацию функций $r^{|C|}$ и $r^{-|C|}$. Параметр порядка $\rho e^{2ie\phi}$ должен быть гладкой функцией координат, из чего можно заключить, что $|C|$ — положительное целое число l . При $r \rightarrow 0$ имеем $\rho \propto r^l$ и $\phi = \pm l\varphi/2e + \text{const}$. Заметим, что полученное решение для ϕ согласуется с формулой (21.6.36) при $C = \pm l$; при $r \rightarrow 0$ азимутальная компонента $\nabla\phi$ стремится к $\pm l/2er$, а азимутальная компонента $\mathbf{A}$ стремится к нулю (ввиду аналитичности). Проведем несингулярное калибровочное преобразование, мы можем добиться выполнения равенства $\phi = \pm l\varphi/2e$ всюду. При помощи тех же рассуждений, которые привели нас к формуле (21.6.12), получаем, что в сверхпроводнике, размеры которого много больше глубины проникновения, каждый вихрь несет магнитный поток $\pm \pi l/e$. Мы видим, что (как и ожидалось) параметр порядка обращается в нуль на оси вихря, причем его величина убывает с уменьшением расстояния r до оси вихря по степенному закону с показателем, равным величине магнитного потока в единицах π/e .

Решение для ϕ подчиняется условию “квантования”, т. е. разность $\phi(2\pi) - \phi(0)$ кратна π/e , откуда следует закон квантования магнитного потока. В теории электромагнитного поля и голдстоуновского поля ϕ , основанной на лагранжиане (21.6.5), это условие на решение полевых уравнений нужно накладывать извне; уравнения Гинзбурга–Ландау “знают” о нем, поскольку они основаны на адекватном выборе параметра порядка.

* * *

Хотя наиболее интересные свойства сверхпроводников можно получить непосредственно из предположения о спонтанном нарушении калибровочной симметрии, для выяснения вопроса о том, когда и как именно происходит это нарушение, необходимо построение микроскопической теории сверхпроводимости. Вывод такой микро-

скопической теории, данный Бардином, Купером и Шриффером [37], можно переформулировать [44, 44a] на языке эффективной теории поля с использованием методов подсчета степеней, аналогичных использованным в § 19.5 и § 21.4. Для этого предположим, что мы провели в сверхпроводнике интегрирование по всем ионным степеням свободы⁶⁾ оставив лишь эффективные взаимодействия электронов друг с другом. Для простоты будем рассматривать случай нулевой температуры и сначала предположим отсутствие внешних полей; в такой ситуации лагранжиан инвариантен относительно трансляций и операции обращения времени T . Будем также считать, что взаимодействия электронов не зависят от их спина, тогда лагранжиан будет также инвариантным относительно $SU(2)$ -преобразований, действующих на спиновые индексы (однако нам не потребуется предположение об инвариантности относительно пространственных вращений вектора импульса). В такой теории состояние электрона характеризуется импульсом $\mathbf{p}$ и спиновым индексом $s = \pm 1/2$. Введем операторы уничтожения и рождения $a(\mathbf{p}, s, t)$ и $a^\dagger(\mathbf{p}, s, t)$ и запишем лагранжиан электронов в виде

$$\begin{aligned}
 L = & - \sum_s \int d^3p a^\dagger(\mathbf{p}, s, t) \left[-i \frac{\partial}{\partial t} + E(\mathbf{p}) \right] a(\mathbf{p}, s, t) + \\
 & + \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4 V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \times \\
 & \times a^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1, t) a^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2, t) a(\mathbf{p}_3, s_3, t) a(\mathbf{p}_4, s_4, t) \times \\
 & \times \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) + \dots, \quad (21.6.37)
 \end{aligned}$$

где многоточию соответствует сумма членов, содержащих шесть и более операторов рождения и уничтожения, а $E(\mathbf{p})$ — энергия электрона, отсчитываемая от уровня химического потенциала. Для свободных электронов

$$E(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 / 2m_e - E_F,$$

где E_F — энергия электронов на поверхности Ферми; на поверхности сферы радиуса $|\mathbf{p}| = \sqrt{2m_e E_F}$ имеем $E(\mathbf{p}) = 0$. Взаимодействия неизбежно изменяют вид этой функции, но естественно ожидать, что она по-прежнему будет обращаться в нуль на некоторой замкнутой ферми-поверхности $\mathcal{S}$:

$$E(\mathbf{p}) = 0, \quad \text{если } \mathbf{p} \text{ лежит на } \mathcal{S}. \quad (21.6.38)$$

⁶⁾ Строго говоря, мы не можем провести интегрирование по всем степеням свободы за исключением электронных, поскольку фонон является голдстоуновским бозоном, частота которого стремится к нулю при увеличении длины волны (т.е. он аналогичен безмассовой частице в релятивистской теории поля). Однако эффекты фононных взаимодействий, не представимые в виде электрон-электронных взаимодействий, подавлены малыми множителями порядка обратной массы иона.

По причинам, которые станут ясны ниже, мы проведем интегрирование по всем электронам, за исключением находящихся в узком слое толщины κ вблизи поверхности Ферми⁷⁾. (Впоследствии мы устраним параметр обрезания κ за счет введения перенормированного электрон-электронного потенциала.) Оставшиеся степени свободы соответствуют электронам с импульсами вида

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k})l, \quad (21.6.39)$$

где импульс $\mathbf{k}$ лежит на ферми-поверхности $\mathcal{S}$, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k})$ — единичный вектор, перпендикулярный поверхности в точке $\mathbf{k}$, а l лежит в интервале $0 \leq l \leq \kappa$. Для таких импульсов

$$E(\mathbf{p}) = v_F(\mathbf{k})l, \quad (21.6.40)$$

где

$$v_F(\mathbf{k}) \equiv \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) \cdot (\nabla_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}))_{\mathbf{p}=\mathbf{k}}. \quad (21.6.41)$$

Пропагатор электрона в импульсно-частотном представлении равен

$$\frac{1}{\omega - v_F(\mathbf{k})l + i\epsilon}. \quad (21.6.42)$$

Рассмотрим теперь, как произвольный связный матричный элемент зависит от параметра κ при $\kappa \rightarrow 0$. Для каждой петли имеем один интеграл по частоте, а для каждой внутренней линии — один пропагаторный множитель. Следовательно, интеграл по всем частотам от произведения всех пропагаторов будет пропорционален l^{L-I} , где L — число петель, а I — число внутренних линий. Чтобы подсчитать число l -интегрирований, заметим, что для произвольных значений импульсов дельта-функция в члене со взаимодействием в (21.6.37) накладывает ограничения на импульсы $\mathbf{k}$, а не на l . (Например, если закон сохранения импульса накладывает на импульсы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ двух электронных линий условие равенства их суммы величине $\mathbf{P} \neq 0$, то интегрирование по $\mathbf{p}_1$ ведется по пересечению двух замкнутых сферических слоев толщины κ , центры которых находятся в точках $\mathbf{P}$ и 0 . Такое пересечение представляет собой кольцо толщины κ , и поэтому мы должны провести интегрирование по одной $\mathbf{k}$ -компоненте, задающей точку на кольце, и двум l -компонентам, определяющим точку в соответствующем поперечном сечении.) Таким образом, получается I интегралов по l ; поскольку подинтегральное выражение пропорционально l^{L-I} , матричный элемент зависит от κ следующим образом

$$M \propto \kappa^L. \quad (21.6.43)$$

⁷⁾ Для зависящих от спина взаимодействий имеются две поверхности Ферми, по одной для каждого собственного значения матрицы $E_{s's}(\mathbf{p})$. В этом случае мы интегрируем по электронам каждого из собственных спиновых состояний, за исключением лежащих в узком слое вблизи соответствующего листа поверхности Ферми.

Связь числа петель с числом внутренних линий и числами V_i вершин типов i дается стандартной формулой

$$L = I - \sum_i V_i + 1. \quad (21.6.44)$$

Далее, для числа внутренних линий, числа вершин и числа внешних линий E имеется соотношение

$$2I + E = \sum_i n_i V_i, \quad (21.6.45)$$

где n_i — число электронных операторов, входящих во взаимодействие типа i . Исключая величину I из уравнений (21.6.44) и (21.6.45), получаем

$$L = 1 - \frac{1}{2} E + \frac{1}{2} \sum_i V_i (n_i - 2). \quad (21.6.46)$$

Слагаемые в действии, для которых $n_i = 2$, приводят лишь к изменению закона дисперсии $E(\mathbf{p})$ и потому лишь сдвигают ферми-поверхность. Для истинных взаимодействий $n_i > 2$, и из соотношений (21.6.43), (21.6.45) следует, что их вклады в матричный элемент пренебрежимо малы в пределе $\kappa \rightarrow 0$. В соответствии с § 18.5 это означает, что все взаимодействия описываются несущественными операторами. Этим объясняется тот факт, что близкие к ферми-поверхности электроны ведут себя практически как свободные частицы.

Имеется, однако, одно исключение из полученного выше результата. Если пара электронных линий исчезает в вакууме, то из трансляционной инвариантности следует, что импульсы электронов должны быть равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, если один из электронов находится вблизи ферми-поверхности, второй также автоматически оказывается близким к ней. (Ввиду наличия симметрии относительно обращения времени функция $E(\mathbf{p})$ должна быть четной по $\mathbf{p}$. Хотя в общем случае поверхность Ферми не является сферой, из $E(\mathbf{p}) = 0$ по-прежнему следует $E(-\mathbf{p}) = 0$.) Интегрирование по импульсу $\mathbf{p}$ одной из электронных линий в таком случае ведется по слою толщины κ , т. е. по двум k -импульсам и *одному* параметру l . Для взаимодействия, включающего две такие линии, возникает лишь один интеграл по l , а не два, как ранее. Поэтому порядок матричного элемента остается неизменным (в отличие от ситуации, описываемой уравнениями (21.6.43) и (21.6.46), лишний множитель κ не возникает). Иными словами, четырехэлектронные взаимодействия становятся не несущественными, а маргинальными, если они связывают электронные линии, исчезающие в вакууме.

Чтобы понять, к каким последствиям это приводит, удобно воспользоваться *преобразованием Хаббарда–Стратоновича*, кратко упоминавшимся в § 10.7. Поскольку мы вскоре введем медленно ме-

няющиеся внешние электромагнитные поля, удобно перейти к координатному представлению. Из условия калибровочной инвариантности следует, что лагранжиан (21.6.37) примет вид

$$L = - \sum_s \int d^3x \psi_s^\dagger(\mathbf{x}, t) \left[-i \frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x}, t) + E(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \right] \psi_s(\mathbf{x}, t) + \\ + \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \times \\ \times \psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{x}_1, t) \psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{x}_2, t) \psi_{s_3}(\mathbf{x}_3, t) \psi_{s_4}(\mathbf{x}_4, t), \quad (21.6.47)$$

где

$$\psi_s(\mathbf{x}, t) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) a(\mathbf{p}, s, t). \quad (21.6.48)$$

Мы опускаем все члены с более чем четырьмя электронными операторами, поскольку все они соответствуют несущественным взаимодействиям. Добавим к лагранжиану слагаемое

$$\Delta L = \frac{1}{4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \times \\ \times [\Psi_{s_2 s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) - \psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{x}_1, t) \psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{x}_2, t)] \times \\ \times [\Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) - \psi_{s_3}(\mathbf{x}_3, t) \psi_{s_4}(\mathbf{x}_4, t)] \quad (21.6.49)$$

и возьмем функциональные интегралы как по новому полю спаренных электронов $\Psi(\mathbf{x}, s, \mathbf{x}', s', t)$, так и по электронным полям ψ . Это можно сделать, поскольку слагаемое ΔL квадратично по полю пар, причем коэффициент при члене второго порядка не зависит от полей. Согласно приведенным в приложении к гл. 9 формулам, функциональное интегрирование по $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ сводится просто к замене величины $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ в лагранжиане на ее стационарное значение $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \psi_s(\mathbf{x}, t) \psi_{s'}(\mathbf{x}', t)$, для которого $\Delta L = 0$. Дополнительное слагаемое выбирается из условия уничтожения членов четвертой степени по электронным полям, так что в результате получается квадратичное по ним выражение

$$L + \Delta L = \\ = - \sum_s \int d^3x \psi_s^\dagger(\mathbf{x}, t) \left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x}, t) + E(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \right\} \psi_s(\mathbf{x}, t) - \\ - \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \times \\ \times [\psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{x}_1, t) \psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{x}_2, t) \Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) + \\ + \Psi_{s_2 s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) \psi_{s_3}(\mathbf{x}_3, t) \psi_{s_4}(\mathbf{x}_4, t) - \\ - \Psi_{s_2 s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) \Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t)]. \quad (21.6.50)$$

Каков результат этих формальных действий? Мы показали, что все взаимодействия V несущественны, за исключением тех, в ко-

торых участвует пара исчезающих в вакууме электронных линий. Вычисление квантового эффективного действия $\Gamma[\Psi]$ в присутствии внешнего медленно меняющегося поля пар $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ соответствует отбрасыванию всех диаграмм, кроме становящихся несвязными при разрезании любой внутренней линии поля Ψ . Но согласно общему определению квантового эффективного действия мы должны отбросить все диаграммы, теряющие связность после разрезания какой-либо внутренней линии. Поэтому мы вообще не должны рассматривать внутренние линии для поля Ψ . Поскольку правая часть (21.6.50) квадратична по электронным полям, после интегрирования по ним останутся лишь диаграмма с одной вершиной, связанная с последним членом в квадратных скобках в (21.6.50), и однопетлевая диаграмма, соответствующая логарифму определителя матрицы коэффициентов при квадратичных по электронным полям членах (см. § 16.2):

$$\Gamma[\Psi] = \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int dt \int d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 x_3 d^3 x_4 V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \times \\ \times \Psi_{s_2 s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) \Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) - \frac{i}{2} \ln \text{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & -A^\dagger \end{pmatrix} + \text{const}, \quad (21.6.51)$$

где A и B — “матрицы”

$$A_{\mathbf{x}'s't', \mathbf{x}s} \equiv \delta_{s's} \left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x}, t) + E(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \right\} \times \\ \times \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(t' - t), \quad (21.6.52)$$

$$B_{\mathbf{x}'s't', \mathbf{x}s} \equiv -\Delta_{s's}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \delta(t' - t), \quad (21.6.53)$$

а Δ — “щель”

$$\Delta_{s's}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma'\sigma} \int d^3 y d^3 y' V_{s'\sigma\sigma'}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \mathbf{y}', \mathbf{y}) \Psi_{s's}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t). \quad (21.6.54)$$

(В этих формулах и всюду далее мы опускаем аддитивные слагаемые в эффективном действии Γ , связанные со степенями свободы, по которым было произведено интегрирование.) Это одна из ситуаций, когда эффективное действие можно получить, не делая никаких предположений о малости взаимодействий.

Чтобы упростить последующий анализ, будем рассматривать случай спин-синглетного поля пар:

$$\Psi_{+-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = -\Psi_{-+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \Psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t), \quad (21.6.55)$$

где индексы “+” и “−” соответствуют спинным индексам $+1/2$ и $-1/2$ соответственно⁸⁾. Из инвариантности относительно вращения

⁸⁾ В жидком гелии He^3 ненулевые компоненты поля пар образуют спинный триплет с $\Psi_1 = \Psi_{++}$, $\Psi_0 = \sqrt{2}\Psi_{+-} = \sqrt{2}\Psi_{-+}$, $\Psi_{-1} = \Psi_{--}$.

спиновых индексов следует, что компоненты потенциала имеют вид

$$\begin{aligned} V_{+-+--}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) - V_{+---+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \\ = -V_{-++-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) + V_{-+-+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv 2V(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (21.6.56)$$

Из соотношения (21.6.54) получаем, что

$$\Delta_{+-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = -\Delta_{-+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t), \quad (21.6.57)$$

$$\Delta_{++}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \Delta_{--}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = 0. \quad (21.6.58)$$

Квантовое эффективное действие дается выражением

$$\begin{aligned} \Gamma[\Psi] = \int dt \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \times \\ \times \Psi^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) \Psi(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) - i \ln \text{Det} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^\dagger & -\mathcal{A}^\Gamma \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (21.6.59)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbf{x}'t', \mathbf{x}t} \equiv \left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x}, t) + E(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \right\} \times \\ \times \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(t' - t), \end{aligned} \quad (21.6.60)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{x}'t', \mathbf{x}t} \equiv -\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \delta(t' - t), \quad (21.6.61)$$

и

$$\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \int d^3y d^3y' V(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \mathbf{y}', \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}', \mathbf{y}, t). \quad (21.6.62)$$

Воспользуемся полученными результатами для анализа трансляционно-инвариантного случая, когда внешние электромагнитные поля отсутствуют. Тогда удобно ввести фурье-преобразования поля пар и щели по формулам

$$\Psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \int d^3p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \Psi(\mathbf{p}), \quad (21.6.63)$$

$$\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3} \int d^3p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \Delta(\mathbf{p}), \quad (21.6.64)$$

а электрон-электронный потенциал запишется в виде

$$\begin{aligned} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)} V(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \\ \equiv \mathcal{V}_4 V(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (21.6.65)$$

где $\mathcal{V}_4$ — объем пространства-времени,

$$\mathcal{V}_4 \equiv \int d^3x \int dt. \quad (21.6.66)$$

После перехода к импульсно-частотному представлению “матрицы” (21.6.60) и (21.6.61) становятся диагональными и вычисление определителя оказывается тривиальным. Эффективный потенциал $V[\Psi]$ (не смешивать с электрон-электронным потенциалом)

был определен в § 16.1 как взятая с обратным знаком плотность эффективного действия:

$$V[\Psi] \equiv -\Gamma[\Psi]/\mathcal{V}_4 = - \int d^3p d^3p' \Psi^*(\mathbf{p}') V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \Psi(\mathbf{p}) + \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\omega d^3p \ln \left(1 - \frac{|\Delta(\mathbf{p})|^2}{\omega^2 - E^2(\mathbf{p}) + i\epsilon} \right), \quad (21.6.67)$$

где

$$\Delta(\mathbf{p}) = - \int d^3p' V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Psi(\mathbf{p}'). \quad (21.6.68)$$

(Слагаемое $i\epsilon$ следует из фейнмановских правил для диаграмм с электронными петлями. Как было показано в § 9.2, истинная причина его возникновения связана с условиями, накладываемыми на электронные поля при $t \rightarrow \pm\infty$.) После викового поворота, интегрирования по ω и, выразив Ψ через Δ , получаем

$$V[\Delta] = - \int d^3p d^3p' \Delta^*(\mathbf{p}') V^{-1}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \Delta(\mathbf{p}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p [\sqrt{E^2(\mathbf{p}) + |\Delta(\mathbf{p})|^2} - E(\mathbf{p})]. \quad (21.6.69)$$

Как мы видели в § 16.1, уравнения поля представляют собой в точности условия стационарности эффективного действия и в нашем случае дают знаменитое *уравнение щели* для равновесной функции щели $\Delta_0(\mathbf{p})$:

$$0 = \frac{\delta V[\Delta]}{\delta \Delta^*(\mathbf{p})} \Big|_{\Delta=\Delta_0} = - \int d^3p' V^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Delta_0(\mathbf{p}') - \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{\Delta_0(\mathbf{p})}{\sqrt{E^2(\mathbf{p}) + |\Delta_0(\mathbf{p})|^2}}.$$

Это соотношение может быть представлено в более привычном виде

$$\Delta_0(\mathbf{p}) = - \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3p' \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Delta_0(\mathbf{p}')}{\sqrt{E^2(\mathbf{p}') + |\Delta_0(\mathbf{p}')|^2}}. \quad (21.6.70)$$

Везде мы неявно предполагали, что интегрирование по импульсам ведется по тонкому сферическому слою толщины κ вблизи поверхности Ферми, т. е. по импульсам вида (21.6.39). Следовательно, эффективный потенциал (21.6.69) равен

$$V[\Delta] = -\kappa^2 \int_{\mathcal{S}} d^2k d^2k' \Delta^*(\mathbf{k}') V^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\kappa \int_{\mathcal{S}} d^2k [\sqrt{l^2 v_F^2(\mathbf{k}) + |\Delta(\mathbf{k})|^2} - l v_F(\mathbf{k})]. \quad (21.6.71)$$

Он является функционалом только от функции щели Δ на поверхности Ферми.

Поскольку величина κ произвольна, потенциалу $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ следует придать такую κ -зависимость, чтобы эффективный потенциал $V[\Delta]$ оказался не зависящим от κ . В большинстве приложений [44] метода ренормгруппы к описанию сверхпроводимости использовался вильсоновский подход, изложенный в § 12.4: авторы получали дифференциальное уравнение на зависимость $V(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ от κ и изучали поведение его решений при $\kappa \rightarrow 0$. Заметим, что можно также воспользоваться методом Гелл-Манна и Лоу и рассмотреть перенормированный электрон-электронный потенциал [44a]

$$V_\mu^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv - \frac{\delta^2 V[\Delta]}{\delta \Delta^*(\mathbf{k}') \delta \Delta(\mathbf{k})} \Big|_{\Delta(\mathbf{k}) = \Delta(\mathbf{k})^* = \mu}, \quad (21.6.72)$$

где μ — плавающий перенормировочный масштаб, подобный введенному в § 18.2. Выражая исходный электрон-электронный потенциал через V_μ , перепишем равенство (21.6.71) в виде

$$\begin{aligned} V[\Delta] = & - \int_{\mathcal{S}} d^2 k d^2 k' \Delta^*(\mathbf{k}') V_\mu^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}) - \\ & - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\kappa dl \int_{\mathcal{S}} d^2 k \left[\sqrt{l^2 v_F^2(\mathbf{k}) + |\Delta(\mathbf{k})|^2} - l v_F(\mathbf{k}) - \right. \\ & \left. - \frac{|\Delta(\mathbf{k})|^2}{2(l^2 v_F^2(\mathbf{k}) + \mu^2)^{1/2}} + \frac{\mu^2 |\Delta(\mathbf{k})|^2}{4(l^2 v_F^2(\mathbf{k}) + \mu^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (21.6.73)$$

Интеграл по l оказывается теперь сходящимся при $\kappa \rightarrow \infty$ и дает

$$\begin{aligned} V[\Delta] = & - \int_{\mathcal{S}} d^2 k d^2 k' \Delta^*(\mathbf{k}') V_\mu^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}) + \\ & + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathcal{S}} d^2 k \frac{|\Delta(\mathbf{k})|^2}{v_F(\mathbf{k})} \left[\ln \left(\frac{|\Delta(\mathbf{k})|}{\mu} \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (21.6.74)$$

Условие стационарности $V[\Delta]$ при $\Delta = \Delta_0$ позволяет записать уравнение для щели в более удобной форме

$$\Delta_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathcal{S}} d^2 k' V_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{k}') v_F^{-1}(\mathbf{k}') \Delta_0(\mathbf{k}') \ln \left(\frac{|\Delta_0(\mathbf{k}')|}{\mu} \right). \quad (21.6.75)$$

Подставляя это выражение в формулу (21.6.74), получаем, что объемная плотность энергии сверхпроводника меньше плотности энергии нормального состояния на величину

$$\Delta \equiv V(0) - V(\Delta_0) = \int_{\mathcal{S}} d^2 k \frac{|\Delta_0(\mathbf{k})|^2}{2(2\pi)^3 v_F(\mathbf{k})}. \quad (21.6.76)$$

Конечно же, зависимость электрон-электронного потенциала от μ должна определяться так, чтобы он удовлетворял уравнению ренормгруппы, и тем самым обеспечивалась независимость эффективного

потенциала (21.6.74) от произвольного перенормировочного масштаба μ :

$$\mu \frac{d}{d\mu} V_{\mu}^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\delta^2(\mathbf{k}' - \mathbf{k})}{2(2\pi)^3 v_F(\mathbf{k})},$$

или, что равносильно,

$$\mu \frac{d}{d\mu} V_{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^2 k'' V_{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') v_F^{-1}(\mathbf{k}'') V_{\mu}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}). \quad (21.6.77)$$

Последнюю формулу удобно переписать при помощи эрмитова ядра

$$K_{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^3} v_F^{-1/2}(\mathbf{k}') v_F^{-1/2}(\mathbf{k}) V_{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \quad (21.6.78)$$

в виде

$$\mu \frac{d}{d\mu} K_{\mu} = K_{\mu}^2. \quad (21.6.79)$$

Собственные векторы $u_n(\mathbf{k})$ оператора $K_{\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ тогда оказываются не зависящими от μ , а собственные значения имеют вид $1/\ln(\Lambda_n/\mu)$, где Λ_n — постоянные интегрирования, подобные постоянной Λ в квантовой электродинамике. Таким образом, для потенциала получаем формулу

$$V_{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2(2\pi)^3 v_F^{1/2}(\mathbf{k}) v_F^{1/2}(\mathbf{k}') \sum_n \frac{u_n(\mathbf{k}) u_n^*(\mathbf{k}')}{\ln(\Lambda_n/\mu)}, \quad (21.6.80)$$

где мы выбрали собственные векторы ортонормированными, так что соотношение полноты имеет вид

$$\sum_n u_n(\mathbf{k}) u_n^*(\mathbf{k}') = \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (21.6.81)$$

Эффективный потенциал (21.6.74) можно записать как

$$V[\Delta] = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^2 k d^2 k' \sum_n \frac{\Delta^*(\mathbf{k}') u_n^*(\mathbf{k}') \Delta(\mathbf{k}) u_n(\mathbf{k})}{\sqrt{v_F(\mathbf{k}') v_F(\mathbf{k})}} \left[\ln \left(\frac{|\Delta(\mathbf{k})|}{\Lambda_n} \right) - 1 \right]. \quad (21.6.82)$$

Для материала, обладающего локальной инвариантностью относительно вращений, поверхность Ферми является сферой, а собственные векторы $u_n(\mathbf{k})$ оказываются соответствующими сферическими гармониками; однако соотношение (21.6.82) справедливо и без предположения о вращательной инвариантности.

Теперь мы можем воспользоваться развитым формализмом, чтобы выяснить, когда возникает сверхпроводимость. Логарифм в формуле (21.6.82) принимает большие по величине отрицательные значения для очень малых Δ и большие по величине положительные значения для очень больших Δ . Поэтому при увеличении Δ от нуля до бесконечности потенциал $V[\Delta]$ уменьшается от нуля до отрицательных значений, а затем растет до бесконечности. Следовательно, для любого электрон-электронного потенциала он имеет минимум при некотором ненулевом значении Δ . Однако это утверждение нуждается в серьезном уточнении. При стремлении параметра обрезания κ к бесконечности интеграл в (21.6.73) эффективно обрезается при l

порядка $|\Delta|/v_F$, в то время как радиус поверхности Ферми равен по порядку величины k_F , где $8\pi k_F^3/3(2\pi)^3$ — плотность числа электронов. Поскольку мы предполагали, что учитываемые электроны находятся в *тонком* слое вблизи поверхности Ферми, вывод оказывается справедливым лишь при $|\Delta| \ll \omega_D$, где ω_D — дебаевская частота $k_F v_F$. В частности, в предположении вращательной инвариантности и отсутствия зависимости величины щели от направления импульса, эффективный потенциал достигает локального минимума для величины щели порядка $\Lambda_{s \text{ волна}}$, так что симметрия спонтанно нарушается при $\Lambda_{s \text{ волна}} \ll \omega_D$. Иначе говоря, для обычной s -волновой сверхпроводимости проекция электрон-электронного потенциала (21.6.80) на s -волновые состояния должна (после перенормировки) соответствовать притяжению для масштабов порядка $\mu \approx \omega_D$. При этом неважно, насколько сильным является этот перенормированный притягивающий потенциал.

Свойство сверхпроводимости, которое состоит в том, что голдстоуновский бозон образуется в случае сколь угодно слабого притягивающего потенциала, является следствием существования поверхности Ферми, усиливающей дальнodelствующие эффекты. В квантовых теориях поля без элементарных бесспиновых полей, подобных рассмотренных в § 21.5, обычно не следует ожидать спонтанного нарушения симметрии в вакууме, если взаимодействия не являются достаточно сильными.

Вернемся теперь к случаю внешнего электромагнитного поля. Как обычно, мы можем ввести поле голдстоуновских бозонов $\phi(\mathbf{x}, t)$, записав каждое из имеющихся в теории заряженных полей (в нашем случае — поле щели $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$, или, эквивалентно, поле пар $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$), как результат действия калибровочного преобразования с параметром $\phi(\mathbf{x}, t)$ на соответствующее калибровочно-инвариантное поле:

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \exp(-i\phi(\mathbf{x}, t)) \tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \exp(-i\phi(\mathbf{x}', t)). \quad (21.6.83)$$

Эффективное действие при этом получается в результате подстановки (21.6.83) в формулу (21.6.59). При помощи калибровочного преобразования мы можем исключить зависимость от ϕ в (21.6.83), заменив поле $A_\mu(x)$ в (21.6.60) на поле $A_\mu(x) - \partial_\mu \phi(x)$. Если материал не только является сверхпроводником, но также находится вдали от линии перехода между нормальным и сверхпроводящим состояниями, мы можем провести интегрирование по всем калибровочно-инвариантным степеням свободы, связанным с полем $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$, что соответствует замене его соответствующим равновесным значением $\Psi_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$. Часть эффективного действия, зависящая от голдстоуновского поля и от внешнего электромагнитного поля, будет равна

$$\Gamma[\phi, A] = \Gamma_{\Delta=0}[A] - i \ln \text{Det} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^\dagger & -\mathcal{A}^\dagger \end{pmatrix} + i \ln \text{Det} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (21.6.84)$$

где теперь

$$\mathcal{A}_{\mathbf{x}'t',\mathbf{x}t} = \left[-i \frac{\partial}{\partial t} + eA_0(\mathbf{x}, t) - e\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) + \right. \\ \left. + E(-i\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - e\nabla\phi(\mathbf{x}, t)) \right] \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(t' - t), \quad (21.6.85)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{x}'t',\mathbf{x}t} = \Delta_0(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(t' - t). \quad (21.6.86)$$

Количественные свойства сверхпроводника, подобные величине глубины проникновения, можно получить [46] из разложения правой части (21.6.84) по степеням $A_0(\mathbf{x}, t) - \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \nabla\phi(\mathbf{x}, t)$.

Приложение. Общий случай унитарной калибровки

В этом приложении мы покажем, что в произвольной теории со спонтанным нарушением калибровочной симметрии всегда возможно выбрать “унитарную” калибровку так, чтобы для полей голдстоуновских бозонов выполнялось соотношение (21.4.30):

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \xi_a e_{ab} = 0. \quad (21.A.1)$$

Поскольку для всех групп существуют экспоненциальные параметризации, любой элемент G (по крайней мере, из некоторой конечной окрестности единицы группы) может быть представлен в виде

$$g = \exp\left(-i \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} \mathcal{T}_{\alpha}\right) \exp\left(i \sum_a \phi_a x_a\right) \exp\left(i \sum_i \mu_i t_i\right), \quad (21.A.2)$$

где величины ϕ_a при любом α удовлетворяют линейному условию

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \phi_a e_{ab} = 0. \quad (21.A.3)$$

Особенно просто убедиться в этом для инфинитезимального элемента группы g . Последний представим в виде

$$g = 1 + i \sum_a \phi_a^0 x_a + i \sum_i \mu_i^0 t_i \quad (21.A.4)$$

с инфинитезимальными ϕ_a^0 и μ_i^0 . В то же время

$$g = 1 + i \sum_i \phi_a x_a + i \sum_i \mu_i t_i - i \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} \mathcal{T}_{\alpha}, \quad (21.A.5)$$

где θ_{α} —произвольные инфинитезимальные величины и

$$\phi_a(\theta) \equiv \phi_a^0 + \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} e_{\alpha a}, \quad (21.A.6)$$

$$\mu_i(\theta) \equiv \mu_i^0 + \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} e_{\alpha i}. \quad (21.A.7)$$

Для любых заданных ϕ_a^0 мы можем выбрать θ_α так, чтобы минимизировать положительную величину

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \phi_a(\theta) \phi_b(\theta). \quad (21.A.8)$$

В точке минимума выражение (21.A.8) стационарно по отношению к изменению θ_α , и потому для $\phi_a(\theta)$ выполнено условие (21.A.3). Для инфинитезимальных ϕ , μ и θ равенство (21.A.5) эквивалентно равенству (21.A.2), так что множество элементов группы g , представимых в виде (21.A.2) с дополнительным условием (21.A.3), содержит все инфинитезимально близкие к единице элементы. Из соображений непрерывности следует, что то же верно и для всех элементов из некоторой конечной окрестности единицы.

Рассмотрим некоторый элемент группы:

$$g = \gamma(\xi) = \exp\left(i \sum_a \xi_a x_a\right), \quad (21.A.9)$$

и запишем его в виде (21.A.2):

$$\gamma(\xi) = \exp\left(-i \sum_\alpha \theta_\alpha(\xi) \mathcal{T}_\alpha\right) \gamma(\phi(\xi)) \exp\left(i \sum_i \mu_i(\xi) t_i\right), \quad (21.A.10)$$

где $\phi_a(\xi)$ удовлетворяют соотношениям (21.A.3). Это равенство означает, что калибровочное преобразование

$$\exp\left(i \sum_\alpha \theta_\alpha(\xi) \mathcal{F}_\alpha\right)$$

переводит ξ_a в

$$\xi'_a = \phi_a(\xi). \quad (21.A.11)$$

Опуская штрихи, получаем калибровку, в которой ξ_a удовлетворяет соотношению (21.A.1), как и требовалось.

Задачи

1. Найдите эффективный лагранжиан духов в “обобщенной унитарной калибровке”, в которой $B[f]$ дается стандартной формулой (15.5.22), но $f_\alpha(x) = i\phi_n(x)(t_\alpha)_{nm}\langle\phi_m(0)\rangle_{\text{вак}}$, где ϕ_n — действительные скалярные поля, а t_α — чисто мнимые антисимметричные матрицы, дающие представление алгебры Ли калибровочной группы. Чему равен пропагатор духов? Перенормируема ли эта часть лагранжиана?

2. Предположим, что в $SU(2) \times U(1)$ -теории электрослабых взаимодействий калибровочную симметрию нарушает вакуумное среднее

поля ϕ_3 , принадлежащего действительному триплету $\vec{\phi} = (\phi^+, \phi^0, \phi^-)$ (а не комплексному дублету (ϕ^0, ϕ^-) , как обычно). Какие эффекты возникнут вследствие этого?

3. Рассмотрим стандартную электрослабую теорию с единственным скалярным дублетом. Вычислите в однопетлевом приближении вклады в аномальный магнитный момент мюона от обмена Z_0 и от обмена нейтральным скаляром.

4. Каковы в главном порядке магнитные моменты W^+ и Z^0 в стандартной электрослабой теории?

5. Какие последствия для объединенной теории сильных и электрослабых взаимодействий, описанной в § 21.5, имело бы обнаружение четвертого поколения кварков и лептонов?

6. Предположим, что в сверхпроводнике несколько полей с несоизмеримыми значениями электрического заряда обладают ненулевыми вакуумными средними. Как изменятся при этом свойства сверхпроводника, обсуждавшиеся в § 21.6?

Литература

1. *Goldstone J.* // *Nuovo Cimento* **9**, 154 (1961); *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.* // *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
2. *Higgs P.W.* // *Phys. Rev. Lett.* **12**, 132 (1964); *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508 (1964); *Phys. Rev.* **145**, 1156 (1966); *Englert F., Brout R.* // *Phys. Rev. Lett.* **13**, 321 (1964); *Guralnik G.S., Hagen C.R., Kibble T.W.B.* // *Phys. Rev. Lett.* **13**, 585 (1964); *Kibble T.W.B.* // *Phys. Rev.* **155**, 1554 (1967); *Weinberg S.* // *Phys. Rev. Lett.* **18**, 507 (1967): сноска 7.
3. *Weinberg S.* // *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967). *Salam A.* *Elementary Particle Physics*, ed. N. Svartholm (Almqvist and Wiksells, Stockholm, 1968). С. 367.
- 3а. Фейнмановские правила в унитарной калибровке для общей калибровочной теории впервые были приведены в статье *Weinberg S.* // *Phys. Rev.* **D7**, 1068 (1973).
4. *'t Hooft G.* // *Nucl. Phys.* **B35**, 167 (1971); *Lee B.W.* // *Phys. Rev.* **D5**, 823 (1972).
5. *Fujikawa K., Lee B.W., Sanda A.* // *Phys. Rev.* **D6**, 2923 (1972).
- 5а. *Lee B.W., Zinn-Justin J.* // *Phys. Rev.* **D5**, 3121, 3137 (1972); *Phys. Rev.* **D7**, 1049 (1972); *'t Hooft G., Veltman M.* // *Nucl. Phys.* **B50**, 318 (1972); *Lee B.W.* // *Phys. Rev.* **D9**, 933 (1974).
6. *Georgi H., Glashow S.L.* // *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1494 (1972).
7. *Lee T.D., Yang C.N.* // *Phys. Rev.* **98**, 101 (1955).

8. Модели с неполной $SU(2) \times U(1)$ -симметрией предлагались в работах: *Glashow S.L.* // Nucl. Phys. **22**, 579 (1961); *Salam A., Ward J.* // Phys. Lett. **13**, 168 (1964). См. также *Schwinger J.* // Ann. Phys. (N.Y.) **2**, 407 (1957).
9. Предположения о возможности существования нейтральных токов восходят к работам *Gamov G., Teller E.* // Phys. Rev. **51**, 288 (1937); *Kemmer N.* // Phys. Rev. **52**, 906 (1937); *Wentzel G.* // Helv. Phys. Acta **10**, 108 (1937); *Bludman S.* // Nuovo Cimento **9**, 433 (1958); *Leites-Lopes J.* // Nucl. Phys. **8**, 234 (1958).
10. Нейтральные токи впервые наблюдались в эксперименте по $\bar{\nu}e^-$ -рассеянию в CERN, см.: *Hasert F.J. et al.* (Aachen-Brussels-CERN-Ecole Polytechnique-Milan-Orsay-London collaboration) // Phys. Lett. **46**, 121 (1973).
11. *Cabbibo N.* // Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963).
12. *Towner I.S., Hagberg E., Cardy J.C., Koslowsky V.T., Savard G.* // Chalk River preprint nucl-th/9507005 (1995).
13. *Glashow S.L., Iliopoulos J., Maiani L.* // Phys. Rev. **D2**, 1285 (1970).
14. *Weinberg S.* // Phys. Rev. Lett. **27**, 1688 (1971); Phys. Rev. **5**, 1413 (1972).
15. *Aubert J.J. et al.* // Phys. Rev. Lett. **33**, 1404 (1974); *Augustin J.E. et al.* // Phys. Rev. Lett. **33**, 1406 (1974).
16. *Perl M.L. et al.* // Phys. Rev. Lett. **35**, 1489 (1975).
17. *Herb S.W. et al.* // Phys. Rev. Lett. **39**, 252 (1977).
18. *Abe F. et al.* // Phys. Rev. Lett. **74**, 2626 (1995); *Abachi S. et al.* // Phys. Rev. Lett. **74**, 2632 (1995).
19. Коллаборации CDF и D0 (Fermilab) приводят значения $178 \pm 8 \pm 10$ ГэВ (F. Abe et al., ссылка 18) и $199^{+19}_{-21} \pm 22$ ГэВ (S. Abachi et al., ссылка 18) соответственно; первая из указанных ошибок — статистическая, вторая — систематическая. Совместный анализ этих результатов дает величину 181 ± 12 ГэВ, см.: *Ellis J., Fogli G.L., Lisi E.* // CERN-BARI preprint hep-ph/9507424.
20. *Kobayashi M., Maskawa K.* // Progr. Theor. Phys. **49**, 282 (1972).
- 20a. *Gilman F.J., Kleinknecht K., Renk B.* // Carnegie Mellon-Mainz preprint CMU-HUP95-19-DOE-ER/40682-107 (1995), будет опубликовано в 1995 г. в Review of Particle Properties.
- 20b. *Weinberg S.* // Phys. Rev. Lett. **37**, 657 (1976). Ранние модели, в которых за нарушение симметрий CP и T отвечали скалярные поля, см.: *Lee T.D.* // Phys. Rev. **D8**, 1226 (1973); Phys. Rep. **9C**, 143 (1974).
21. *Hasert F.J. et al.* // Phys. Lett. **46B**, 138 (1973); *Musset P.* // Jour. de Physique **11/12**, T34 (1973). Нейтральные токи наблю-

- дались примерно в то же время группой Harvard-Pennsylvania-Wisconsin-Fermilab в Fermilab. Однако публикация их статьи задержалась, а на заново собранном детекторе воспроизвести первоначальный сигнал не удалось. Экспериментальные свидетельства в пользу существования нейтральных токов были опубликованы этой группой в *Benvenuti A. et al. // Phys. Rev. Lett.* **32**, 800 (1974).
22. *Arnison G. et al. // Phys. Lett.* **122B**, 103 (1983); **126B**, 398 (1983); **129B**, 273 (1983); **134B**, 469 (1984); **147B**, 241 (1984).
23. *Abe F. et al. (CDF collaboration) // Phys. Rev. Lett.* **75**, 11 (1995). Масса W измеряется при наблюдении распадов $W \rightarrow \mu + \nu$ и $W \rightarrow e + \nu$.
24. CERN report LEPEWWG/95-01, неопубликовано (1995).
25. *Green M., Weltman M. // Nucl. Phys.* **B169**, 137 (1980); *Novikov V.A., Okun' L.B., Vysotsky M.I. // Nucl. Phys.* **B397**, 35 (1992). Более поздние работы см.: *Langacker P.* Precision Tests of the Standard Model (World Scientific, Singapore, 1994); *Baumert P., Burgess C.P., Maksymyk I. // McGill-Neuchatal-Texas preprint hep-ph/9505339* (1995); *Hollik W. // Karlsruhe preprint hep-ph/9507406* (1995).
26. *Fanchotti S., Kniehl B., Sirlin A. // Phys. Rev.* **D48**, 307 (1973), см. также приведенные там ссылки.
27. *Ellis J., Fogli G.L., Lisi E.*, ссылка 19.
- 27a. *Weinberg S. // Phys. Rev. Lett.* **43**, 1566 (1979).
- 27b. Например, в рамках так называемого механизма качелей такая по порядку величины масса нейтрино возникает в результате обмена тяжелым нейтральным лептоном массы M ; см.: *Gell-Mann M., Ramond P., Slansky R.* Supergravity, ed. P. van Nieuwenhuizen, D. Freedman (North-Holland, Amsterdam, 1979). С. 315; *Yanagida T. // Progr. Theor. Phys.* **B135**, 66 1978.
- 27с. *Weinberg S.*, ссылка 27а; *Wilczek F., Zee A. // Phys. Rev. Lett.* **43**, 1571 (1979). См. также *Weinberg S. // Phys. Rev.* **D22**, 1694 (1980).
28. Этот общий формализм был приведен в работе *Weinberg S. // Phys. Rev.* **D13**, 974 (1976). Ранние работы по динамическому нарушению симметрии в калибровочных теориях см.: *Jackiw R., Johnson K. // Phys. Rev.* **D8**, 2386 (1973); *Cornwall J.M., Norton R.E. // Phys. Rev.* **D8**, 3338 (1973).
29. Эта интерпретация результатов стандартной модели принадлежит *Susskind L.*, ссылка 30.

30. *Weinberg S.*, ссылка 28 и *Phys. Rev.* **D19**, 1277 (1979); *Susskind L.* // *Phys. Rev.* **D19**, 2619 (1979). Термин “техницвет” предложил Susskind.
31. *Dimopoulos S., Susskind L.* // *Nucl. Phys.* **B15**, 237 (1979); *Eichten E., Lane K.* // *Phys. Lett.* **90B**, 125 (1980); *Weinberg S.*, неопубликованная работа, которую использовали Эйхтен и Лейн. См. также обзор: *Fahri E., Susskind L.* // *Phys. Rep.* **74**, 277 (1981).
32. *Weinberg S.* // *Phys. Rev.* **D5**, 1962 (1972).
33. *Pati J., Salam A.* // *Phys. Rev. Lett.* **31**, 275 (1973).
34. *Georgi H., Glashow S.L.* // *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974).
35. *Georgi H.* *Particles and Fields* — 1974, ed. C. Carlson (Amer. Inst. of Physics, N.Y., 1975).
36. *Georgi H., Quinn H.R., Weinberg S.* // *Phys. Rev. Lett.* **33**, 451 (1974).
- 36a. *Dimopoulos S., Georgi H.* // *Nucl. Phys.* **B193**, 150 (1981); *Ellis J., Kelley S., Nanopoulos D.V.* // *Phys. Lett.* **B260**, 131 (1991); *Amaldi U., de Boer W., Furstmann H.* // *Phys. Lett.* **B260**, 447 (1991). Более поздний анализ данных см.: *Langacker P., Polonsky N.* // *Phys. Rev.* **D47**, 4028 (1993); **D49**, 1454 (1994); *Hall L.J., Sarid U.* // *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2673 (1993).
- 36b. *Dimopoulos S., Raby S., Wilczek F.* // *Phys. Rev.* **D24**, 1681 (1981).
37. *Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R.* // *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
38. *Anderson P.W.* // *Phys. Rev.* **130**, 439 (1963).
39. *Weinberg S.* // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* № 86, 43 (1986).
40. *Josephson B.D.* // *Phys. Lett.* **1**, 25 (1962).
41. *Ginzburg V.L., Landau L.D.* // *JETP (USSR)* **20**, 1064 (1950).
42. *Gor'kov L.P.* // *Soviet Phys. JETP* **9**, 1364 (1959).
43. *Abrikosov A.A.* // *Soviet Phys. JETP* **5**, 1174 (1957).
- 43a. *Bogomol'nyi E.B.* // *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976). Численные результаты см.: *Bogomol'nyi E.B., Vainstein A.I.* // *Sov. J. Nucl. Phys.* **23**, 588 (1976).
44. *Benfatto G., Gallavotti G.* // *J. Stat. Phys.* **59**, 541 (1990); *Phys. Rev.* **42**, 9967 (1990); *Feldman J., Trubowitz E.* // *Helv. Phys. Acta* **63**, 157 (1990); **64**, 213 (1991); **65**, 679 (1992); *Shankar R.* // *Physica A177*, 530 (1991); *Rev. Mod. Phys.* **66**, 129 (1993); *Polchinski J.* *Recent Developments in Particle Theory, Proceedings of the 1992 TASI*, eds. J. Harvey, J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993).
- 44a. *Weinberg S.* // *Nucl. Phys.* **B413**, 567 (1994).

45. *Stratonovich R.L.* // Sov. Phys. Dokl. **2**, 416 (1957); *Hubbard J.* // Phys. Rev. Lett. **3**, 77 (1959).
46. *Abrikosov A.A., Gor'kov L.P., Dzyaloshinskii I.Ye.* Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics, 2d edn., transl. by D.E. Brown (Pergamon Press, Oxford, 1965). *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Б.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: ГИФМЛ, 1962.
47. Чтобы придать массе M точный смысл, необходимо учесть как двухпетлевые поправки к уравнениям ренормгруппы (21.5.6)–(21.5.8), так и однопетлевые “пороговые поправки” к условию (21.5.5). См. *Weinberg S.* // Phys. Lett. **82B**, 387 (1979).

АНОМАЛИИ

Симметрии в квантовой теории поля имеют особенности проявления, не имеющие аналогов в классических теориях. Присутствие в квантовой теории поля бесконечностей вынуждает нас даже в перенормируемых теориях применять в фактических вычислениях некоторый регуляризатор или обрезание. Этот регуляризатор может нарушить симметрии теории, и даже после того как в конце вычисления его удалить, следы нарушения могут сохраниться. Впервые подобная проблема возникла при попытке понять скорость распада нейтрального пиона: появилась аномалия, нарушающая *глобальную* симметрию сильных взаимодействий. Аномалии могут нарушать также и *калибровочные* симметрии, однако в этом случае теория становится противоречивой, и поэтому условие устранения аномалий можно использовать в качестве ограничения на физические калибровочные теории. Насколько большое значение имеют аномалии, станет наиболее очевидно в следующей главе, в которой мы изучим непертурбативные эффекты, связанные с аномалиями в присутствии топологически нетривиальных полевых конфигураций.

§ 22.1. Задача о распаде π^0

К середине 1960-х годов описание пиона как голдстоуновского бозона, связанного со спонтанно нарушенной $SU(2) \otimes SU(2)$ симметрией сильных взаимодействий, привело к ряду достижений, отмеченных нами в гл. 19. Однако оно имело и несколько существенных недостатков. Наибольшее опасение вызывала скорость доминирующей моды распада нейтрального пиона, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Решение именно этой проблемы и привело к открытию нарушающих аномалий симметрии.

Проинтегрировав по всем тяжелым и захваченным частицам, мы получим эффективный лагранжиан для $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ в виде единственно возможного калибровочно- и лоренц-инвариантного слагаемого, которое содержит не более двух производных:

$$\mathcal{L}_{\pi\gamma\gamma} = g\pi^0\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}, \quad (22.1.1)$$

где g — неизвестная константа размерности [масса] $^{-1}$. Тогда для вычисления скорости $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ можно воспользоваться методами, кото-

рые изложены в § 3.4. В результате мы получим

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{m_\pi^3 g^2}{\pi}. \quad (22.1.2)$$

Можно было бы ожидать, что g будет иметь порядок

$$g \approx \frac{e^2}{8\pi^2 F_\pi}, \quad (22.1.3)$$

где $F_\pi \simeq 190$ МэВ используется в качестве типичного массового масштаба сильных взаимодействий. Множитель $1/8\pi^2$ возникает за счет того, что отвечающая за распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ диаграмма, должна содержать по крайней мере одну петлю. Например, в 1949 г. еще до создания КХД, используя теорию пионов и ядер с лагранжианом взаимодействия $iG_{\pi N} \bar{\pi} \times \vec{N} 2\vec{t}\gamma_5 N$, Стейнбергер [1] получил вклад в g от треугольных диаграмм с одной протонной петлей вида

$$g_\Delta = \frac{e^2 G_{\pi N}}{32\pi^2 m_N}. \quad (22.1.4)$$

Численно это выражение не сильно отличается от (22.1.3), поскольку из соотношения Голдберга–Траймана (см. § 19.4) следует, что $G_{\pi N} = 2m_N g_a / F_\pi$.

Приведенная оценка для амплитуды $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ не учитывает особых ограничений, налагаемых $SU(2) \otimes SU(2)$ симметрией. Электромагнитное взаимодействие нарушает большую часть этой группы, но не влияет, по мере крайней формально, на подгруппу $U(1) \times U(1)$, которой соответствуют электрически нейтральные генераторы группы $SU(2) \otimes SU(2)$. При действии на кварки, инфинитезимальные псевдоскалярные элементы этой подгруппы дают

$$\delta u = i\epsilon\gamma_5 u, \quad \delta d = -i\epsilon\gamma_5 d, \quad (22.1.5)$$

поэтому электрический ток инвариантен:

$$\delta \left[\frac{2}{3} \bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d}\gamma^\mu d \right] = 0. \quad (22.1.6)$$

(Это соображение, только с протоном и нейтроном вместо u и d кварков, предложили Сазерленд [2] и Вельтман [3] еще до появления квантовой хромодинамики.) Поскольку π^0 — голдстоуновский бозон, который связан с этой симметрией, не содержащее производных взаимодействие типа (22.1.1) может возникнуть только от ее нарушения кварковыми массами и поэтому должно быть пропорционально $m_\pi^2 \sim \sim m_u + m_d$. Следовательно, константа g будет подавлена [2, 3] дополнительным множителем m_π^2/m_N^2 :

$$g \approx \frac{e^2}{8\pi^2 F_\pi} \left(\frac{m_\pi^2}{m_N^2} \right). \quad (22.1.7)$$

(Вместо m_N можно использовать масштаб нарушения киральной симметрии $2\pi F_\pi = 1200$ МэВ, обсуждавшийся в § 19.3. Это немного изменит наши результаты.) Кроме того, существуют кирально-инвариантные эффективные $\pi^0\gamma\gamma$ -взаимодействия, которые содержат производную поля π^0 . Требование лоренц-инвариантности приводит к тому, что они должны содержать по крайней мере две дополнительные производные. Используя однородное уравнение Максвелла $\partial_\mu F_{\nu\lambda} - \partial_\nu F_{\mu\lambda} = -\partial_\lambda F_{\mu\nu}$ и интегрируя его по частям, мы видим, что имеется только одно независимое кирально-инвариантное взаимодействие, которое содержит как раз две дополнительные производные. Оно получается включением в уравнение (22.1.1) оператора Даламбера, действующего на поле π^0 . На массовой поверхности пиона это эквивалентно взаимодействию (22.1.1) с дополнительным множителем m_π^2 и приводит к той же оценке (22.1.7). Иногда утверждалось, что киральная симметрия запрещает распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, однако более точно было бы сказать, что она приводит к тому, что скорость этого процесса при $m_\pi \rightarrow 0$ ведет себя как m_π^7 , а не как m_π^3 .

Трудность состоит в том, что наблюдаемая скорость $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ значительно больше, чем следует из (22.1.7). Фактически она намного ближе к значению, которое можно вывести из предварительного результата (22.1.3). Точнее говоря, согласно уравнениям (22.1.7) и (22.1.2), скорость распада должна быть

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) \approx \frac{m_\pi^7 \alpha^2}{4\pi^3 F_\pi^2 m_N^4} = 1,9 \times 10^{13} \text{ с}^{-1}, \quad (22.1.8)$$

в то время как использование (22.1.3) вместо (22.1.7) дает

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) \approx \frac{m_\pi^3 \alpha^2}{4\pi^3 F_\pi^2} = 4,4 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}. \quad (22.1.9)$$

Наблюдаемая скорость равна $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = (1,19 \pm 0,08) \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$, что находится в удовлетворительном согласии с оценкой (22.1.9) и почти на три порядка превосходит “улучшенный” результат (22.1.8)! Приходится заключить, что в данном случае нечто аномальное уничтожает киральную симметрию, руководствуясь которой, мы ввели в константу g дополнительный множитель m_π^2/m_N^2 . Аналогичные проблемы возникают и при попытке выяснить скорости некоторых других процессов, таких как $\eta^0 \rightarrow \gamma + \gamma$.

В 1969 г. Белл и Джакив [4] выяснили, что источником этой аномалии является нарушение киральной симметрии регуляризатором, который необходимо ввести для получения следствий из сохранения нейтрального аксиального векторного тока для однопетлевых фейнмановских диаграмм. Их результат был подтвержден, обобщен и расширен на более высокие порядки Адлером [5], независимо от них обнаружившим киральные аномалии при изучении аксиальных векторных тождеств Уорда в квантовой электродинамике. В 1979 г.

Фуджикава [6] установил, что при формулировке теории поля через интегралы по путям киральная аномалия входит только в меру, используемую для определения интеграла по фермионным полям. Как мы увидим в следующем параграфе, такой подход упрощает вычисление порождаемой этой аномалией амплитуды распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ во всех порядках теории возмущений. После этого мы вернемся к прямому вычислению аномалий в случае более общих теорий и обсудим их различные применения.

§ 22.2. Преобразование меры: абелева аномалия

Вернемся к вычислению аномалий, возникающих при распаде π^0 . Для этого мы, следуя Фуджикаве, примем интерпретацию [6], согласно которой наличие аномалии является признаком того, что определить подходящую инвариантную меру интегрирования по фермионным полевым переменным невозможно. Анализ Фуджикавы базировался на использовании интегралов по путям в евклидовом пространстве и разложении фермионных переменных интегрирования по собственным функциям калибровочно-инвариантного и эрмитового в четырехмерном пространстве дираковского оператора. Мы же для начала представим менее строгое вычисление, основанное на обычных интегралах по путям в пространстве Минковского, что позволит нам получить правильный ответ с минимумом затрат. В конце параграфа мы вкратце рассмотрим евклидов подход и используем его для получения известной теоремы об индексе.

Начнем с вычисления аномалии, которая возникает при трансформации меры, если совершить произвольные локальные матричные преобразования $\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x)$ над столбцом $\psi_n(x)$, описывающим безмассовые комплексные фермионные поля спина $1/2$, некирально взаимодействующие с набором калибровочных полей $A_\alpha^\mu(x)$ (аналогично тому, как в задаче о вычислении скорости $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ кварковые поля u и d взаимодействуют с электромагнитным векторным потенциалом $A^\mu(x)$). Поскольку это фермионные переменные, мера преобразуется с определителем, обратным по отношению к определителю матрицы преобразования:

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow (\text{Det } \mathcal{U} \text{ Det } \bar{\mathcal{U}})^{-1} [d\psi][d\bar{\psi}], \quad (22.2.1)$$

где

$$\mathcal{U}_{xn,ym} \equiv U(x)_{nm} \delta^4(x-y), \quad (22.1.2)$$

$$\bar{\mathcal{U}}_{xn,ym} \equiv [\gamma_4 U(x)^\dagger \gamma_4]_{nm} \delta^4(x-y), \quad (22.2.3)$$

а $\gamma_4 \equiv i\gamma^0$ — матрица, входящая в определение $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$. Индексы n и m пробегают ароматовые и спиновые дираковские значения.

Здесь читатель может удивиться: зачем было утруждать себя и включать множители γ_4 в соотношение (22.2.3), если все равно они образуют унитарное преобразование, которое не меняет определители. Ответ состоит в том, что, как мы увидим в дальнейшем, для получения разумного результата необходимо при вычислении пропагаторов и определителей регуляризовать сумму по фермионным модам, и тогда множители γ_4 все-таки будут влиять на регуляризованные определители. Таким образом, включать или не включать множители γ_4 зависит от метода регуляризации, которым мы пользуемся для того, чтобы наши манипуляции привели к определенному результату. Мы включим их, поскольку хотим провести регуляризацию способом, при котором сохраняется лоренц-инвариантность, и тогда именно $\gamma_4 U^+(x) \gamma_4$, а не $U^+(x)$, преобразуется как скаляр.

Во-первых, давайте рассмотрим случай, когда $U(x)$ — унитарное некиральное преобразование

$$U(x) = \exp[i\alpha(x)t], \quad (22.2.4)$$

где t — обычная эрмитова матрица (не включающая γ_5 , но не обязательно бесследовая) и $\alpha(x)$ — произвольная действительная функция от x . В этом случае $\mathcal{U}$ — псевдоунитарна:

$$\overline{\mathcal{U}} \mathcal{U} = 1, \quad (22.2.5)$$

поэтому мера инвариантна по отношению к преобразованиям такого вида. В частности, никакими аномалиями не нарушается симметрия самой калибровочной группы, где t — один из некиральных генераторов t_α .

Теперь рассмотрим локальные киральные преобразования

$$U(x) = \exp[i\gamma_5 \alpha(x)t], \quad (22.2.6)$$

где t и $\alpha(x)$ такие же, как и в предыдущем случае. Тогда $\mathcal{U}$ — псевдоэрмитова:

$$\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}. \quad (22.2.7)$$

Мера не инвариантна по отношению к киральным преобразованиям; она преобразуется согласно

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow (\text{Det } \mathcal{U})^{-2} [d\psi][d\bar{\psi}]. \quad (22.2.8)$$

Ограничимся случаем *инфинитезимальных* локальных киральных преобразований. Положив в формуле (22.2.6) $\alpha(x)$ инфинитезимальной, получим

$$[\mathcal{U} - 1]_{nx,my} = i\alpha(x)[\gamma_5 t]_{nm} \delta^4(x - y). \quad (22.2.9)$$

Используя тождество $\text{Det } M = \exp \text{Tr} \ln M$ и соотношение $\ln(1+x) \rightarrow x$ при $x \rightarrow 0$, видим, что мера преобразуется согласно

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow \exp \left\{ i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A}(x) \right\} [d\psi][d\bar{\psi}], \quad (22.2.10)$$

где $\mathcal{A}$ — функция аномалии:

$$\mathcal{A}(x) = -2 \operatorname{Tr}\{\gamma_5 t\} \delta^4(x - x). \quad (22.2.11)$$

Здесь “Tr” обозначает след по дираковским и ароматовым индексам. В континуальном интеграле мера $[d\psi][d\bar{\psi}]$ присутствует с весовым множителем $\exp\{i \int d^4x \mathcal{L}(x)\}$. Поэтому наличие в законе преобразования меры (22.2.10) множителя $\exp\{i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A}(x)\}$ эквивалентно тому, что лагранжиана плотность $\mathcal{L}(x)$ не инвариантна, а преобразуется согласно $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha(x) \mathcal{A}(x)$. Следовательно, если мы используем проинтегрированный по фермионам эффективный лагранжиан, то для учета аномалии мы должны включить в него неинвариантное слагаемое таким образом, чтобы

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) + \alpha(x) \mathcal{A}(x). \quad (22.2.12)$$

Теперь осталось вычислить функцию аномалии $\mathcal{A}(x)$.

На первый взгляд не похоже, чтобы мы могли получить для нее какой-либо определенный результат. Дельта-функция бесконечна, а след равен нулю. Чтобы придать смысл дельта-функции $\delta^4(x - x)$, необходимо ввести регуляризатор. Мы можем сделать это калибровочно-инвариантным способом, вставляя дифференциальный оператор $f(-\not{D}_x^2/M^2)$, который действует на дельта-функцию до того, как ее аргумент устремляется к нулю:

$$\mathcal{A}(x) = -2[\operatorname{Tr}\{\gamma_5 t f(-\not{D}_x^2/M^2)\} \delta^4(x - y)]_{y \rightarrow x}. \quad (22.2.13)$$

Здесь D_x — дираковский дифференциальный оператор при наличии калибровочного поля $A_\alpha^\mu(x)$:

$$(D_x)_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} - it_\alpha A_{\alpha\mu}(x), \quad (22.2.14)$$

M — некоторая большая масса, которую в конечном счете необходимо устремить к бесконечности, а $f(s)$ — гладкая функция, удовлетворяющая единственному условию¹⁾: когда s меняется от 0 до ∞ , $f(s)$ должна гладко убывать от 1 до 0:

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0, \quad (22.2.15)$$

$$s f'(s) = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \text{ и } s = \infty. \quad (22.2.16)$$

Следует отметить, что мы не берем регуляризационную функцию в виде функции от $\not{\partial}$, поскольку хотим сохранить калибровочную инвариантность, и не берем ее в виде функции от $D^\mu D_\mu$, потому что нам нужно регуляризовать не только детерминант, но и фермионный пропагатор $\not{D}^{-1}$.

¹⁾ Например, мы могли бы взять $f(s) = e^{-s^2}$, как изначально и сделал Фуджикава, или $f(s) = 1/(1+s)$.

Чтобы вычислить выражение (22.2.13), воспользуемся фурье-представлением дельта-функции и запишем аномалию в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= -2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\text{Tr}\{\gamma_5 t f(-\not{D}_x^2/M^2)\} e^{ik \cdot (x-y)}]_{y=x} = \\ &= -2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}\{\gamma_5 t f(-[ik + \not{D}_x]^2/M^2)\}.\end{aligned}$$

(Производная по x равна нулю при действии на крайнюю правую часть второго выражения и отлична от нуля при действии на $A_{\alpha\mu}(x)$). Меняя масштаб импульса k^μ в M раз, получаем

$$\mathcal{A}(x) = -2M^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}\{\gamma_5 t f(-[ik + \not{D}_x/M]^2)\}. \quad (22.2.17)$$

Аргумент функции обрезания можно переписать в виде

$$-[ik + \frac{\not{D}_x}{M}]^2 = k^2 - \frac{ik \cdot D_x}{M} - \left(\frac{\not{D}_x}{M}\right)^2. \quad (22.2.18)$$

В пределе $M \rightarrow 0$ вклад в уравнение (22.2.17) дают те члены от разложения $f(-[ik + \not{D}_x/M]^2)$, которые содержат не менее четырех степеней $1/M$ и по крайней мере четыре матрицы Дирака, поскольку иначе след по дираковским индексам будет равен нулю. В результате остаются слагаемые только второго порядка по $\not{D}_x^2$:

$$\mathcal{A}(x) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f''(k^2) \text{Tr}\{\gamma_5 t \not{D}_x^4\}, \quad (22.2.19)$$

которые уже не зависят от регуляризационной массы M .

Для вычисления интеграла по k повернем контур интегрирования k^0 , так же как мы делали это при вычислении фейнмановских диаграмм. В результате k^0 заменится на ik^4 , где k^4 принимает значение от $-\infty$ до ∞ . (Этот шаг можно четко обосновать, только если изначально работать с евклидовыми интегралами по путям.) Тогда интеграл приводится к виду

$$\int d^4 k f''(k^2) = i \int_0^\infty 2\pi^2 \kappa^3 d\kappa f''(\kappa^2). \quad (22.2.20)$$

Дважды интегрируя по частям и используя сначала (22.2.16), а затем (22.2.15), получаем

$$\int d^4 k f''(k^2) = i\pi^2 \int_0^\infty ds s f''(s) = -i\pi^2 \int_0^\infty ds f'(s) = i\pi^2. \quad (22.2.21)$$

Чтобы вычислить след, запишем

$$\begin{aligned}\not{D}_x^2 &= \frac{1}{4} \{(D_x)^\mu, (D_x)^\nu\} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} + \frac{1}{4} [(D_x)^\mu, (D_x)^\nu] [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \\ &= D_x^2 - \frac{1}{4} i t_\alpha F_\alpha^{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu].\end{aligned} \quad (22.2.22)$$

Единственным слагаемым из $\mathcal{D}_x^4$, которое дает ненулевой вклад в след по дираковским индексам, является слагаемое, содержащее произведение четырех матриц Дирака. Вклад от него равен

$$\mathrm{tr}_D\{\gamma_5[\gamma_\mu, \gamma_\nu][\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\} = 16i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (22.2.23)$$

где “ tr_D ” обозначает след только по дираковским индексам, и, как обычно, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор с $\epsilon^{0123} = +1$. Наконец, использование в выражении (22.2.19) формул (22.2.21)–(22.2.23) дает функцию аномалии в виде

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu}(x) F_\beta^{\rho\sigma}(x) \mathrm{tr}\{t_\alpha t_\beta t\}. \quad (22.2.24)$$

Здесь “ tr ” обозначает след только по тем индексам, которые нумеруют различные виды фермионов. В особом случае, когда матрица t является единичной, величина (22.2.24) называется *плотностью Черна–Понтрягина*.

Полученный результат можно выразить через ток, связанный с аномальной симметрией. Предположим для простоты, что само действие инвариантно по отношению к преобразованию симметрии $\psi(x) \rightarrow \psi(x) + it\gamma_5\alpha\psi(x)$, где α — постоянный инфинитезимальный параметр. Тогда, как мы видели в § 7.3, изменение действия при таком преобразовании, но с *зависящим* от пространственно-временных координат параметром $\alpha(x)$, можно записать в виде: $\delta I = \int d^4x J_5^\mu(x) \partial_\mu \alpha(x)$, где $J_5^\mu(x)$ — ток, который сохраняется, если левые операторы удовлетворяют динамическим уравнениям, задающим условие стационарности действия по отношению к произвольным вариациям полей. Если сделать замену переменных $\delta\psi(x) = it\gamma_5\alpha(x)\psi(x)$, то соответствующее изменение в интеграле по фермионным полям будет равно

$$\delta \int [d\psi][d\bar{\psi}] e^{iI} = i \int d^4x \int [d\psi][d\bar{\psi}] [\mathcal{A}(x)\alpha(x) + J_5^\mu(x)\partial_\mu\alpha(x)] e^{iI}. \quad (22.2.25)$$

Но поскольку это всего лишь замена переменных, то при любом $\alpha(x)$ она не меняет значение интеграла по путям. Следовательно, для произвольных калибровочных полей

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu \rangle_A = \mathcal{A} = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\beta^{\rho\sigma} \mathrm{tr}\{t_\alpha t_\beta t\}, \quad (22.2.26)$$

где для любого оператора $\mathcal{O}$ его квантовое среднее $\langle \mathcal{O} \rangle_A$ на фиксированном фоновом поле $A^\mu(x)$ равно

$$\langle \mathcal{O} \rangle_A \equiv \frac{\int [d\psi][d\bar{\psi}] e^{iI} \mathcal{O}}{\int [d\psi][d\bar{\psi}] e^{iI}}. \quad (22.2.27)$$

Следует отметить, что уравнение (22.2.26) можно переписать в виде условия сохранения. Рассмотрим случай, когда $\mathrm{tr}\{t_\alpha t_\beta t\}$ пропорцио-

нален $\delta_{\alpha\beta}$:

$$\text{tr}\{t_\alpha t_\beta t\} = N\delta_{\alpha\beta}. \quad (22.2.28)$$

Определим ток, называемый *током Черна–Саймонса*:

$$\begin{aligned} G^\mu &\equiv 2\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left[A_{\gamma\nu} \partial_\lambda A_{\gamma\rho} + \frac{1}{3} C_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\nu} A_{\beta\lambda} A_{\gamma\rho} \right] = \\ &= \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left[A_{\gamma\nu} F_{\gamma\lambda\rho} - \frac{1}{3} C_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\nu} A_{\beta\lambda} A_{\gamma\rho} \right], \end{aligned} \quad (22.2.29)$$

удовлетворяющий тождеству

$$\partial_\mu G^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\gamma\mu\nu} F_{\gamma\lambda\rho}. \quad (22.2.30)$$

Соотношение (22.2.30) позволяет переписать формулу (22.2.26) в виде условия

$$\partial_\mu K^\mu = 0, \quad (22.2.31)$$

где

$$K^\mu \equiv \langle J_5^\mu \rangle_A + \frac{N}{8\pi^2} G^\mu. \quad (22.2.32)$$

Однако мы не можем использовать сохранение тока K^μ для доказательства того, что процесс $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ подавлен, как мы сделали это в предыдущем параграфе. Это связано с тем, что при выводе данного утверждения мы предполагали не только киральную симметрию, связанную с сохранением аксиального векторного тока, но также и калибровочную инвариантность, а как видно из (22.2.29), ток K^μ , хотя и сохраняется, но не является калибровочно-инвариантным.

Вывод формулы (22.2.24) для аномалии показывает, что если бы мы вычисляли функцию аномалии, используя в уравнении (22.2.13) дифференциальный оператор $f(-\partial_x^2/M^2)$ вместо $f(-\not{D}_x^2/M^2)$, мы получили бы, что аномалия равна нулю. Фактически при такой регуляризационной процедуре аксиальным векторным током является K^μ , а не J_5^μ . Как упоминалось выше, недостаток этой процедуры заключается в том, что регулирующий оператор уже не калибровочно-инвариантен, о чем свидетельствует наличие калибровочно-неинвариантного слагаемого в K^μ . Для фермионных пропагаторов, так же как и для детерминантов, не существует регуляризационной процедуры, которая одновременно и калибровочно- и кирально-инвариантна.

Теперь мы можем вернуться к задаче, в которой впервые возникло понятие аномалии, и использовать полученные нами результаты для вычисления фактической скорости процесса $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Интересующую нас симметрию генерируют зарядово-нейтральные киральные преобразования полей легких кварков:

$$\delta u = i\alpha\gamma_5 u, \quad \delta d = -i\alpha\gamma_5 d. \quad (22.2.33)$$

Поскольку u и d принадлежат одному и тому же представлению цветовой калибровочной группы, их вклады в глюон-глюонные члены аномалии симметрии (22.2.33) сокращаются. Поэтому в чистой квантовой

хромодинамике данная симметрия аномалий не содержит. С другой стороны, при наличии электромагнитного поля $A^\mu(x)$, эта симметрия имеет аномалию

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \text{tr}\{q^2 \tau_3\},$$

где q — зарядовая матрица кварков, а τ_3 — диагональная матрица 2×2 с элементами $+1$ для u и -1 для d . Если, как обычно, принять, что существует N_c u -кварков с зарядом $2e/3$ и столько же d -кварков с зарядом $-e/3$, то след будет равен

$$\text{tr}\{q^2 \tau_3\} = N_c \left(\frac{2e}{3}\right)^2 (+1) + N_c \left(\frac{-e}{3}\right)^2 (-1) = \frac{N_c e^2}{3},$$

поэтому в данном случае функция аномалии имеет вид

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x). \quad (22.2.34)$$

Следовательно, мы должны включить в эффективный лагранжиан слагаемые, которые преобразуются при локальном киральном преобразовании (22.2.33) так, что сам лагранжиан преобразуется согласно (22.2.12), т. е.

$$\delta \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = \alpha \mathcal{A}(x) = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \alpha. \quad (22.2.35)$$

При преобразовании (22.2.33) пионное поле преобразуется так

$$\delta \pi^0 = \alpha F_\pi, \quad (22.2.36)$$

где $F_\pi = 184$ МэВ — амплитуда пионного распада, введенная в гл. 19. (Условие нормировки для этой константы фиксируется определением генератора симметрии $\gamma_5 \tau_3 = 2\gamma_5 t_3$). Отсюда следует, что мы должны включить в эффективный лагранжиан слагаемое

$$\frac{\pi^0(x) \mathcal{A}(x)}{F_\pi} = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2 F_\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \pi^0(x). \quad (22.2.37)$$

Сравнивая это выражение с общей формулой (22.2.1) для эффективного лагранжиана, описывающего распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, видим, что константа g в (22.1.1) должна принимать значение [5]

$$g = \frac{N_c e^2}{48\pi^2 F_\pi}. \quad (22.2.38)$$

(Отсюда видно, что предыдущая оценка по порядку величины (22.1.3) была слишком большой как раз из-за множителя $6/N_c$.) Следовательно, скорость пионного распада (22.1.2) будет

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{N_c^2 \alpha^2 m_\pi^3}{144\pi^3 F_\pi^2} = \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \times 1,11 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}. \quad (22.2.39)$$

Наблюдаемая скорость равна

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = (1,19 \pm 0,08) \times 10^{16} \text{ с}^{-1},$$

что хорошо согласуется с теоретическим расчетом (22.2.39), только если $N_c = 3$. Успех приведенного вычисления был одним из первых этапов доказательства существования у кварков трех цветов.

Примечательно следующее: как мы видели в предыдущем параграфе, вскоре после открытия π^0 Стейнбергер вычислил значение g из диаграммы с одной протонной петлей. Он получил $g = e^2 G / 32\pi^2 m_N$, где G — псевдоскалярная пион-нуклонная константа связи. Это значение точно совпадает с (22.2.38) в случае $N_c = 3$, если выполняется соотношение $G = 2m_N / F_\pi$, которое следует из соотношения Голдберга–Треймана при $g_a = 1$. Правильный результат превосходит стейнбергеровский на множитель $g_A^2 = 1,56$. Причина, по которой Стейнбергер получил практически правильный результат, заключается в том, что ответ определяется треугольной аномалией, пропорциональной следу $\text{tr}\{q^2 \tau_3\}$. Для одного протона этот след равен e^2 , что совпадает с кварковым значением, найденным выше для случая трех цветов.

* * *

Ранее мы упоминали, что более строгий вывод аномалии можно дать, используя интегралы по путям в евклидовом пространстве-времени. (Использование евклидовых интегралов по путям коротко изложено в приложении А гл. 23.) Мы вводим четвертую евклидову координату $x_4 = ix^0 = -ix_0$ и соответственно ей $\partial_4 = -i\partial_0$, $\gamma_4 = i\gamma^0$ и $A_{4\alpha} = iA_\alpha^0$. Тогда пространственно-временной объем выражается в виде $d^4x = -i(d^4x)_E$, где $(d^4x)_E$ — евклидов элемент объема $(d^4x)_E = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. В евклидовом пространстве поля $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ должны рассматриваться как совершенно независимые. При локальных киральных преобразованиях они преобразуются согласно

$$\delta\psi(x) = i\alpha(x)t\gamma_5\psi(x), \quad \delta\bar{\psi}(x) = -i\alpha(x)\bar{\psi}(x)t\gamma_5.$$

Тогда преобразование меры снова определяется соотношением (22.2.10), в котором функция аномалии имеет вид (22.2.11). Как и раньше, мы вводим регуляризационную функцию и получаем для $\mathcal{A}(x)$ выражение (22.2.13). Существенное преимущество евклидового подхода состоит в том, что для действительных x_4 и $A_{4\alpha}$ оператор Дирака $i\not{D}$ в (22.2.13) эрмитов:

$$i\not{D} = [i\partial_i + t_\alpha A_{i\alpha}]\gamma_i, \quad (22.2.40)$$

где предполагается суммирование по повторяющимся индексам i, j , пробегающим значения 1, 2, 3, 4. Следовательно, он имеет ортонормированные собственные функции — спиноры $\varphi_\kappa(x)$

$$i\not{D}\varphi_\kappa = \lambda_\kappa\varphi_\kappa, \quad (22.2.41)$$

$$\int (d^4x)_E \varphi_\kappa(x)^\dagger \varphi_{\kappa'}(x) = \delta_{\kappa\kappa'} \quad (22.2.42)$$

с действительными собственными значениями λ_κ . Кроме того, мы предполагаем, как и во всем параграфе, что t коммутирует с $i\mathcal{D}$, поэтому φ_κ можно выбрать так, чтобы $t\varphi_\kappa = t_\kappa\varphi_\kappa$. Эти собственные функции удовлетворяют условию полноты

$$\sum_\kappa \varphi_\kappa(x) \varphi_\kappa^\dagger(y) = \delta^4(x - y) 1, \quad (22.2.43)$$

где “1” — единичная матрица размерности 4×4 . Следовательно, функцию аномалии можно записать как предел явно сходящейся суммы:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= -2 \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 t f(-\mathcal{D}^2/M^2) \sum_\kappa \varphi_\kappa(x) \varphi_\kappa^\dagger(x) \right\} = \\ &= -2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_\kappa t_\kappa f(\lambda_\kappa^2/M^2) (\varphi_\kappa^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_\kappa(x)). \end{aligned} \quad (22.2.44)$$

Точно таким же способом, каким мы получили для функции аномалии выражение (22.2.24), можно показать, что в данном случае

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{ijkl}^E F_{ij\alpha} F_{kl\beta} \text{tr}\{t_\alpha t_\beta t\}, \quad (22.2.45)$$

где ϵ_{ijkl}^E — полностью антисимметричный тензор с $\epsilon_{1234}^E = +1$. (В уравнениях (22.2.24) и (22.2.45) знаки отличаются из-за того, что во втором из них, по сравнению с первым, пропущены два множителя i : один из (22.2.23), поскольку

$$\text{tr}_D \{ \gamma_5 [\gamma_i, \gamma_j] [\gamma_k, \gamma_l] \} = 16 \epsilon_{ijkl}^E,$$

а второй — вследствие замены в соотношении (22.2.20) $d^4 k$ на $(d^4 k)_E$.)

Теперь для любой заданной собственной функции $\varphi_\kappa(x)$ операторов $i\mathcal{D}$ и t с собственным значением $\lambda_\kappa \neq 0$ существует другая нормированная собственная функция $\varphi_{\kappa-}(x)$, которая задается соотношением $\varphi_{\kappa-}(x) = \gamma_5 \varphi_\kappa(x)$ и имеет собственные значения, равные $\lambda_{\kappa-} = -\lambda_\kappa$ и $t_{\kappa-}$. (Напомним, что в книге мы пользуемся обозначениями, в которых γ_5 эрмитова, $\gamma_5 = -i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$.) Поскольку $\phi_\kappa(x)$ и $\phi_{\kappa-}(x)$ — собственные векторы эрмитового оператора, соответствующие разным собственным значениям, они ортогональны, и поэтому

$$\int d^4 x (\varphi_\kappa^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_\kappa(x)) = 0.$$

Это условие приводит к тому, что остается сумма только по собственным функциям с $\lambda_\kappa = 0$. Обычно эти функции не располагаются парами; поскольку γ_5 антикоммутирует с $i\mathcal{D}$, их можно выбрать в виде ортонормированных собственных функций φ_u и φ_v одновременно оператора $i\mathcal{D}$ с собственным значением, равным нулю, и оператора

γ_5 с собственными значениями $+1$ и -1 соответственно:

$$\begin{aligned} i \not{D} \varphi_u &= 0, & \gamma_5 \varphi_u &= \varphi_u, \\ i \not{D} \varphi_v &= 0, & \gamma_5 \varphi_v &= -\varphi_v. \end{aligned} \quad (22.2.46)$$

Используя тот факт, что $f(0) = 1$, приводим уравнение (22.2.44) к виду

$$\mathcal{A}(x) = -2 \left[\sum_u t_u (\varphi_u^\dagger(x) \varphi_u(x)) - \sum_v t_v (\varphi_v^\dagger(x) \varphi_v(x)) \right]. \quad (22.2.47)$$

Далее, поскольку φ_u и φ_v — нормированы условием (22.2.42), интеграл от (22.2.47) дает

$$\int (d^4 x)_E \mathcal{A}(x) = -2 \left[\sum_u t_u - \sum_v t_v \right], \quad (22.2.48)$$

где суммы по u и v пробегают нулевые левые и правые моды оператора $i \not{D}$ соответственно. В частности, для случая, когда t — единичная матрица, можно, используя (22.2.45), записать уравнение (22.2.48) в виде соотношения между функционалом от калибровочного поля и числом нулевых мод дираковского оператора, имеющих определенные киральности:

$$-\frac{1}{32\pi^2} \int (d^4 x)_E \epsilon_{ijkl}^E F_{\alpha ij} F_{\beta kl} \text{tr}[t_\alpha t_\beta] = n_+ - n_-, \quad (22.2.49)$$

где $n_\pm$ — число нулевых мод оператора $\not{D}$, которые имеют собственные значения для γ_5 , равные ± 1 . Это соотношение представляет собой знаменитую *теорему Атья–Зингера об индексе* [6a]. Помимо прочего, эта теорема показывает, что при вариациях калибровочного поля значение интеграла в левой части (22.2.49) не может меняться непрерывно. Это изменение может быть лишь кратно целым числам, поэтому данный интеграл может зависеть только от топологии калибровочного поля. Эту зависимость мы опишем в § 23.5.

§ 22.3. Прямое вычисление аномалий: общий случай

В § 22.2 мы видели, как можно использовать элегантный подход Фуджикавы для вычисления аномалий киральных симметрий в калибровочных теориях типа квантовой хромодинамики, в которых калибровочные взаимодействия некиральны и фермионное число сохраняется. Кроме того, данный метод можно использовать и для рассмотрения более общих задач, однако при этом он становится менее прямым [7]. В этом параграфе мы получим аномалию прямым вычислением, как это и было сделано изначально. В результате мы

расширим свое представление об аномалиях и заодно получим возможность рассмотреть их в общих теориях практически без усложнений.

Для того чтобы рассмотреть общий случай, объединим все левые фермионные поля (включая антифермионы, там где это различие существенно) в единственный столбец χ . Например, если ψ — столбец, содержащий все кварковые и лептонные (в противоположность антикварковым и антилептонным) поля, то

$$\chi \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi \\ \frac{1}{2} [\beta \mathcal{C} (1 - \gamma_5) \psi]^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi \\ \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \beta \mathcal{C} \psi^* \end{bmatrix}, \quad (22.3.1)$$

где $\mathcal{C}$ — матрица, определенная в § 5.4 соотношением

$$\mathcal{C} \gamma_\mu^T \mathcal{C}^{-1} = -\gamma_\mu.$$

При этом все компоненты χ будут принадлежать одному представлению группы Лоренца: $(1/2, 0)$. При инфинитезимальных калибровочных преобразованиях, сохраняющих фермионное число (например, число барионов или число барионов минус число лептонов):

$$\delta\psi = i\theta_\alpha \left[\frac{1}{2} (1 + \gamma_5) t_\alpha^L + \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) t_\alpha^R \right] \psi, \quad (22.3.2)$$

столбец подвергается преобразованию

$$\delta\chi = i\epsilon_\alpha T_\alpha \chi, \quad (22.3.3)$$

где

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} t_\alpha^L & 0 \\ 0 & -t_\alpha^{R*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_\alpha^L & 0 \\ 0 & -(t_\alpha^R)^T \end{bmatrix}. \quad (22.3.4)$$

Мы не станем ограничиваться теориями, в которых фермионное число сохраняется, поэтому T_α будет любым эрмитовым представлением калибровочной алгебры, не обязательно имеющим блочно-диагональный вид (22.3.4). Сейчас мы рассмотрим только безмассовые фермионы, а к эффекту, связанному с наличием у фермионов масс, вернемся несколько позднее.

Нас будет интересовать однопетлевая трехточечная функция

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \equiv \langle T \{ j_\alpha^\mu(x), j_\beta^\nu(y), j_\gamma^\rho(z) \} \rangle_{\text{ВЭК}}, \quad (22.3.5)$$

где j_α^μ — фермионный ток, вычисляемый через свободные поля:

$$j_\alpha^\mu = -i \bar{\chi} T_\alpha \gamma^\mu \chi. \quad (22.3.6)$$

Две фейнмановские диаграммы, изображенные на рис. 22.1, дают

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) = & -i \text{Tr}[S(x-y) T_\beta^\nu P_L S(y-z) T_\gamma^\rho P_L S(z-x) T_\alpha^\mu P_L] - \\ & - i \text{Tr}[S(x-z) T_\gamma^\rho P_L S(z-y) T_\beta^\nu P_L S(y-x) T_\alpha^\mu P_L], \end{aligned} \quad (22.3.7)$$

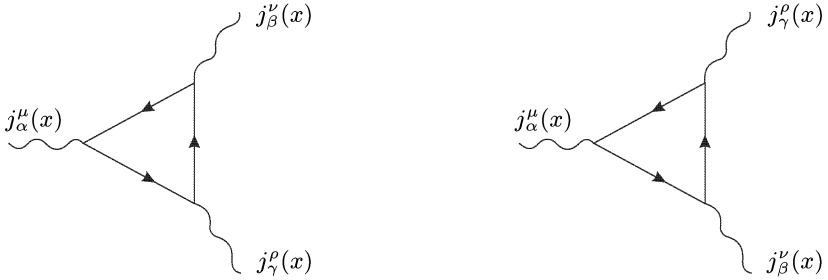


Рис. 22.1. Две треугольные диаграммы, описывающие аномалию в токе $j_\alpha^\mu(x)$. Прямые линии соответствуют фермионам; волнистые соответствуют воображаемым калибровочным полям, связанным с токами

где P_L — проекционный оператор на левые фермионные поля:

$$P_L = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right), \quad (22.3.8)$$

а $S(x)$ — пропагатор безмассового фермионного поля:

$$S(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \left(\frac{-i \not{p}}{p^2 - i\epsilon} \right) e^{ip \cdot x}. \quad (22.3.9)$$

(Дальнейшие комментарии по поводу использования фейнмановских правил можно найти в конце параграфа.) Собирая множители, приводим уравнение (22.3.7) к виду

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) = & \frac{i}{(2\pi)^{12}} \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{-i(k_1+k_2) \cdot x} e^{ik_1 \cdot y} e^{ik_2 \cdot z} \int d^4 p \times \\ & \times \left\{ \text{tr} \left[\frac{\not{p} - \not{k}_1 + \not{a}}{(p - k_1 + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{a}}{(p + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{k}_2 + \not{a}}{(p + k_2 + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \times \right. \\ & \quad \times \text{tr}[T_\beta T_\gamma T_\alpha] + \\ & + \text{tr} \left[\frac{\not{p} - \not{k}_2 + \not{b}}{(p - k_2 + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{b}}{(p + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{k}_1 + \not{b}}{(p + k_1 + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \times \\ & \quad \times \text{tr}[T_\gamma T_\beta T_\alpha] \Big\}, \quad (22.3.10) \end{aligned}$$

где “tr” в зависимости от аргумента обозначает след либо по дираковским, либо по групповым индексам. Мы ввели произвольные постоянные 4-векторы a^μ и b^μ , поскольку, хотя выражение (22.3.10) и сходится, а следовательно не зависит от значений импульсов внутренних линий, однако вычисление $\partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}$ включает в себя операции с расходящимися интегралами, которые все-таки зависят от этих значений. Мы увидим, что свобода выбора a^μ и b^μ отражает возможность безпрепятственного переноса аномалии под знаками указанных интегралов из одного тока в другой. Однако такая возможность не позволяет удалить аномалии полностью. Вычисляя дивергенцию

от (22.3.10) и используя тождество

$$k_1 + k_2 = (\not{p} + \not{k}_2 + \not{a}) - (\not{p} - \not{k}_1 + \not{a}) = (\not{p} + \not{k}_1 + \not{b}) - (\not{p} - \not{k}_2 + \not{b}),$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} e^{ik_1\cdot y} e^{ik_2\cdot z} \int d^4 p \times \\ &\times \left\{ \text{tr}[T_\beta T_\gamma T_\alpha] \text{tr} \left[\frac{\not{p} - \not{k}_1 + \not{a}}{(p - k_1 + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{a}}{(p + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] - \right. \\ &- \text{tr}[T_\beta T_\gamma T_\alpha] \text{tr} \left[\frac{\not{p} + \not{a}}{(p + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{k}_2 + \not{a}}{(p + k_2 + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] + \\ &+ \text{tr}[T_\gamma T_\beta T_\alpha] \text{tr} \left[\frac{\not{p} - \not{k}_2 + \not{b}}{(p - k_2 + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{b}}{(p + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] - \\ &\left. - \text{tr}[T_\gamma T_\beta T_\alpha] \text{tr} \left[\frac{\not{p} + \not{b}}{(p + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{k}_1 + \not{b}}{(p + k_1 + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \right\}. \quad (22.3.11) \end{aligned}$$

Теперь удобно разложить трехточечную функцию на слагаемые, симметричные и антисимметричные по групповым индексам, записав

$$\text{tr}[T_\beta T_\gamma T_\alpha] = D_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} i N C_{\alpha\beta\gamma}$$

и

$$\text{tr}[T_\gamma T_\beta T_\alpha] = D_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2} i N C_{\alpha\beta\gamma},$$

где $D_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью симметричная величина:

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \text{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\} T_\gamma], \quad (22.3.12)$$

а коэффициент перед структурной константой $C_{\alpha\beta\gamma}$ определяется соотношением

$$\text{tr}[T_\alpha T_\beta] = N \delta_{\alpha\beta}.$$

Антисимметричные по групповым индексам слагаемые в общем случае не равны нулю, однако они не представляют собой какого-либо нарушения симметрии. Так же как и при выводе в § 10.4 тождества Уорда, при формальном вычислении дивергенции матричного элемента (22.3.5) нам встречаются вклады от производных по времени тэта-функций, входящих в хронологические произведения, равные

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \right]_{\text{формально}} &= \\ &= -i C_{\alpha\beta\delta} \delta^4(x - y) \langle j_\delta^\nu(y) j_\gamma^\rho(z) \rangle_{\text{ВЭК}} - i C_{\alpha\gamma\delta} \delta^4(x - z) \langle j_\beta^\nu(y) j_\delta^\rho(z) \rangle_{\text{ВЭК}}. \end{aligned} \quad (22.3.13)$$

Нетрудно увидеть, что антисимметричные слагаемые из (22.3.11) в точности воспроизводят соотношение (22.3.13). Аномалия содержит

ся в симметричной части уравнения (22.3.11):

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \right]_{\text{аном}} &= \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} e^{ik_1\cdot y} e^{ik_2\cdot z} \times \\
 &\times \int d^4 p \left\{ \text{tr} \left[\frac{\not{p} - \not{k}_1 + \not{a}}{(p - k_1 + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{a}}{(p + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] - \right. \\
 &- \text{tr} \left[\frac{\not{p} + \not{a}}{(p + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{k}_2 + \not{a}}{(p + k_2 + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] + \\
 &+ \text{tr} \left[\frac{\not{p} - \not{k}_2 + \not{b}}{(p - k_2 + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{b}}{(p + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] - \\
 &\left. - \text{tr} \left[\frac{\not{p} + \not{b}}{(p + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{k}_1 + \not{b}}{(p + k_1 + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \right\}. \quad (22.3.14)
 \end{aligned}$$

Группируя вместе первый и четвертый, второй и третий следы, данное выражение можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \right]_{\text{аном}} &= \frac{1}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} e^{ik_1\cdot y} e^{ik_2\cdot z} \times \\
 &\times \left\{ \text{tr} \left[\gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] I_{\kappa\lambda}(a - b - k_1, b, b + k_1) + \right. \\
 &\left. + \text{tr} \left[\gamma^\kappa \gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\nu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] I_{\kappa\lambda}(b - a - k_2, a, a + k_2) \right\}, \quad (22.3.15)
 \end{aligned}$$

где

$$I_{\kappa,\lambda}(k, c, d) \equiv \int d^4 p [f_{\kappa\lambda}(p + k, c, d) - f_{\kappa\lambda}(p, c, d)], \quad (22.3.16)$$

$$f_{\kappa\lambda}(p, c, d) \equiv \frac{(p + c)_\kappa (p + d)_\lambda}{[(p + c)^2 - i\epsilon][(p + d)^2 - i\epsilon]}. \quad (22.3.17)$$

Чтобы вычислить эти интегралы, рассмотрим разложение функции $f_{\kappa\lambda}(p + k, c, d)$ по степеням k :

$$f_{\kappa\lambda}(p + k, c, d) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{\mu_1} \dots k^{\mu_n} \frac{\partial^n f_{\kappa\lambda}(p, c, d)}{\partial p^{\mu_1} \dots \partial p^{\mu_n}}.$$

В выражении (22.3.16) члены нулевого порядка $f_{\kappa\lambda}(p, c, d)$ взаимно уничтожаются. Все остальные слагаемые представляют собой интегралы от производных по p , и, следовательно, после виковского поворота могут быть записаны как интегралы по большой 3-сфере, скажем радиуса P . Тогда n -я производная от f даст поверхностный интеграл от функции, которая ведет себя как $P^{-2-(n-1)}$, в то время как поверхность 3-сферы радиуса P пропорциональна P^3 . Таким образом, единственными слагаемыми, дающими вклад при $P \rightarrow \infty$, являются

слагаемые с $n = 1$ и $n = 2$:

$$I_{\kappa\lambda}(k, c, d) = k^\mu \int d^4 p \frac{\partial f_{\kappa\lambda}(p, c, d)}{\partial p^\mu} + \frac{1}{2} k^\mu k^\nu \int d^4 p \frac{\partial^2 f_{\kappa\lambda}(p, c, d)}{\partial p^\mu \partial p^\nu}. \quad (22.3.18)$$

Прямое вычисление дает

$$I_{\kappa\lambda}(k, c, d) = \frac{1}{6} i\pi^2 [2k_\lambda c_\kappa + 2k_\kappa d_\lambda - k_\lambda d_\kappa - k_\kappa c_\lambda - \eta_{\kappa\lambda} k \cdot (k + c + d)]. \quad (22.3.19)$$

Теперь мы должны по отдельности рассмотреть слагаемые, стоящие в выражении (22.3.15) под знаками следов. Они возникают от 1 и γ_5 , которые входят в проекционную матрицу $1/2(1 + \gamma_5)$. Слагаемые, возникающие от 1, содержат след $\text{tr}[\gamma^k \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho]$, симметричный отдельно по k и λ , и по ν и ρ , поэтому соответствующие интегралы появляются в следующей комбинации

$$I_{\kappa\lambda}(a - b - k_1, b, b + k_1) + I_{\lambda\kappa}(a - b - k_1, b, b + k_1) + \\ + I_{\kappa\lambda}(b - a - k_2, a, a + k_2) + I_{\lambda\kappa}(b - a - k_2, a, a + k_2).$$

Используя соотношение (22.3.19), нетрудно заметить, что эта комбинация обращается в нуль тогда и только тогда, когда мы выберем произвольные постоянные векторы такими, чтобы

$$a = -b. \quad (22.3.20)$$

Более того, при таком выборе уничтожаются некиральные аномалии для всех трех токов, поскольку в дивергенции $(\partial/\partial y^\nu) \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ векторы a и b необходимо заменить на $a' = k_2 + a$ и $b' = -k_2 + b$, а в $(\partial/\partial z^\rho) \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ — на $a'' = k_1 + a$ и $b'' = -k_1 + b$. Поэтому равенство $a = -b$ приводит к равенствам $a' = -b'$ и $a'' = -b''$.

Осталось рассмотреть слагаемые под знаком следа, содержащие γ_5 . Они полностью антисимметричны:

$$\text{tr}[\gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma_5] = -4i\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}, \quad (22.3.21)$$

где $\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}$ — полностью антисимметричный тензор с $\epsilon^{0123} = 1$. Используя это соотношение в выражении (22.3.15) и учитывая, что $b = -a$, получаем

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \right]_{\text{аном}} = \frac{2}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \times \\ \times \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{-i(k_1 + k_2) \cdot x} e^{ik_1 \cdot y} e^{ik_2 \cdot z} \pi^2 \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} a_\kappa (k_1 + k_2)_\lambda. \quad (22.3.22)$$

Мы могли устранить аномалию (22.3.22) в токе $J_\alpha^\mu(x)$, выбрав $a \propto k_1 + k_2$. Хотя такой выбор и возможен, однако он не устраняет аномалию полностью; она появится в $(\partial/\partial y^\nu) \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ или в $(\partial/\partial z^\rho) \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$. Симметрия задачи указывает на то, что

в $(\partial/\partial y^\nu)\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ аномалия будет отсутствовать тогда и только тогда, когда $(k_2 + a) - (-k_2 + b) \propto k_1$, или, другими словами, когда $a + k_2 \propto k_1$. В $(\partial/\partial z^\rho)\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ аномалия будет отсутствовать только тогда, когда $(-k_1 + a) - (k_1 + b) \propto k_2$, или, иначе, $a - k_1 \propto k_2$. Можно выбрать вектор a^μ таким, чтобы он удовлетворял любому из этих двух условий, поэтому аномалию можно устранить любого из двух токов. Тем не менее очевидно, что для непараллельных k_1 и k_2 невозможно одновременно удовлетворить всем трем условиям: $a \propto k_1 + k_2$, $a + k_2 \propto k_1$ и $a - k_1 \propto k_2$. (К примеру, выполнение первых двух условий подразумевает, что $a = -k_1 - k_2$ в противоречии с третьим условием.) Следовательно, мы заключаем, что хотя и обладаем некоторой свободой решать, какой из токов содержит аномалию, *факт неравенства нулю $D_{\alpha\beta\gamma}$ определенно показывает, что по крайней мере в одном из токов $-J_\alpha^\mu(x)$, $J_\beta^\nu(y)$ или $J_\gamma^\rho(z)$ — аномалия присутствует.* Это один из главных результатов приведенных вычислений, и в следующем параграфе мы используем его как источник ограничений на состав полей материи в калибровочных теориях.

Мы видели, что вычисление аномалий зависит от выбора вектора смещения a^μ . К сожалению, никакого универсального выбора не существует, поэтому мы должны выбирать a^μ в соответствии с конкретными особенностями данной задачи.

Огромный интерес представляет класс задач, для которых ток $J_\alpha^\mu(x)$ соответствует глобальной симметрии, а токи $J_\beta^\nu(y)$ и $J_\gamma^\rho(z)$ — калибровочным симметриям, т. е. с ними связаны калибровочные поля. (Подобную задачу мы рассматривали в предыдущем параграфе.) В таких случаях мы *должны* выбирать a^μ так, чтобы аномалия содержалась исключительно в $J_\alpha^\mu(x)$, а не в $J_\beta^\nu(y)$ или в $J_\gamma^\rho(z)$. Как мы видели, это требование выполняется, если $a + k_2 \propto k_1$ и $a - k_1 \propto k_2$, что приводит к единственно возможному соотношению

$$a = k_1 - k_2. \quad (22.3.23)$$

Учитывая это соотношение, приводим аномалию (22.3.22) к виду

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \right]_{\text{аном}} &= \\ &= \frac{2}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{-i(k_1+k_2) \cdot x} e^{ik_1 \cdot y} e^{ik_2 \cdot z} 4\pi^2 \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} k_{1\kappa} k_{2\lambda} = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \frac{\partial \delta^4(y-x)}{\partial y^\kappa} \frac{\partial \delta^4(z-x)}{\partial z^\lambda}. \end{aligned} \quad (22.3.34)$$

Мы отмечали как-то, что подобный результат может возникнуть только в теориях, содержащих безмассовые частицы [7a]. В противном случае преобразование Фурье для $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ раскладывалось бы в степенной ряд вблизи нулевого импульса. Единственными слагае-

мыми в подобном разложении, которые могли бы привести к дивергенции тока вида (22.3.24), являются псевдотензоры первого порядка по импульсам:

$$[\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2)]_{\text{аном}} \equiv \int d^4y d^4z e^{-ik_1 \cdot y} e^{-ik_2 \cdot z} [\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(0, y, z)]_{\text{аном}} = \\ = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [A_{\alpha\beta\gamma} k_{1\sigma} + B_{\alpha\beta\gamma} k_{2\sigma}],$$

где $A_{\alpha\beta\gamma}$ и $B_{\alpha\beta\gamma}$ — константы. Согласно (22.3.24)

$$(k_1 + k_2)_\mu [\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2)]_{\text{аном}} = \frac{i}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} k_{1\kappa} k_{2\lambda},$$

поэтому

$$A_{\alpha\beta\gamma} - B_{\alpha\beta\gamma} = \frac{i}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma}.$$

Однако требование симметрии амплитуды по отношению к трем токам приводит к условиям

$$A_{\alpha\beta\gamma} k_{1\sigma} + B_{\alpha\beta\gamma} k_{2\sigma} = -A_{\alpha\gamma\beta} k_{2\sigma} - B_{\alpha\gamma\beta} k_{1\sigma} = \\ = -A_{\gamma\alpha\beta} (-k_{1\sigma} - k_{2\sigma}) - B_{\gamma\alpha\beta} k_{2\sigma}.$$

Приравнявая коэффициенты при $k_{1\sigma}$ и $k_{2\sigma}$, получаем

$$A_{\alpha\beta\gamma} = -B_{\alpha\gamma\beta} = A_{\gamma\alpha\beta}, \quad B_{\alpha\beta\gamma} = -A_{\alpha\gamma\beta} = A_{\gamma\alpha\beta} - B_{\gamma\alpha\beta}.$$

Вычитая одно уравнение из другого, имеем

$$A_{\alpha\beta\gamma} - B_{\alpha\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma\beta} - B_{\alpha\gamma\beta} = B_{\gamma\alpha\beta}.$$

Поскольку это выражение пропорционально $D_{\alpha\beta\gamma}$, оно должно быть полностью симметрично, поэтому $B_{\alpha\beta\gamma}$, а, следовательно, и $A_{\alpha\beta\gamma}$, полностью симметричны. Но тогда условие симметрии трехточечной функции приобретает вид $A = -B = B - A$, что выполняется, только если $A_{\alpha\beta\gamma} = B_{\alpha\beta\gamma} = 0$, в противоречии с (22.3.24). Аналогично можно показать невозможность устранения аномалии путем добавления во взаимодействие локального члена, вклад которого в дивергенцию тока J_α^μ сокращает правую часть соотношения (22.3.24).

Теперь вернемся к (22.3.24). Мы можем выразить полученный результат в терминах вакуумного среднего от тока J_α^μ в присутствии калибровочных полей, связанных с токами J_ν^β и J_γ^ρ . При наличии калибровочных полей, вклад в ток от треугольных диаграмм равен

$$\langle J_\alpha^\mu(x) \rangle_\Delta = -\frac{1}{2} \int d^4y d^4z \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) A_\nu^\beta A_\rho^\gamma(z). \quad (22.3.25)$$

Используя (22.3.24), получаем, что этот ток имеет аномальную дивергенцию

$$[\langle \partial_\mu J_\alpha^\mu(x) \rangle_\Delta]_{\text{аном}} = -\frac{1}{8\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \partial_\kappa A_\nu^\beta(x) \partial_\lambda A_\rho^\gamma(x). \quad (22.3.26)$$

На рис. 22.2 показаны дополнительные диаграммы, также изображающие аномалии. В соответствии с требованием калибровочной инвариантности эти диаграммы при сложении должны давать калибровочно-инвариантный результат

$$[\langle \partial_\mu J_\alpha^\mu(x) \rangle]_{\text{аном}} = -\frac{1}{32\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} F_{\kappa\nu}^\beta(x) F_{\lambda\rho}^\gamma(x). \quad (22.3.27)$$

В качестве проверки этого соотношения, рассмотрим теорию с сохраняющимся числом фермионов и генераторами T_α , имеющими вид (22.3.4). В этом случае константа $D_{\alpha\beta\gamma}$ аномалии (22.3.26) задается соотношением

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \text{tr}[\{t_\alpha^L, t_\beta^L\} t_\gamma^L] - \frac{1}{2} \text{tr}[\{t_\alpha^R, t_\beta^R\} t_\gamma^R]. \quad (22.3.28)$$

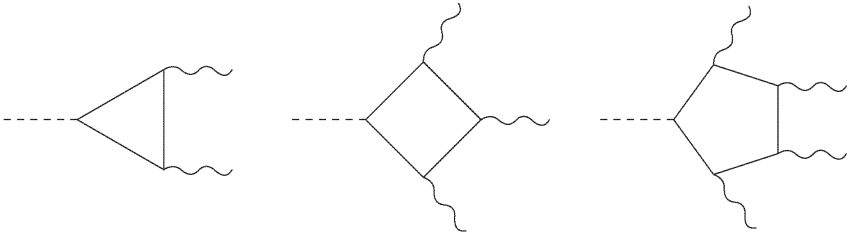


Рис. 22.2. Однопетлевые диаграммы для аномалий, которые возникают в токах, отмеченных пунктирной линией. Сплошные линии соответствуют фермионам; волнистые — калибровочным полям, с которыми фермионы взаимодействуют

В § 22.2 мы вычислили дивергенцию аксиально-векторного тока J_5^μ с $t^L = -t^R \equiv t$, возникающего благодаря взаимодействиям калибровочного поля с векторными токами J_β^ν и J_γ^ρ (в § 22.2 мы их называли J_α^ν и J_β^ρ), с $t_\beta^L = t_\beta^R \equiv t_\beta$ и $t_\gamma^L = t_\gamma^R \equiv t_\gamma$. Следовательно, в нашем случае $D_{\alpha\beta\gamma}$ заменяется на $\text{tr}[t, t_\beta t_\gamma] = \text{tr}[t_\beta, t_\gamma t]$, и соотношение (22.3.27) приобретает вид

$$[\langle \partial_\mu J_5^\mu(x) \rangle]_{\text{аном}} = -\frac{1}{32\pi^2} \text{tr}[\{t_\beta, t_\gamma\} t] \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} F_{\kappa\nu}^\beta(x) F_{\lambda\rho}^\gamma(x), \quad (22.3.29)$$

в согласии с (22.2.26).

Там, где никакие калибровочные поля не связаны с какими-либо из токов $J_\alpha^\mu(x)$, $J_\beta^\nu(x)$ или $J_\gamma^\rho(x)$, выбор вектора смещения a^μ является вопросом соглашения. Пусть некоторые, но не все, токи связаны со спонтанно нарушенными симметриями. Тогда мы сохраняем ненарушенные симметрии явно, если выбираем a^μ таким, чтобы в токах, соответствующих этим симметриям, не было аномалий. (Это обстоятельство сыграет большую роль в § 22.7.) Например, в квантовой хромодинамике и аналогичных теориях, в которых генераторы глобальной симметрии T_α , подобно киральным генераторам $SU(3) \times SU(3)$,

имеют вид (22.3.24), все токи являются либо векторами с $t_\alpha^R = t_\alpha^L$, соответствующими ненарушенной симметрии, либо аксиальными векторами с $t_\alpha^R = -t_\alpha^L$, соответствующими нарушенной симметрии. Из соотношения (22.3.28) мы видим, что в этом случае единственными треугольными диаграммами, содержащими аномалии, являются диаграммы с одним аксиально-векторным и двумя векторными токами или с тремя аксиально-векторными токами. В первом случае мы выбираем a^μ так, чтобы не было аномалий, препятствующих сохранению векторного тока. Таким образом, если $J_\alpha^\mu(x)$ — аксиально-векторный ток, а $J_\beta^\nu(y)$ и $J_\gamma^\rho(z)$ — векторные токи, то для того чтобы аномалия задавалась соотношением (22.3.24), мы должны положить, как в (22.3.23), $a^\mu = k_1^\mu - k_2^\mu$. С другой стороны, в случае трех аксиально-векторных токов нет оснований требовать, чтобы какой-либо один из них не содержал аномалий. Вместо этого более естественно придать a^μ значение, не нарушающее симметрию по всем трем токам. Допустим, руководствуясь лоренцевой инвариантностью, мы попробуем взять $a = \alpha k_1 + \beta k_2$, где α и β — постоянные. Тогда для соблюдения симметрии необходимо, чтобы импульс *каждой* внутренней линии равнялся p плюс α , помноженная на импульс, идущий из конца линии, плюс β на импульс, выходящий из начала линии. То есть, если мы потребуем, чтобы $a = \alpha k_1 + \beta k_2$, то симметрия потребует, чтобы, кроме того, выполнялось $a - k_1 = -\alpha(k_1 + k_2)$ и $a + k_2 = \alpha k_2 - \beta(k_1 + k_2)$. Для непараллельных k_1 и k_2 эти соотношения удовлетворяются тогда и только тогда, когда $\alpha = -\beta = 1/3$ и

$$a = \frac{1}{3} (k_1 - k_2). \quad (22.3.30)$$

Используя это соотношение в (22.3.22) и сравнивая его с (22.3.23), мы видим, что аномалия аксиально-векторного тока в феймановской амплитуде для трех аксиально-векторных токов составляет одну треть от того значения, которое было бы в случае одного аксиально-векторного и двух векторных токов.

Токовая дивергенция содержит дополнительные аномалии за счет диаграмм, изображенных на рис. 22.2. Руководствоваться калибровочной инвариантностью в данном случае нельзя, поскольку даже треугольные диаграммы не дают сохраняющихся токов. Полную аномалию вычислил Бардин [8] для киральной $SU(3) \times SU(3)$ симметрии сильных взаимодействий. Векторы сдвига импульсов выбирались так, чтобы векторные токи сохранялись, а диаграммы со всеми аксиальными токами были по этим токам симметричны. Хотя в квантовой хромодинамике эта симметрия (действующая на ароматы кварков, а не на их цвета) и не является калибровочной, удобно выразить аномалию как нарушение калибровочной инвариантности в функционале $\Gamma[V, A]$ от воображаемых слабосвязанных калибровочных полей: октета векторных полей $V_a^\mu(x)$ и октета аксиально-векторных полей $A_a^\mu(x)$. Кро-

ме того, мы введем операторы инфинитезимальных калибровочных преобразований¹⁾

$$i\mathcal{Y}_a(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\delta V_{a\mu}(x)} - f_{abc} V_{b\mu}(x) \frac{\delta}{\delta V_{c\mu}(x)} - f_{abc} A_{b\mu}(x) \frac{\delta}{\delta A_{c\mu}(x)} \quad (22.3.31)$$

и

$$i\mathcal{X}_a(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\delta A_{a\mu}(x)} - f_{abc} V_{b\mu}(x) \frac{\delta}{\delta A_{c\mu}(x)} - f_{abc} A_{b\mu}(x) \frac{\delta}{\delta V_{c\mu}(x)}, \quad (22.3.32)$$

где f_{abc} — структурные константы группы $SU(3)$. Как упоминалось выше, значения импульсов внутренних линий выбираются так, чтобы векторный ток не был аномальным:

$$\mathcal{Y}_a \Gamma[V, A] = 0, \quad (22.3.33)$$

однако тогда аномалия появится в аксиально-векторных токах:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_a \Gamma[V, A] = & \frac{i}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left\{ \lambda_a \left[V_{\mu\nu} V_{\rho\sigma} + \frac{1}{3} A_{\mu\nu} A_{\rho\sigma} - \frac{32}{3} A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{8}{3} i(A_\mu A_\nu V_{\rho\sigma} + A_\mu V_{\rho\sigma} A_\nu + V_{\rho\sigma} A_\mu A_\nu) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (22.3.34)$$

где λ_a — $SU(3)$ матрицы, задаваемые соотношением (19.7.2), а

$$V_\mu \equiv \frac{1}{2} \lambda_a V_{\mu a}, \quad A_\mu \equiv \frac{1}{2} \lambda_a A_{\mu a}, \quad (22.3.35)$$

$$V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - i[V_\mu, V_\nu] - i[A_\mu, A_\nu], \quad (22.3.36)$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[V_\mu, A_\nu] - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (22.3.37)$$

Мы уже объясняли, что наличие множителя $1/3$ перед вторым слагаемым в правой части (22.3.34) является следствием различного выбора a^μ в AVV и AAA диаграммах. В § 22.6 мы опишем условия непротиворечивости, которые позволят вычислить члены третьего и четвертого порядков в (22.3.34) из квадратичных членов.

Для аномалий, включающих *только* спонтанно нарушенные симметрии, нет причин выбирать a^μ так, чтобы можно было выделить разные токи. Вместо этого удобно определить внутренние фермионные линии симметрично по присоединенным калибровочным бозонным линиям. Как мы видели, это означает, что треугольную диаграмму нужно вычислять, полагая $a^\mu = 1/3(k_1 - k_2)$. Учитывая это, получаем, что треугольная аномалия равна одной третьей от выражения (22.3.26). После учета квадратичных и пятиугольных диаграмм

¹⁾ Операторы $\mathcal{Y}_a$ и $\mathcal{X}_a$ соответствуют операторам X_a и Y_a статьи [8]. Такое переобозначение сделано, чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями гл. 19, в которой генераторы нарушенной симметрии обозначены как X_a .

этот результат приобретает вид [8a]

$$[D_\mu J_\alpha^\mu]_{\text{аном}} = -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ T_\alpha \left[\partial_\kappa A_\nu \partial_\lambda A_\rho - \frac{1}{2} i \partial_\kappa A_\nu A_\lambda A_\rho + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} i A_\kappa \partial_\nu A_\lambda A_\rho - \frac{1}{2} i A_\kappa A_\nu \partial_\lambda A_\rho \right] \right\}, \quad (22.3.38)$$

где $A^\mu \equiv A_\alpha^\mu T_\alpha$. Сейчас мы не будем его выводить, поскольку уже видели, что в подобных случаях квадратичные по A_μ слагаемые равны одной третьей от соответствующих слагаемых в (22.3.26). Кроме того, в § 22.6 для вычисления оставшихся в (22.3.28) членов, исходя из квадратичных членов, мы сможем воспользоваться условиями совместности.

Теперь мы должны рассмотреть поправки к полученным результатам. Тщательное вычисление аномалии во всех порядках теории возмущений было проведено Адлером и Бардиным [9]; ниже приведена только суть их анализа.

Соображения, которые привели нас к (22.3.22), можно повторить в любом порядке теории возмущений и показать, что аномалии появляются только из тех интегралов в импульсном пространстве, которые можно переписать в виде поверхностных членов. В результате, как мы видели в формуле (22.3.18), единственными диаграммами для токовой дивергенции, дающими вклад в аномалию, являются диаграммы, для которых интеграл по импульсу фермионной петли имеет размерность (по степеням импульса) нуль либо выше. Взаимодействие фермионов петли с виртуальными калибровочными бозонами приводит к тому, что размерность интеграла по импульсу фермионной петли становится достаточной для устранения аномалии, поэтому данные радиационные поправки вклада в аномалию не дают. (Хотя и справедливо утверждение, что интеграл по импульсам виртуальных калибровочных бозонов, а также по фермионной петле, имеет неотрицательную размерность, однако пропагатор калибровочного бозона, в отличие от фермионного пропагатора, можно регуляризовать не препятствуя выполнению данной киральной симметрии.) Взаимодействия калибровочных бозонов, присоединенных к фермионной петле, с другими калибровочными бозонами и фермионными петлями влияет на аномалию. Однако это действие выражается только в перенормировке операторов типа $\epsilon^{k\nu\lambda\rho} F_{k\nu}^\beta(x) F_{\lambda\rho}^\gamma(x)$. Аналогично можно показать, что любая фермионная масса, которая не нарушает данные симметрии (если это возможно), не меняет аномалию. Это связано с тем, что полученные от этой массы множители понижают размерность интеграла в импульсном пространстве.

В связи с последним замечанием предыдущего абзаца возникает вопрос: можем ли мы вычислить аномалию, не зная всех фермионов теории: тяжелых, легких или безмассовых? Да, можем; сейчас мы покажем, что *никакой фермион, масса которого допускается данной*

симметрией, не может давать вклад в аномалию этой симметрии. Для общего класса рассматриваемых нами теорий массовый член в лагранжевой плотности имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{масс}} = - \sum_{nn'\sigma\sigma'} \chi_{\sigma n} \epsilon_{\sigma\sigma'} M_{nn'} \chi_{\sigma' n'} + \text{эрмит. сопр.}, \quad (22.3.39)$$

где σ — спиновый индекс двухкомпонентных спиноров для $(1/2, 0)$ -представления группы Лоренца, $\epsilon_{\sigma\sigma'}$ — антисимметричная матрица с $\epsilon_{1/2, -1/2} = +1$, необходимая для соблюдения лоренцовой инвариантности, а M — симметричная массовая матрица²). Для того чтобы $\mathcal{L}_{\text{масс}}$ был калибровочно-инвариантен, массовая матрица должна удовлетворять условию

$$-T_{\alpha}^{\text{T}} M = M T_{\alpha}. \quad (22.3.40)$$

Индекс n можно заменить на индексы r и s , где r соответствует различным неприводимым представлениям калибровочной группы, а s — компонентам внутри каждого такого представления, таким образом, чтобы

$$(T_{\alpha})_{rs, r's'} = \delta_{rr'} (T_{\alpha}^{(r)})_{s, s'}. \quad (22.3.41)$$

Кроме того, запишем

$$M_{rs, r's'} = (M^{(rr')})_{ss'}. \quad (22.3.42)$$

В результате уравнение (22.3.40) примет вид

$$-T_{\alpha}^{(r)\text{T}} M^{(r, r')} = M^{(r, r')} T_{\alpha}^{(r')}. \quad (22.3.43)$$

(По r и r' суммирования нет.) Лемма Шура [10] утверждает что всегда, когда матрицы из двух неприводимых представлений связаны таким соотношением, матрица, связывающая их, либо равна нулю, либо не сингулярна. (См. § 5.5.) Поэтому имеются два варианта: либо (i) $M^{(r, r')} = 0$, либо (ii) $-T_{\alpha}^{(r)\text{T}}$ и $T_{\alpha}^{(r')}$, и, аналогично, T_{β} и T_{γ} , связаны преобразованием подобия. В последнем случае, вклады в константу аномалии (22.3.12) от фермионов, принадлежащих отдельным неприводимым представлениям, соотносятся как

$$D_{\alpha\beta\gamma}^{(r)} = -D_{\alpha\beta\gamma}^{(r')}, \quad (22.3.44)$$

²) В теориях с сохраняющимся фермионным числом, в которых χ имеет вид (22.3.1), M связана с обычной массовой матрицей m соотношением

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & m \\ m^{\text{T}} & 0 \end{pmatrix}.$$

При всех фазах инверсий, равных единице, инвариантность по отношению к преобразованию четности, зарядовому сопряжению и обращению времени имеет своими следствиями соответственно: эрмитовость, симметричность или действительность m .

поэтому аномалия либо равна нулю (для $r = r'$), либо взаимно уничтожается между двумя представлениями (для $r \neq r'$). Следовательно, присутствие фермионов с массами, которые допускаются данным набором симметрий, не влияет на аномалии этих симметрий.

* * *

При использовании феймановских правил для вычисления трехточечной функции (22.3.7) возникает один интересный вопрос, который мы теперь рассмотрим. В действительности при использовании обычного фермионного пропагатора мы имели удвоенное число фермионных полей; в дополнение к чисто левым полям $\chi(x)$, задаваемым формулой (22.3.1), пропагатор (22.3.9) содержит правые моды (несвязанные с полями $(1 - \gamma_5)\psi$ теорий с сохраняющимся фермионным числом), которые все же не взаимодействуют с калибровочными полями. Объединяя эти не взаимодействующие правые поля с взаимодействующими левыми в единственный спинор Ψ , получаем фермионную лагранжеву плотность в виде $-\bar{\Psi}\not{D}\Psi$, где теперь $\not{D}$ имеет вид

$$\not{D} = \not{\partial} - iA_\alpha T_\alpha \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right). \quad (22.3.45)$$

Однопетлевой вакуумный функционал для полей спина $1/2$, взаимодействующих с настоящими или фиктивными калибровочными полями, в точности равен $\text{Det } \not{D}$. Нарушение калибровочной инвариантности в этом определителе можно связать с тем, что оператор (22.3.45) представляет собой сумму двух слагаемых:

$$\not{D} = \not{\partial} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) + \not{D} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right), \quad (22.3.46)$$

из которых только второе калибровочно-инвариантно.

Существует другой подход к изучению аномалий [10a], придерживаясь которого мы получим способ вычисления большого класса аномалий как координатных, так и калибровочных симметрий в пространствах любой размерности. Вместо того чтобы работать с оператором (22.3.45), который имеет хорошо определенный детерминант, мы можем пользоваться только вторым слагаемым из (22.3.46):

$$\not{D}_L \equiv \not{D} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right). \quad (22.3.47)$$

Оно полностью калибровочно-инвариантно, но не имеет хорошо определенного детерминанта, поскольку этот оператор отображает пространство фермионных полей одной киральности не в себя, а в пространство фермионных полей другой киральности. Можно попробовать определить калибровочно-инвариантный вакуумный функционал $\text{Det } \not{D}_L$, записывая дифференциальные уравнения для $\text{Det } \not{D}_L$ в пространстве калибровочных полей, взятых по модулю калибровочных преобразований, однако тогда мы можем натолкнуться

на определенные трудности. Из-за нарушения необходимых условий интегрируемости возникают локальные затруднения, соответствующие обсуждавшимся аномалиям. Но даже если такие затруднения и отсутствуют, но бесконечномерное пространство калибровочно-левых конфигураций, взятых по модулю калибровочных преобразований — неоднозначно, то определению однозначных функционалов на этом пространстве могут помешать топологические затруднения. Виттен [10b] нашел такую глобальную аномалию для калибровочной группы $SU(2)$ (не содержащей локальных аномалий) с нечетным числом безмассовых левых фермионов в $SU(2)$ дублетах.

§ 22.4. Калибровочные теории, не содержащие аномалий

Мы вычислили влияние аномалий на сохранение произвольного тока J_α^μ . В случае, когда сам этот ток связан с калибровочным полем, требование калибровочной инвариантности приводит к отсутствию аномалии. В предыдущем параграфе мы видели, что аномалия пропорциональна полностью симметричному постоянному множителю $D_{\alpha\beta\gamma}$, определенному соотношением (22.3.12), поэтому для калибровочных токов мы должны иметь [11]

$$D_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma] = 0, \quad (22.4.1)$$

где T_α — представление калибровочной алгебры в наборе всех левых фермионных и антифермионных полей, а “tr”, как и прежде, обозначает суммирование по видам таких полей. Этому условию можно удовлетворить для любой калибровочной группы, если фермионные поля реализуют подходящее приводимое или неприводимое представление этой группы. Кроме того, существует несколько калибровочных групп, для которых это условие удовлетворяется в *любом* представлении [12]. (В § 22.6 с помощью формализма Баталина–Вильковыского чисто алгебраически доказывается, что аномалии для таких калибровочных групп отсутствуют во все порядках теории возмущений.)

Очевидно, что условие (22.4.1) выполняется, если левые фермионные (или антифермионные) поля реализуют представление калибровочной алгебры, эквивалентное сопряженному представлению, в том смысле, что

$$(iT_\alpha)^* = S(iT_\alpha)S^{-1},$$

или в другой записи (поскольку мы всегда берем T_α эрмитовым)

$$T_\alpha^T = -ST_\alpha S^{-1}. \quad (22.4.2)$$

(Используя условие (22.4.2) в соотношении (22.3.12), получим $D_{\alpha\beta\gamma} = -D_{\alpha\beta\gamma}$.) Такое представление может быть либо *действительным*,

когда преобразованием подобия $T'_\alpha = RT_\alpha R^{-1}$ его можно привести к виду, при котором T'_α — комплексно и антисимметрично, либо *псевдодействительным*, когда этого сделать нельзя. (Например, трехмерное неприводимое представление группы $SU(2)$ действительно, а двумерное — псевдодействительно.) Для калибровочных алгебр, имеющих только действительные или псевдодействительные представления, аномалий не существует. Перечислим эти алгебры [13]: $SO(2n+1)$ (включая $SU(2) \equiv SO(3)$), $SO(4n)$ для $n \geq 2$, $USp(2n)$ для $n \geq 3$, G_2 , F_4 , E_7 и E_8 и все их прямые суммы. Наряду с перечисленными, существует несколько других алгебр, которые имеют представления только с $D_{\alpha\beta\gamma} = 0$, несмотря на то что некоторые их представления не являются ни действительными, ни псевдодействительными [12]. Это $SO(4n+1)$ (кроме $SO(2) \equiv U(1)$ и $SO(6) \equiv SU(4)$) и E_6 , а также их прямые суммы друг с другом и с вышеперечисленными алгебрами. Следовательно наличие аномалий возможно только для таких калибровочных алгебр, которые включают $SU(n)$ (для $n \geq 3$) или $U(1)$ в качестве множителей. Как это обычно и бывает, такие алгебры — одни из важнейших в современной физике. В основе стандартной модели лежит калибровочная группа $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, таким образом мы должны надеяться на сокращения внутри кварков и лептонов, в результате которых аномалии исчезнут из теории.

В табл. 22.1 приведена классификация левых спинорных полей первого поколения стандартной модели в соответствии с тем, какие представления групп (цветной $SU(3)$ и электрослабой $SU(2)$) они реализуют и каким значением квантового числа $y/g' = t_3/g - q/e$ группы $U(1)$ они обладают.

Таблица 22.1

Первое поколение левых фермионных и антифермионных полей стандартной модели

Фермионы	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1) [y/g']$
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	3	2	-1/6
u_R^*	$\bar{3}$	1	+2/3
d_R^*	$\bar{3}$	1	-1/3
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	1	2	1/2
e_R^*	1	1	-1

Теперь мы можем проверить, равна ли нулю $D_{\alpha\beta\gamma}$, когда T_α , T_β и T_γ приравняются всем генераторам $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Нам необходимо рассмотреть только такие комбинации генераторов, для которых произведение T_α , T_β и T_γ нейтрально по отношению к $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, поскольку для всех остальных комбина-

ций $D_{\alpha\beta\gamma}$ зануляется очевидным образом. Мы можем построить инварианты из $SU(3)$ -генераторов, число которых равно нулю, двум или трем (поскольку оба $—$ и 8×8 и $8 \times 8 \times 8$ — содержат синглеты), и из генераторов $SU(2)$, число которых равно нулю, двум или трем и любого числа $U(1)$ -генераторов, поэтому нам нужно проверить только следующие случаи:

SU(3)–SU(3)–SU(3). Здесь $D_{\alpha\beta\gamma}$ равна нулю, поскольку левые фермионы реализуют $3 + 3 + \bar{3} + \bar{3} + 1 + 1 + 1$ представление группы $SU(3)$, которое действительно.

SU(3)–SU(3)–U(1). В данном случае аномалия пропорциональна:

$$\sum_{3, \bar{3}} y/g' = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

SU(2)–SU(2)–SU(2). Здесь нет аномалии, поскольку $SU(2)$ имеет только действительные или псевдодействительные представления.

SU(2)–SU(2)–U(1). Здесь аномалия пропорциональна:

$$\sum_{\text{дублеты}} y/g' = 3\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} = 0.$$

U(1)–U(1)–U(1). Здесь аномалия пропорциональна:

$$\sum (y/g')^3 = 6\left(-\frac{1}{6}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^3 = 0.$$

Мы видим, что для калибровочных симметрий стандартной модели [13a] все аномалии исчезают. Этот результат значительно проще понять, если заметить, что группу $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ можно вложить в $SO(10)$ [14]. Представления $SO(10)$ не содержат аномалий. Это свойство наследуется любым приводимым представлением группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, являющимся полным для $SO(10)$. Как это и бывает, левые поля первого поколения кварков, лептонов, антикварков и антилептонов вкупе с дополнительным $(SU(3) \times SU(2) \times U(1))$ -синглетом образуют полное 16-мерное представление группы $SO(10)$ (фундаментальное спинорное представление), поэтому для этого набора левых фермионов $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ аномалий не существует. Синглет в любом случае не вносит вклада в такие аномалии, поэтому в калибровочных симметриях стандартной модели аномалии также отсутствуют.

Существует еще одна аномалия, которую необходимо вычислить. Все виды фермионов одинаково взаимодействуют с гравитонами. Вычисление диаграммы для фермионной петли, возникающей в среднем значении тока $\bar{\chi} T \gamma^\mu \chi$ (где χ — столбец левых фермионных и антифермионных полей), при наличии внешнего гравитационного поля дает аномалию [15] $\partial_\mu (\bar{\chi} T \gamma^\mu \chi)$, которая пропорциональна

$$\text{tr}\{T\} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\kappa\lambda} R_{\rho\sigma}^{\kappa\lambda}.$$

В частности, чтобы избежать гравитационного нарушения калибровочной симметрии, подобной (22.3.3), генераторы должны удовлетворять условию

$$\text{tr}\{T_\alpha\} = 0. \quad (22.4.3)$$

Подобно чисто калибровочной аномалии данное равенство выполняется, если калибровочные генераторы удовлетворяют условию (22.4.2), поэтому эта аномалия не получает вклад от фермионов, которые образуют действительное или псевдодействительное представление калибровочной группы. Следовательно, ее можно вычислить, учитывая только те фермионы, массы которых возникают за счет нарушения калибровочной симметрии. Кроме того, условию (2.4.3) автоматически удовлетворяют генераторы любых *простых* подалгебр (типа $SU(2)$ или $SU(3)$) калибровочной алгебры (величина $\text{tr}\{T_\alpha\}$ представляет собой просто число, коммутирующее со всеми T_β , поэтому если это число не равно нулю, тогда алгебра непростая). Значит, нам нужно проверить только то, что $U(1)$ -генераторы калибровочной алгебры удовлетворяют соотношению (22.4.3). В стандартной модели сумма значений слабого гиперзаряда y для всех левых фермионов равна

$$\sum \frac{y}{g'} = 6\left(-\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + (-1) = 0,$$

следовательно в токах стандартной модели не содержится гравитационных аномалий.

Требованием равенства нулю аномалий можно руководствоваться при формулировании реалистических теорий. Например, значения слабых гиперзарядов y для различных $SU(3) \times SU(2)$ -мультиплетов изначально брали из эксперимента. Однако может вызвать удивление тот факт, что они (и соответствующие средние значения электрического заряда в каждом мультиплете) принимают наблюдаемые значения. Чтобы ответить на вопрос, почему это так, предположим, что мы присвоили мультиплетам (u_L, d_R) , u_R^* , d_R^* , (ν_L, e_L) и e_R^* слабые гиперзаряды a , b , c , d и e соответственно. Условие отсутствия аномалии говорит нам, что:

SU(3)–SU(3)–U(1):

$$\sum_{3, \bar{3}} y = 2a + b + c = 0;$$

SU(2)–SU(2)–U(1):

$$\sum_{\text{дублеты}} y = 3a + d = 0;$$

U(1)–U(1)–U(1):

$$\sum y^3 = 6a^3 + 3b^3 + 3c^3 + 2d^3 + e^3 = 0;$$

гравитон–гравитон–U(1):

$$\sum y = 6a + 3b + 3c + 2d + e = 0.$$

Помимо возможной перестановки u_R и d_R , эти уравнения имеют только два решения, которые мы можем назвать $U(1)$ и $U(1)'$:

$$\begin{aligned} U(1) : \quad & b/a = -4, \quad c/a = 2, \quad d/a = -3, \quad e/a = 6, \\ U(1)' : \quad & b = -c, \quad a = c = d = e = 0. \end{aligned}$$

Более того, эти решения взаимоисключают друг друга; мы не можем предположить что и $U(1)$ и $U(1)'$ являются локальными симметриями, поскольку в этом случае мы столкнулись бы с аномалиями $U(1)'-U(1)'-U(1)$, пропорциональной $(-4) + (+2) \neq 0$, и $U(1)'-U(1)-U(1)$, пропорциональной $(-4)^2 - (+2)^2 \neq 0$. $U(1)$ -генератор в точности является слабым гиперзарядом стандартной электрослабой теории (если полный постоянный множитель a включить в определение g'), в то время как симметрия $U(1)'$ не наблюдается в природе. Приведенное вычисление вполне рационально объясняет, почему в стандартной модели величины y , или, что тоже самое, электрические заряды, имеют именно такие значения. Кроме того, оно показывает, что если в пределах единственного поколения кварков и лептонов все калибровочные аномалии должны исчезнуть, то калибровочные бозоны слабого гиперзаряда не могут обладать каким-либо другим квантовым числом $U(1)$.

С другой стороны, хотя и разумно предположить, что $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -калибровочные бозоны стандартной модели могут быть связаны только с известными кварками и лептонами (поскольку, с одной стороны, это позволяет объяснить, почему не открыли других фермионов, и, с другой стороны, дает возможность сохранить столь красивое сокращение аномалий в стандартной модели), тем не менее могут существовать еще и другие $U(1)'$ -калибровочные бозоны, которые связаны как с незарегистрированными $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -нейтральными фермионами, так и с известными кварками и лептонами. Допустим, квантовые числа y' группы $U(1)$ мультиплетов (u_L, d_L) , u_R^* , d_R^* , (ν_L, e_L) и e_R^* мы обозначим a' , b' , c' , d' и e' соответственно. Поскольку мы ничего не знаем о возможных $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -нейтральных фермионах, требование отсутствия $U(1)'-U(1)'-U(1)'$ и гравитон-гравитон- $U(1)$ аномалий не поможет нам наложить каких-либо ограничений на a' , b' , c' , d' или e' . Оставшиеся условия отсутствия аномалий говорят о том, что:

$$SU(3)-SU(3)-U(1)':$$

$$\sum_{3,3} y' = 2a' + b' + c' = 0;$$

$$SU(2)-SU(2)-U(1)':$$

$$\sum_{\text{дублеты}} y' = 3a' + d' = 0;$$

$$U(1)-U(1)-U(1)':$$

$$\sum y^2 y' = 6a' + 3(-4)^2 b' + 3(2)^2 c' + 2(-3)^2 d' + (6)^2 e' = 0;$$

$$U(1)-U(1)'-U(1)':$$

$$\sum y y'^2 = 6a'^2 + 3(-4)b'^2 + 3(2)c'^2 + 2(-3)d'^2 + (6)e'^2 = 0.$$

Общее решение для y' представляет собой линейную комбинацию y и квантового числа $B - L$ (где B и L — обычные барионные и лептонные числа), которая для мультиплетов (u_L, d_L) , u_R^* , d_R^* , (ν_L, e_L) и e_R^* принимает значения $1/3$, $-1/3$, $-1/3$, -1 и $+1$ соответственно. Если $B - L$ — локальная симметрия с константой связи, не намного порядков меньшей e , то она должна быть спонтанно нарушенной, поскольку обычные тела имеют макроскопические значения $B - L$. Чтобы избежать противоречия с наблюдениями нейтральных токов, характерный масштаб F нарушения симметрии должен превышать (не обязательно на много порядков) масштаб электрослабых взаимодействий. Таким образом, некий нейтральный векторный бозон несколько тяжелее Z^0 и, связанный с $B - L$ симметрией, кажется наиболее вероятным дополнением к стандартной модели.

Все сказанное относится к случаю, когда стандартная модель содержит только одно поколение. Для трех поколений существует большее количество симметрий, не содержащих аномалий. Отметим среди них один класс, который состоит из симметрий, не нарушаемых ни аномалиями, ни (насколько мы знаем) чем-либо еще. Он состоит из разностей чисел лептонов разных ароматов. Указанные симметрии вместе с $B - L$ симметрией сыграют большую роль при проведении в § 23.5 классификации порождаемых аномалиями процессов с несохранением числа барионов и лептонов.

§ 22.5. Связанные состояния с нулевой массой¹⁾

Некоторое время в физике элементарных частиц всерьез рассматривалось предположение, согласно которому кварки и лептоны могут представлять собой связанные состояния более фундаментальных частиц. Если бы по аналогии с квантовой хромодинамикой отвечающие этим частицам гипотетические калибровочные взаимодействия удовлетворяли условию асимптотической свободы, в силу конфайнмента эти частицы не могли бы наблюдаться в экспериментах. Существует тем не менее одна трудность. Поскольку внутренняя структура кварков и лептонов в экспериментах не обнаруживается, характерный масштаб энергии Λ' (аналог величины $\Lambda \approx 200$ МэВ

¹⁾ Материал этого параграфа выходит за рамки основного содержания книги и может быть опущен при первом чтении.

в квантовой хромодинамике) этих взаимодействий должен быть очень большим. Например, как отмечалось в § 12.3, хорошее согласие между теоретическим предсказанием и экспериментальным значением магнитного момента мюона указывает на то, что $\Lambda' > 3$ ТэВ. Однако совершенно естественно ожидать, что массы связанных состояний (за исключением голдстоуновских бозонов) в такой теории будут иметь порядок Λ' или $2\pi\Lambda'$. Так, в квантовой хромодинамике масса протона имеет порядок $2\pi\Lambda_{QCD}$. Это находится в резком противоречии с тем фактом, что массы кварков и лептонов значительно меньше Λ' . Сформулируем вопрос иначе: если лептоны и кварки представляют собой связанные состояния, тогда почему их размер (найденный посредством измерения аномального магнитного момента и т. д.) значительно меньше их комптоновской длины волны?

Один из способов ответа на этот вопрос состоит в том, чтобы предположить, что данная теория, в отличие от квантовой хромодинамики, обладает ненарушенной киральной симметрией. Эта симметрия приводит к тому, что массы кварков и лептонов равны нулю, если не учитывать малые поправки за счет других взаимодействий. В общем случае киральной является любая симметрия, для которой элементарные безмассовые поля с некоторой заданной спиральностью (включая поля, комплексно сопряженные полям противоположной спиральности) реализуют комплексное представление. Действуя на вакуум произведениями элементарных полей, можно получать другие состояния с определенной спиральностью, которые также реализуют комплексные представления этой симметрии. Если какие-либо из них описывают частицы, обладающие внутренней структурой, их масса должна быть равна нулю. Чтобы убедиться в этом, заметим, что все состояния спиральности массивной частицы реализуют одно и то же представление некоторой симметрии, коммутирующей с вращениями. Поэтому заданная компонента спиральности частицы и компонента противоположной спиральности античастицы должны совместно реализовать действительное представление. Конечно, трудно ответить на вопрос, какие из построенных таким способом состояний соответствуют безмассовым частицам, обладающим внутренней структурой. Но если такие состояния в спектре теории существуют, равенство нулю их массы представляется естественным: для того чтобы безмассовые частицы с заданной спиральностью, принадлежащие комплексному представлению группы симметрии, при изменении некоторого параметра теории приобрели массу, должен иметь место скачкообразный переход от комплексного представления к действительному.

Хотя приведенное рассуждение и показывает, что существуют теории с безмассовыми или очень легкими составными частицами, остается неясным, когда это реализуется фактически. Поставленный вопрос интересен даже вне его связи с задачей описания кварков и лептонов как частиц, обладающих внутренней структурой. Для

ответа на него 'т Хофт [16] предложил довольно мощный метод, основанный на рассмотрении аномалий. Суть его состоит в следующем: пусть фундаментальная теория обладает глобальными киральными симметриями (не нарушенными ни калибровочными аномалиями, ни спонтанно), которые состоят из преобразований элементарных левых фермионов (и антифермионов) χ спина $1/2$ с генераторами T_α , T_β и т. д. Кроме того, пусть константа аномалии $\text{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma]$ этих симметрий не равна нулю. Тогда спектр связанных состояний должен содержать безмассовые частицы спина $1/2$, такие что на их левополяризованные состояния действуют преобразования с генераторами $\mathcal{T}_\alpha$, $\mathcal{T}_\beta$ и т. д., имеющие ту же константу аномалии

$$\text{tr}[\{\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta\}\mathcal{T}_\gamma] = \text{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma]. \quad (22.5.1)$$

Смысл этого утверждения 'т Хофт объяснял следующим образом. Представим себе, что некоторые слабовазаимодействующие калибровочные бозоны связаны с генераторами T_α , T_β и т. д. заложенной в фундаментальную теорию глобальной симметрии. Допустим также, что хотя некоторые из коэффициентов $D_{\alpha\beta\gamma} \equiv \text{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma]$ и не равны нулю, однако соответствующая им аномалия взаимно уничтожается с аномалиями, обусловленными наличием в спектре теории безмассовых фермионов-“наблюдателей”, которые не чувствуют огромных сил, удерживающих вместе составные компоненты частиц. Физический процесс при энергиях, много меньших характерного масштаба конфайнмента Λ' , будет описываться эффективным лагранжианом, не содержащим подверженных конфайнменту фермионов. Если исходная симметрия с генераторами T_α , T_β и т. д. не нарушена спонтанно, голдстоуновских бозонов нет и спектр теории содержит лишь слабо-связанные калибровочные бозоны и фермионы-наблюдатели, а также любые безмассовые связанные состояния подверженных конфайнменту фермионов и сильно-вазаимодействующих калибровочных бозонов. Чтобы эффективная теория поля была непротиворечивой, она не должна содержать аномалий. Однако мы предположили, что константа аномалии для фермионов-наблюдателей равна $-D_{\alpha\beta\gamma}$. Поэтому должны существовать безмассовые связанные состояния, аномальная константа которых равна и противоположна по знаку данной и, следовательно, равняется константе исходных запертых фермионов²⁾. Заметим, что приведенное рассуждение работает независимо

²⁾ Осталось показать, что эти частицы должны иметь спин $1/2$. Предположим, что в данном случае никаких голдстоуновских бозонов нет, а бесспиновые частицы не обязательно являются безмассовыми. Кроме того, будем считать, что имеющиеся в теории элементарные калибровочные бозоны нейтральны по отношению к преобразованиям аномальной симметрии и поэтому не могут давать вклада в аномалию. Составные частицы со спином $j \geq 1$ исключаются по другой причине [16a]. В рассматриваемой теории аномальные токи можно построить в виде лоренцевых 4-векторных функций от

от того, насколько слабыми являются исходные калибровочные взаимодействия. Поэтому соответствующие им калибровочные бозоны и неподверженные конфайнменту фермионы вовсе не обязаны быть реальными частицами, для того чтобы *связанные состояния с нулевой массой и спином $1/2$ воспроизводили аномалии элементарных запрещенных фермионов спина $1/2$, из которых эти состояния составлены.*

В качестве простого примера допустим, что фундаментальная теория содержит безмассовые фермионы n “ароматов”, левая и правая части каждого из которых преобразуются по определяющему представлению N асимптотически свободной калибровочной группы $SU(N)$. Для того чтобы неподверженные конфайнменту $SU(N)$ -нейтральные фермионные основные состояния могли существовать, потребуем, чтобы N было нечетным. Точно так же как в квантовой хромодинамике, в этой теории имеется глобальная $SU_L(n) \times SU_R(n) \times U_V(1)$ -симметрия с левыми и правыми безмассовыми фермионами в $(n, 1)$ - и $(1, n)$ -представлениях соответственно. Оба этих представления характеризуются одним и тем же значением квантового числа $U_V(1)$, которое можно принять равным единице. В фундаментальной теории имеются отличные от нуля константы аномалии для $SU_L(n)$ - $SU_L(n)$ - $U_V(1)$ - и $SU_R(n)$ - $SU_R(n)$ - $U_V(1)$ -токовых триплетов. Они равны

$$D_{aL,bL,0} = D_{aR,bR,0} = N\delta_{ab},$$

где a, b, c и т.д. — индексы генераторов λ_a группы $SU(n)$. Эти генераторы нормированы так, что в определяющем n -компонентном представлении $\text{tr}\{\lambda_a\lambda_b\} = (1/2)\delta_{ab}$. При $n > 2$ отличные от нуля константы аномалии имеются также и для $SU_L(n)$ - $SU_L(n)$ - $SU_L(n)$ - и для $SU_R(n)$ - $SU_R(n)$ - $SU_R(n)$ -токов. Они равны

$$D_{aL,bL,cL} = D_{aR,bR,cR} = N \text{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}, \lambda_c].$$

Допустим, что симметрия $SU_L(n) \times SU_R(n) \times U(1)$ не нарушена спонтанно. Из-за конфайнмента любые фермионные состояния физического спектра будут содержаться в представлениях этой симметрии, которые можно образовать из m_L и m_R элементарных фермионов, имеющих спиральности $+1/2$ и $-1/2$ соответственно, и из $\bar{m}_L$ и $\bar{m}_R$ их античастиц, так что

$$m_L + m_R - \bar{m}_L - \bar{m}_R = kN, \quad (22.5.2)$$

элементарных полей спина $1/2$. Для того чтобы давать вклад в аномалию, эти токи должны иметь неравные нулю матричные элементы между произвольными состояниями, описывающими составные безмассовые частицы со спином $j = 1$. Однако эти матричные элементы будут нарушать лоренцеву инвариантность. Составные безмассовые частицы со спином $j \geq 3/2$ исключаются, поскольку в теории можно построить сохраняющийся тензор энергии-импульса, который должен иметь отличные от нуля матричные элементы между состояниями, описывающими эти частицы. Эти матричные элементы также будут нарушать лоренцеву инвариантность.

где k — любое положительное или отрицательное нечетное целое число. Как результат, единственными неприводимыми представлениями (r, s) группы $SU_L(n) \times SU_R(n)$ являются те, для которых величина r находится в прямом произведении m_L определяющих представлений $SU(n)$ на $\bar{m}_L$ представлений, комплексно сопряженных к ним, а s — в произведении m_R определяющих представлений $SU(n)$ на $\bar{m}_R$ комплексно сопряженных, и квантовое число $U_V(1)$ равно kN , где k , а также m_L , m_R , $\bar{m}_L$ и $\bar{m}_R$ связаны условием (22.5.2). Пусть неприводимые представления (r, s) группы $SU_L(n) \times SU_R(n)$ с квантовым числом $U_V(1)$, равным kN , встречаются среди связанных состояний со спиральностью $+1/2$ $p(r, k, s)$ раз. Тогда соотношение (22.5.1) имеет вид

$$\sum_{r,s,k} p(r, s, k) d_s \operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\} \mathcal{T}_c] = N \operatorname{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c], \quad (22.5.3)$$

$$\sum_{r,s,k} p(r, s, k) d_s \operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}] = \operatorname{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}], \quad (22.5.4)$$

где $\operatorname{tr}^{(r)}$ обозначает след в неприводимом представлении r группы $SU(n)$, а d_s является размерностью представления s группы $SU(N)$. Еще одно ограничение на $p(r, k, s)$ состоит в том, что оно должно быть целым положительным числом.

Значения следов $\operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a \mathcal{T}_b\} \mathcal{T}_c]$ и $k \operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a \mathcal{T}_b\}]$ в любом представлении (r, s, k) группы $SU_L(2) \times SU_R(2) \times U_V(1)$ и в представлении $(\bar{r}, \bar{s}, -k)$, комплексно сопряженном ему, противоположны по знаку. Поэтому соотношения (22.5.3) и (22.5.4) ограничивают значения только для

$$l(r, s, k) \equiv p(r, s, k) - p(\bar{r}, \bar{s}, -k).$$

Вспомним, что используются обозначения, в которых суммирование ведется по всем связанным безмассовым состояниям со спиральностью $+1/2$, включая античастицы состояний со спиральностью $-1/2$, которые преобразуются согласно комплексно сопряженным представлениям. Значения следов $\operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a \mathcal{T}_b\} \mathcal{T}_c]$ и $k \operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a \mathcal{T}_b\}]$ в любом представлении группы $SU_L(2) \times SU_R(2) \times U_V(1)$ и в комплексно сопряженном ему представлении противоположны по знаку. Следовательно, в (22.5.3) и (22.5.4) можно суммировать только по представлениям с квантовым числом $U_V(1)$, таким что $kN > 0$:

$$\sum_{r,s,k>0} l(r, s, k) d_s \operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\} \mathcal{T}_c] = N \operatorname{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c], \quad (22.5.5)$$

$$\sum_{r,s,k>0} l(r, s, k) d_s k \operatorname{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}] = \operatorname{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}], \quad (22.5.6)$$

где $l(r, k, s)$ равно количеству неприводимых представлений (r, s) группы $SU_L(n) \times SU_R(n)$ с квантовым числом $kN > 0$, присутствующих среди основных состояний со спиральностью $+1/2$ за вы-

четом числа представлений среди связанных состояний со спиральностью $-1/2$. (Если четность не нарушена, то представление r, s, k должно встречаться среди связанных состояний спиральности $-1/2$ так же часто, как s, k, r встречается среди связанных состояний спиральности $+1/2$. Таким образом, в данном случае имеет место соотношение $l(r, s, k) = -l(s, k, r)$.)

Рассмотрим сначала случай $n = 2$ ароматов. Симметрично связать три 3-вектора для получения $SU(2)$ -инварианта нельзя, поэтому обе части соотношения (22.5.5) автоматически равны нулю. В результате остается только условие (22.5.6). Определяющее двухкомпонентное представление группы $SU(2)$ содержится в произведении любого нечетного числа этих двухкомпонентных представлений. Поэтому всегда можно найти решение уравнения (22.5.6) при $l(r, s, k) = 0$ для всех представлений группы $SU_L(2) \times SU_R(2) \times U_V(1)$ с нетривиальным r , кроме случая, когда r является определяющим представлением, s — тривиальным, а $k = 1$, и тогда мы принимаем $l = 1$. К сожалению, это решение является далеко не единственным — существует бесконечное число способов воспроизведения аномалий фундаментальной теории.

Как правило, для произвольных n и N можно найти большое количество решений уравнений (22.5.5) и (22.5.6), однако бывают случаи, когда вообще нельзя найти никаких решений. Относительно таких теорий можно заключить, что $SU_L(n) \times SU_R(n) \times U_V(1)$ -симметрия *должна* быть полностью или частично нарушена спонтанно. Наиболее интересное применение это обстоятельство находит в квантовой хромодинамике — теории с калибровочной группой $SU(3)$.

Сосредоточимся на представлениях с $k = 1$ и $\bar{m}_L = \bar{m}_R = 0$, которые можно построить всего из трех элементарных фермионов без антифермионов. Они оказываются следующими³⁾:

а) r — симметричный $SU(n)$ -тензор третьего ранга; s — тривиальное представление;

б) r — антисимметричный $SU(n)$ -тензор третьего ранга; s — тривиальное представление;

в) r — смешанный $SU(n)$ -тензор третьего ранга; s — тривиальное представление;

г) r — симметричный $SU(n)$ -тензор второго ранга; s — $SU(n)$ -вектор;

д) r — антисимметричный $SU(n)$ -тензор второго ранга; s — $SU(n)$ -вектор;

е) r — $SU(n)$ -вектор; s — симметричный $SU(n)$ -тензор второго ранга;

ж) r — $SU(n)$ -вектор; s — антисимметричный $SU(n)$ -тензор второго ранга;

³⁾ Все $SU(N)$ -векторы и $SU(N)$ -тензоры считаются контравариантами.

з) r — тривиальное представление; s — симметричный $SU(n)$ -тензор третьего ранга;

и) r — тривиальное представление; s — антисимметричный $SU(n)$ -тензор третьего ранга;

к) r — тривиальное представление; s — смешанный $SU(n)$ -тензор третьего ранга.

Для $n > 2$ соотношения (22.5.5) и (22.5.6) приобретают вид⁴⁾

$$\frac{1}{2}(n+3)(n+6)l_a + \frac{1}{2}(n-3)(n-6)l_b + (n^2-9)l_c + n(n+4)l_d + \\ + n(n-4)l_e + \frac{1}{2}n^2(n+1)l_f + \frac{1}{2}n^2(n-1)l_g = 3 \quad (22.5.7)$$

и

$$\frac{1}{2}(n+2)(n+3)l_a + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)l_b + (n^2-3)l_c + n(n+2)l_d + \\ + n(n-2)l_e + \frac{1}{2}n(n+1)l_f + \frac{1}{2}n(n-1)l_g = 1. \quad (22.5.8)$$

Уравнение (22.5.7) решается без особых проблем. Заметим однако, что если n кратно трем, то при любом l каждое слагаемое в левой части уравнения (22.5.8) также кратно трем, в результате чего это уравнение не имеет решений вообще. В частности, можно видеть, что *в квантовой хромодинамике с тремя ароматами безмассовых кварков симметрия $SU_L(3) \times SU_R(3) \times U_V(1)$ должна быть спонтанно нарушена*. Этот результат применим не только к представлениям **а**–**к**, но также и к любому представлению группы $SU_L(3) \times SU_R(3) \times U_V(1)$, которое можно образовать из бесцветных комбинаций кварков и антикварков.

* * *

За исключением особых случаев типа калибровочной группы $SU(3)$ с $n = 3$ элементарными фермионными $SU(3)$ -триплетам, т.е. хфтовское условие согласования аномалий не является сильным ограничением; вообще говоря, когда киральная симметрия нарушена спонтанно, оно допускает большое разнообразие связанных безмассовых состояний. Т. Хофтом также было предложено условие *развязки*: если один или более ароматов элементарных фермионов имеют очень большие массы, не должно быть спонтанно ненарушенных киральных симметрий, предотвращающих появление массы у составных частиц, которые содержат эти тяжелые элементарные фермионы. Например, если в случае цветной калибровочной группы

⁴⁾ В работе [16] предполагалось, что четность не нарушена спонтанно, т.е. эти формулы были получены для $l_a = -l_h$, $l_b = -l_i$, $l_c = -l_j$, $l_d = -l_f$ и $l_e = -l_g$. Как мы видим, основной вывод справедлив независимо от сохранения четности.

$SU(3)$ один из n кварковых типов оказывается очень массивным, те трехфермионные состояния, которые содержат один массивный кварк, будут реализовать представления (r', s') группы $SU(n-1) \times SU(n-1)$ любого из следующих видов:

а) r' — симметричный $SU(n-1)$ -тензор второго ранга; s' — тривиальное представление,

б) r' — антисимметричный $SU(n-1)$ -тензор второго ранга; s' — тривиальное представление,

в) r' и s' — $SU(n)$ -векторы,

г) r' — тривиальное представление; s' — симметричный $SU(n-1)$ -тензор второго ранга,

д) r' — тривиальное представление; s' — антисимметричный $SU(n-1)$ -тензор второго ранга.

Для того чтобы трехфермионные массовые состояния приобрели большую массу, необходимо соблюдение условия $l'(r', s') = 0$, где $l'(r', s')$ — разность между количеством представлений (r', s') , присутствующих среди основных состояний со спиральностью $+1/2$, и количеством тех же представлений среди состояний со спиральностью $-1/2$. Просматривая список трехфермионных представлений а–к группы $SU(n) \times SU(n)$, мы видим, что условие развязки приводит к условию ⁵⁾

$$\begin{aligned} 0 &= l'_v = l_a + l_c + l_d, \\ 0 &= l'_w = l_b + l_c + l_e, \\ 0 &= l'_x = l_f + l_g + l_d + l_e, \\ 0 &= l'_y = l_f + l_h + l_j, \\ 0 &= l'_z = l_g + l_i + l_j. \end{aligned} \tag{22.5.9}$$

К сожалению, в большинстве случаев количество решений все еще бесконечно, хотя когда l — целые числа, независимые от n , решений нет вообще.

Несмотря на то что справедливость условия развязки в общем случае не вызывает сомнений, оно может оказаться неверным именно в том контексте, в котором использовалось 'т Хофтом [17]. Дело в том, что увеличение масс одного или нескольких фермионов обычно сопровождается фазовыми переходами, которые приводят к тому, что спектр масс выглядит иначе, чем в ситуации с малыми фермионными массами. Существует более сильное условие, называемое *условием устойчивости масс*. Согласно этому условию в случае, когда один или несколько фермионных ароматов приобретают *произвольную* массу, нет спонтанно нарушенной киральной симметрии, за-

⁵⁾ В изучавшемся 'т Хофтом случае сохранения четности третье уравнение отсутствует, а четвертое и пятое эквивалентны первому и второму.

препьющей наличие составных частиц, содержащих массивные фермионы [17]. Если это условие справедливо, оно должно приводить к тем же последствиям (см. (22.5.9)), к которым приводит условие развязки. При этом фазовые переходы не оказывают влияния на его справедливость.

Несложно построить модели, в которых условие устойчивости масс нарушено. Они подобны теориям со спонтанно нарушенными *некиральнойными* симметриями, которые приводят к наличию безмассовых голдстоуновских бозонов, составляющими которых являются массивные фермионы [17]. (Эти модели также включают фазовые переходы с возрастающими фермионными массами, которые делают недействительными выводы, следующие из условия развязки.) Однако в работе Вафа и Виттена, обсуждавшейся в § 19.9, показано, что во многих реалистичных теориях типа КХД некиральная симметрия не может быть нарушена спонтанно. Таким образом, серьезных возражений относительно условия устойчивости масс не существует.

§ 22.6. Условия непротиворечивости

Численные коэффициенты, характеризующие аномалию любой симметрии, зависят от содержащейся в теории материи. С другой стороны, *форма* аномалии мало зависит от деталей теории, поскольку определяется условиями непротиворечивости, впервые предложенными Вессом и Зумино в 1971 г. [18].

Даже если нас интересуют аномалии в токах глобальной симметрии, для получения условий непротиворечивости удобно представлять себе, что все токи связаны с калибровочными полями (в случае неабелевой симметрии связанными друг с другом) так, что соответствующие симметрии становятся *локальными*. Мы всегда можем вернуться к глобальным симметриям, полагая инфинитезимальными соответствующие константы связи. Если забыть про аномалии, в рамках этого формализма эффективное действие $\Gamma[A]$ в присутствии фонового калибровочного поля $A_{\alpha\mu}(x)$ будет инвариантным относительно инфинитезимальных преобразований

$$A_{\beta\mu}(y) \rightarrow A_{\beta\mu}(y) + i \int d^4x \epsilon_\alpha(x) \mathcal{T}_\alpha(x) A_{\beta\mu}(y).$$

Чтобы воспроизвести преобразование (15.1.9), нужно взять

$$-i\mathcal{T}_\alpha(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu}(x) \frac{\delta}{\delta A_{\gamma\mu}(x)}. \quad (22.6.1)$$

Если учесть аномалии, оператор $\mathcal{T}_\alpha(x)$ не будет более оператором уничтожения для $\Gamma[A]$. Вместо этого должно иметь место соотношение

$$\mathcal{T}_\alpha(x) \Gamma[A] = G_\alpha[x; A], \quad (22.6.2)$$

где $G_\alpha[x; A]$ отражает влияние аномалии. Кроме того, соотношение (22.6.2) можно переписать в виде формулы для ковариантной дивергенции среднего значения тока:

$$D_\mu \langle J_\alpha^\mu(x) \rangle = -iG_\alpha[x; A], \quad (22.6.3)$$

где

$$\langle J_\alpha^\mu(x) \rangle \equiv \frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)} \Gamma[A], \quad (22.6.4)$$

а D_μ — калибровочно-ковариантная производная (15.1.10), взятая в присоединенном представлении с $(t_\beta)_{\gamma\alpha} = -iC_{\alpha\beta\gamma}$.

Условия непротиворечивости Весса–Зумино следуют из коммутационных соотношений¹⁾

$$[\mathcal{T}_\alpha(x), \mathcal{T}_\beta(y)] = iC_{\alpha\beta\gamma} \delta^4(x-y) \mathcal{T}_\gamma(x). \quad (22.6.5)$$

Из соотношений (22.6.2) и (22.6.5) получаем общее условие непротиворечивости

$$\mathcal{T}_\alpha(x) G_\beta[y; A] - \mathcal{T}_\beta(y) G_\alpha[x; A] = iC_{\alpha\beta\gamma} \delta^4(x-y) G_\gamma[y; A]. \quad (22.6.6)$$

Эти условия изначально были найдены Вессом и Зумино для случая киральной $SU(3) \times SU(3)$ -симметрии сильных взаимодействий, имеющей особое значение как с физической, так и с исторической точек зрения. Здесь генераторы $\mathcal{T}_\alpha(x)$ действуют на калибровочные поля, состоящие из четных генераторов $\mathcal{Y}_\alpha(x)$, определяемых выражением (22.3.31), и нечетных генераторов $\mathcal{X}(x)$, определяемых выражением (22.3.32)²⁾. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\mathcal{Y}_a(x), \mathcal{Y}_b(y)] &= i\delta^4(x-y) f_{abc} \mathcal{Y}_c(x), \\ [\mathcal{Y}_a(x), \mathcal{X}_b(y)] &= i\delta^4(x-y) f_{abc} \mathcal{X}_c(x), \\ [\mathcal{X}_a(x), \mathcal{X}_b(y)] &= i\delta^4(x-y) f_{abc} \mathcal{Y}_c(x), \end{aligned}$$

где f_{abc} — структурные константы группы $SU(3)$. Поскольку подгруппа группы $SU(3)$, генерируемая оператором $\mathcal{Y}_a$, не нарушена спонтанно, удобно трактовать интегрирование по фермионным импульсам так, чтобы сохранить инвариантность по отношению к калибровочным преобразованиям, которые генерируются этим же оператором:

$$\mathcal{Y}_a(x) \Gamma = 0,$$

¹⁾ Множитель $-i$ в уравнении (22.6.1) введен для того, чтобы в написанном коммутационном соотношении перед структурной константой $C_{\alpha\beta\gamma}$ появилась мнимая единица $+i$, что является общепринятым. Напомним, что в используемом нами для алгебры Ли базисе структурные константы полностью антисимметричны. Поэтому между верхними и нижними калибровочными индексами нет никаких отличий.

²⁾ Напомним также (см. § 22.3), что используемые нами операторы $\mathcal{X}_a$ и $\mathcal{Y}_a$ соответствуют операторам Y_a и X_a работы [8].

и ненулевой остается аномалия

$$\mathcal{X}_a(x)\Gamma = G_a(x).$$

Тогда нетривиальные условия непротиворечивости имеют вид

$$\mathcal{Y}_a(x)G_b(y) = i\delta^4(x-y)f_{abc}G_c(y)$$

и

$$\mathcal{X}_a(x)G_b(y) - \mathcal{X}_b(x)G_a(y) = 0.$$

Первое из них просто означает, что $G_a(x)$ преобразуется относительно $SU(3)$ подобно октету. Второе условие накладывает дополнительные сильные ограничения на $G_a(x)$. Читатель может проверить, что этому условию удовлетворяет формула Бардина (22.3.34) для $G_a(x)$. Используем в качестве иллюстрации общую калибровочную теорию, в которой все токи трактуются симметрично. В § 22.3 в этом случае для аномалии мы предложили формулу (22.3.38), однако в ней не было слагаемых выше второго порядка по калибровочным полям. Покажем теперь, что вид этих слагаемых определяется условиями совместимости (22.6.6).

С этой целью, а также чтобы иметь возможность дальнейших обобщений, очень удобно переписать набор условий непротиворечивости Весса–Зумино в виде условий инвариантности относительно описанных в § 15.7 БРСТ-преобразований. Введем духовые поля ω_α и определим нильпотентный БРСТ-оператор s общей калибровочной теории с помощью соотношений

$$sA_{\alpha\mu} = \partial_\mu\omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma, \quad (22.6.7)$$

$$s\omega_\alpha = -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma. \quad (22.6.8)$$

Предполагается, что s удовлетворяет закону дистрибутивности $s(AB) = (sA)B \pm A(sB)$, где знак отрицательный, если A — фермионная переменная, подобная ω_α , в противном случае знак положительный. Вместо функции аномалии $G_\alpha[x; A]$ мы будем работать с функционалом

$$G[\omega, A] = \int \omega_\alpha(x)G_\alpha[x; A]d^4x. \quad (22.6.9)$$

Тогда (помня, что ω_α — величина фермионного типа)

$$\begin{aligned} sG[\omega, A] &= -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\int d^4x\omega_\beta(x)\omega_\gamma(x)G_\alpha[x; A] - \\ &- \int d^4x\omega_\alpha(x)\int d^4y\left[\frac{\partial\omega_\beta(y)}{\partial y^\mu} + C_{\beta\gamma\delta}A_{\gamma\mu}(y)\omega_\delta(y)\right]\frac{\delta G_\alpha[x; A]}{\delta A_{\beta\mu}(y)} = \\ &= \int d^4x\int d^4y\omega_\alpha(x)\omega_\beta(y)\left[-\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)G_\gamma[x; A] + \right. \\ &\quad \left. + i\mathcal{T}_\beta(y)G_\alpha[x; A]\right]. \end{aligned}$$

Поскольку духовые поля антикоммутируют друг с другом, это вы-

ражение можно записать в виде

$$sG[\omega, A] = -\frac{1}{2} i \int d^4x \int d^4y \omega_\alpha(x) \omega_\beta(y) \times \\ \times [iC_{\alpha\beta\gamma} \delta^4(x-y) G_\gamma[x; A] + \mathcal{T}_\beta(y) G_\alpha[x; A] - \mathcal{T}_\alpha(x) G_\beta[y; A]].$$

Мы видим, что условие совместимости (22.6.6) выполняется тогда и только тогда, когда $G[\omega, A]$ — БРСТ-инвариантна,

$$sG[\omega, A] = 0, \quad (22.6.10)$$

для всех духовых полей $\omega_\alpha(x)$.

Выясним теперь, что будет, если аномалию $G[\omega; A]$ можно представить в виде БРСТ-оператора, действующего на локальный функционал $F[A]$:

$$G[\omega; A] = sF[A]. \quad (22.6.11)$$

(Заметим, что функционал F должен не зависеть от духового поля, поскольку оператор s добавляет один множитель этого поля, а функционал аномалии G линеен по духовому полю.) БРСТ-оператор удовлетворяет равенству $s^2 = 0$, поэтому аномалия должна удовлетворять условию непротиворечивости $sG = 0$. Если бы $F[A]$ был *локальным* функционалом³⁾ калибровочных полей, то его можно было бы вычесть из действия, устранив таким образом аномалию. То же самое верно для любого слагаемого в аномалии, которое можно записать в виде БРСТ-оператора s , действующего на локальный функционал; такое слагаемое само по себе удовлетворяет условию непротиворечивости, и его можно удалить введением в действие локального члена. Следовательно, интересующие нас возможные аномалии представляют собой локальные функционалы $G[\omega; A]$ с духовым числом 1, удовлетворяющие условию непротиворечивости (22.6.10) по модулю слагаемых, которые можно выразить в виде оператора s , действующего на некоторый локальный функционал духового числа 0. В соответствии с обычной терминологией нильпотентных операторов классы эквивалентности таких функционалов образуют так называемые *когомологии* оператора s на духовом числе 1.

Все это можно представить в терминах самой локальной плотности. Запишем аномалию (или любое слагаемое из аномалии) в виде $G = \int d^4x \mathcal{G}(x)$, где $\mathcal{G}(x)$ — степенной ряд по калибровочным и духовым полям, а также по производным этих полей в пространственно-временной точке x . Тогда условие $sG = 0$ эквивалентно утверждению

$$s\mathcal{G}(x) = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x), \quad (22.6.12)$$

где $\mathcal{J}(x)$ — некоторая функция от полей и их производных. Слагаемые в $\mathcal{G}$, которые можно удалить введением в действие локального

³⁾ Под локальным функционалом понимается интеграл от локальной функции, т.е. функции от полей и производных полей, взятых в данной точке.

члена, имеют с точностью до возможных производных вид $s\mathcal{F}$. Таким образом, интересующие нас аномалии представляют собой локальные функции духового числа 1, удовлетворяющие условию непротиворечивости (22.6.12), взятые по модулю слагаемых, которые можно выразить в виде операторов s , действующих на взятый по модулю возможных производных некоторый локальный функционал духового числа нуль. Это действие оператора s называется когомологией оператора s на духовом числе 1 в пространстве локальных функций, взятых по модулю производных, и обозначается $H^1(s|d)$.

Для получения когомологии БРСТ-оператора s и вывода с помощью нее формы аномалий в произвольных калибровочных теориях использовались алгебраические методы [19]. Единственное, что не фиксируется при таком подходе, — постоянные коэффициенты, которые зависят от вида материальных полей в теории. Эти коэффициенты вычисляются с помощью методов, изложенных в § 22.2 и 22.3. Для произвольных калибровочных теорий слагаемые в аномалии второго порядка по калибровочным полям, а также соответствующие им постоянные коэффициенты были вычислены ранее. Поэтому сейчас мы воспользуемся условием непротиворечивости (22.6.12) для вычисления слагаемых более высокого порядка.

В § 22.3 было показано, что в случае, когда все токи рассматриваются симметрично, слагаемые второго порядка по калибровочным полям составляют одну треть от выражения (22.3.26). Это выражение представляет собой оператор размерности 4 (в единицах массы), а в условие непротиворечивости Весса–Зумино (22.6.6) входят операторы только одинаковых размерностей. Поэтому для того чтобы ему удовлетворить, следует добавить слагаемые более высокого порядка по калибровочному полю, обязательно имеющие ту же размерность. Таким образом, условия непротиворечивости можно удовлетворить решениями вида (не обязательно единственно возможного вида)

$$G_\alpha = i[\langle \partial_\mu J_\alpha^\mu \rangle]_{\text{аном}} = -\frac{i}{24\pi^2} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \text{Tr}\{T_\alpha[\partial_\kappa A_\nu \partial_\lambda A_\rho + ic_1 \partial_\kappa A_\nu A_\lambda A_\rho + ic_2 A_\kappa \partial_\nu A_\lambda A_\rho + ic_3 A_\kappa A_\nu \partial_\lambda A_\rho - c_4 A_\kappa A_\nu A_\lambda A_\rho]\}, \quad (22.6.13)$$

где $A_\mu \equiv A_{\alpha\mu} T_\alpha$, а c_i — константы, подлежащие определению.

Перепишем это выражение на языке дифференциальных форм. (См. § 8.8.) Мы вводим c -числовые параметры dx^μ , антикоммутирующие друг с другом и всеми фермионными полями, такими как духовые поля ω_α . Кроме того, dx^μ антикоммутируют с БРСТ-оператором s . Поскольку $dx^k dx^\nu dx^\lambda dx^\rho$ полностью антисимметричен, его можно переписать в виде

$$dx^\kappa dx^\nu dx^\lambda dx^\rho = \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} d^4x, \quad d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (22.6.14)$$

Кроме того, введем внешнюю производную

$$d \equiv dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

которая из-за коммутативности производных является нильпотентной и антикоммутирует с s :

$$d^2 = 0, \quad ds + sd = 0. \quad (22.6.15)$$

Наконец, мы вводим антикоммутирующие величины

$$A \equiv iA_\mu dx^\mu = iA_{\alpha\mu} T_\alpha dx^\mu, \quad \omega \equiv i\omega_\alpha T_\alpha. \quad (22.6.16)$$

В представленных обозначениях соотношение (22.6.13) принимает вид

$$G[\omega, A] = \frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr} \{ \omega [(dA)^2 + c_1(dA)A^2 + c_2A(dA)A + c_3A^2(dA) + c_4A^4] \}. \quad (22.6.17)$$

Чтобы применить условия совместимости (22.6.10), замечаем, что законы преобразования БРСТ-оператора (22.6.7) и (22.6.8) можно записать в виде

$$sA = -d\omega + \{A, \omega\}, \quad (22.6.18)$$

$$s\omega = \omega^2. \quad (22.6.19)$$

Теперь БРСТ-преобразование последнего слагаемого из (22.6.17) задается соотношением

$$s \text{Tr}[\omega A^4] = \text{Tr}[\omega^2 A^4 - \omega \{A, \omega\} A^3 + \omega A \{A, \omega\} A^2 - \omega A^2 \{A, \omega\} A + \omega A^3 \{A, \omega\}] + \text{члены } \omega d\omega A^3 = \text{Tr}[\omega^2 A^4] + \text{члены } \omega d\omega A^3.$$

Поскольку sG не содержит никаких других слагаемых, пропорциональных $\text{Tr}[\omega^2 A^4]$, условие непротиворечивости (22.6.10) удовлетворяется, только если $c_4 = 0$. Полагая $c_4 = 0$, прямым вычислением получаем

$$\begin{aligned} sG = \frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr} \{ & -(dA)^2 \omega^2 + \omega d\omega A dA - d\omega \omega dA A - A\omega dA d\omega - \\ & - \omega A d\omega dA + c_1[\omega dA d\omega A - \omega dA A d\omega] + c_2[\omega d\omega dA A - \omega A dA d\omega] + \\ & + c_3[\omega d\omega A dA - \omega A d\omega dA] - c_1[-\omega A d\omega A^2 + \omega d\omega A^3 + \omega dA A^2 \omega] - \\ & - c_2[\omega A^2 d\omega A - \omega A d\omega A^2 + \omega A dA d\omega] - \\ & - c_3[-\omega A^3 d\omega + \omega A^2 d\omega A + \omega A^2 dA \omega] \}. \end{aligned}$$

Нет необходимости предполагать, что подынтегральное выражение равно нулю. Для обращения интеграла в нуль, достаточно, чтобы это выражение представляло собой производную некоторой локальной функции. Этому условию должны по отдельности удовлетворять слагаемые, содержащие одну и две производные, поскольку между слагаемыми с различным числом производных не может быть никаких сокращений. Нетрудно видеть, что слагаемые, содержащие только одну производную, имеют вид $d\mathcal{F}$, если положить $c_1 = -c_2 = +c_3 \equiv c$. Оставшиеся слагаемые образуют полную производную, если положить $c = -1/2$. Таким образом, мы вновь воспроизводим (22.3.38).

Часто этот результат переписывают в более компактном виде

$$\begin{aligned} G[\omega, A] &= \frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr} \left\{ \omega d \left[A dA - \frac{1}{2} A^3 \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr} \left\{ \omega d \left[AF + \frac{1}{2} A^3 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (22.6.20)$$

где F — 2-форма матричной напряженности поля:

$$F \equiv \frac{1}{2} it_\alpha F_{\alpha\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dA - A^2. \quad (22.6.21)$$

Поскольку аномалия не обязана иметь вид (22.6.13), выражение (22.6.20) для $G[\omega, A]$ не является единственно возможным. Согласно результатам, представленным в следующем параграфе, для любой подгруппы H группы G , такой что $\text{Tr}\{t_i\{t_j, t_k\}\} = 0$ имеет место для всех генераторов H , можно ввести в действие дополнительные локальные слагаемые таким способом, чтобы для любого генератора t_i подгруппы H аномалия G_i равнялась нулю.

Для построения решений условий непротиворечивости существует изящный алгебраический аппарат, называемый *уравнениями спуска Стора–Зумино* [18a]. Описать этот метод в пространстве–времени любой четной размерности так же просто, как и в четырехмерном, поэтому будем считать, что размерность пространства–времени равна $2n$. Во-первых, для того чтобы придать значение $(2n+2)$ -форме $\text{Tr} F^{n+1}$, необходимо предположить, что к $2n$ координатам пространства–времени добавлены по крайней мере две дополнительные переменные. Заметим, что

$$dF = -d(A^2) = -(dA)A + A(dA) = [A, F], \quad (22.6.22)$$

поэтому $\text{Tr} F^{n+1}$ является замкнутым:

$$d \text{Tr} F^{n+1} = (n+1) \text{Tr}\{(dF)F^n\} = \text{Tr}\{[A, F^{n+1}]\} = 0. \quad (22.6.23)$$

Если расширенное пространство–время односвязно, теорема Пуанкаре говорит нам, что $\text{Tr}\{F^{n+1}\}$ является точным в том смысле, что существует $(2n+1)$ -форма Ω_{2n+1} (называемая *формой Черна–Саймонса*), для которой

$$\text{Tr}\{F^{n+1}\} = d\Omega_{2n+1}. \quad (22.6.24)$$

Далее, поскольку $\text{Tr}\{F^{n+1}\}$ явно калибровочно-инвариантен и зависит только от калибровочных полей, он является БРСТ-инвариантным:

$$s \text{Tr}\{F^{n+1}\} = 0. \quad (22.6.25)$$

Подразумевается, что “дифференциалы” dx^μ антикоммутируют с фермионными полями типа духового поля ω_α , поэтому оператор d антикоммутирует с оператором s , который определен соотношениями (22.6.7) и (22.6.8):

$$sd + ds = 0.$$

Поскольку s нильпотентен, $s\Omega_{2n+1}$ тоже оказывается замкнутой:

$$d(s\Omega_{2n+1}) = -s \operatorname{Tr}\{F^{n+1}\} = 0.$$

Снова используя теорему Пуанкаре, получаем, что должна существовать $2n$ -форма Ω_{2n}^1 первого порядка по ω_α , для которой

$$s\Omega_{2n+1} = d\Omega_{2n}^1. \quad (22.6.26)$$

Кроме того, $d(s\Omega_{2n}^1) = -s^2\Omega_{2n+1} = 0$, поэтому также должна существовать $(2n-1)$ -форма Ω_{2n-1}^2 второго порядка по духовому полю, для которой

$$s\Omega_{2n}^1 = d\Omega_{2n-1}^2. \quad (22.6.27)$$

Следовательно, интеграл по $2n$ пространственно-временным измерениям от Ω_{2n}^1 является БРСТ-инвариантным:

$$s \int_{\text{простр.-время}} \Omega_{2n}^1 = 0, \quad (22.6.28)$$

даже несмотря на то, что сама величина Ω_{2n}^1 неинвариантна относительно преобразований БРСТ. Таким образом, интегрируя два дифференциальных уравнения первого порядка: $d\Omega_{2n+1} = \operatorname{Tr}\{F^{n+1}\}$ и $d\Omega_{2n+1} = s\Omega_{2n+1}$, можно найти выражение, которое играет роль функционала аномалии $G[\omega, A]$. Общее (но не единственное) решение этих уравнений имеет вид

$$\Omega_{2n+1} = (n+1) \int_0^1 dt \operatorname{Tr}\{AF_t^n\}, \quad (22.6.29)$$

$$\Omega_{2n}^1 = -(n+1) \sum_{r=0}^{n-1} \int_0^1 dt (1-t) \operatorname{Tr}\{\omega d(F_t^r AF_t^{n-1-r})\}, \quad (22.6.30)$$

где $F_t \equiv tF + (t-t^2)A^2$. Вычисление интеграла (22.6.30) показывает, что в случае четырехмерного пространства-времени выражение (22.6.20) дает для $G[\omega, A]$ результат, пропорциональный $\int \Omega_4^1$.

Мы можем продолжить “спуск” и получить новые весьма полезные результаты. В частности, из формулы (22.6.27) и нильпотентности оператора s следует, что $d(s\Omega_{2n-1}^2) = 0$. Таким образом, согласно теореме Пуанкаре $s\Omega_{2n-1}^2$ представляет собой величину вида $d\Omega_{2n-2}^3$. Поэтому $(2n-1)$ -мерный интеграл по *пространственным* координатам от Ω_{2n-1}^2 БРСТ-инвариантен:

$$s \int_{\text{простр.}} \Omega_{2n-1}^2 = 0. \quad (22.6.31)$$

Подобные БРСТ-инвариантные функционалы второго порядка по духовым полям, возможно, играют роль [18b] так называемых *швинге-*

ровских членов [18с]. Интересующие нас швингеровские члены возникают в виде аномальных слагаемых $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в одновременных коммутационных соотношениях для временных компонент токов симметрии:

$$[J_{\alpha}^0(\mathbf{x}, t), J_{\beta}^0(\mathbf{y}, t)] = iC_{\alpha\beta\gamma}J_{\gamma}^0(\mathbf{x}, t)\delta^{2n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (22.6.32)$$

(Все операторы в этом параграфе берутся в один и тот же момент времени, и в дальнейшем мы не будем указывать его явно.) Из антисимметрии коммутатора имеем: $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -S_{\beta\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, таким образом, вся информация об $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ содержится в функционале

$$S[\omega] \equiv \int d^{2n-1}x d^{2n-1}y \omega_{\alpha}(\mathbf{x})\omega_{\beta}(\mathbf{y})S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (22.6.33)$$

Заметим, что $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, вообще говоря, зависит от различных полей материи и калибровочных полей, поэтому $S[\omega]$ в общем случае зависит как от этих полей, так и от духовых полей $\omega_{\alpha}(\mathbf{x})$. Вычисляя коммутатор выражения (22.6.23) с третьим током $J_{\gamma}^0(\mathbf{z})$, сворачивая с $\omega_{\alpha}(\mathbf{x})\omega_{\beta}(\mathbf{y})\omega_{\alpha}(\mathbf{z})$, интегрируя по $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, а затем используя тождество Якоби, находим, что

$$0 = \int d^{2n-1}x d^{2n-1}y d^{2n-1}z \omega_{\alpha}(\mathbf{x})\omega_{\beta}(\mathbf{y})\omega_{\gamma}(\mathbf{z}) \times \\ \times [iC_{\alpha\beta\delta}S_{\gamma\delta}(\mathbf{z}, \mathbf{x})\delta^{2n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + [J_{\gamma}^0(\mathbf{z}), S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]].$$

Действие БРСТ-оператора s на функционалы типа $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ от калибровочных полей и полей материи эквивалентно действию калибровочных преобразований с параметром ω_{α} , поэтому

$$sS_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i \left[\int d^{2n-1}z \omega_{\gamma}(\mathbf{z})J_{\gamma}^0(\mathbf{z}), S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right].$$

Вспоминая соотношение (22.6.8), находим, что функционал (22.6.33) БРСТ-инвариантен:

$$sS[\omega] = 0. \quad (22.6.34)$$

Кроме того, вводя в токи соответствующие члены, можно добавить к $S[\omega]$ слагаемые вида $sT[\omega]$. Поэтому набор возможных швингеровских членов, которые нельзя устранить введением соответствующих слагаемых в токи, задается когомологией БРСТ-оператора s на духовом числе 2, т. е. БРСТ-инвариантными функционалами S второго порядка по духовым полям. Сами эти функционалы имеют вид, отличный от sT . Соотношение (22.6.31) показывает, что $\int \Omega_{2n-1}^2$ может играть роль такого функционала.

* * *

Приведенный выше анализ применим только к аномалиям в однопетлевом приближении. Как известно, теория с однопетлевыми аномалиями в токах, с которыми связаны квантовые калибровочные поля,

является противоречивой, а следовательно нет никакой необходимости изучать ее в более высоких порядках. Обратное неверно: если в теории с квантовыми калибровочными полями в однопетлевом порядке аномалии отсутствуют, нам все еще необходимо показать, что они будут отсутствовать и в более высоких порядках. В теориях с аномалиями глобальных симметрий, как, например, киральной симметрии $K \times D$, никакой противоречивости нет, и для таких теорий необходимо знать, влияют ли поправки более высоких порядков на аномалии.

Поскольку БРСТ-преобразование действует на поля нелинейно, даже при отсутствии аномалий квантовое эффективное действие $\Gamma[\omega, A]$ может быть неинвариантным относительно БРСТ-преобразований вне рамок однопетлевого приближения. Как было показано в § 17.1, вне однопетлевого приближения необходимо рассматривать функционалы не только от калибровочных и духовых полей, но также и от соответствующих им антиполей. (Иногда важно ввести антиполя даже в однопетлевом приближении по следующим причинам. Рассмотрим зависящий только от полей локальный функционал, который удовлетворяет условиям непротиворечивости Весса–Зумино и не выражается в виде БРСТ-оператора, действующего на локальный функционал только от полей. Тогда этот функционал нельзя отождествить с аномальным вкладом, если его *можно* выразить в виде антискобки от действия и локального функционала, зависящего от полей и антиполей, поскольку в этом случае аномалию можно устранить вычитанием из действия некоторого слагаемого, что соответствует совместному изменению зависящего от полей действия и калибровочной симметрии.)

Оказывается, что рассмотрение аномалий в случае, когда в действие включены антиполя, также допускает кохомологическую формулировку [20,21]. Анализ этой проблемы основан на предложенной Зинн–Жустеном модификации (17.1.10) уравнения, которое Баталин и Вильковский называли основным уравнением. При отсутствии аномалии $(\Gamma, \Gamma) = 0$, поэтому в однопетлевом порядке $(S, \Gamma_1) = 0$, где S — действие в нулевом порядке, а Γ_1 — однопетлевой вклад в эффективное квантовое действие. При наличии аномалий вместо этого имеем

$$(S, \Gamma_1) = G_1, \quad (22.6.35)$$

где G_1 — некоторый функционал от полей и антиполей. Поскольку духовое число для S и Γ_1 равно нулю, духовое число для G_1 должно быть равно единице. Предполагается, что действие удовлетворяет классическому основному уравнению $(S, S) = 0$, поэтому операция антискобки в (22.6.35) нильпотентна и, следовательно, $(S, G_1) = 0$. Однако если для некоторого локального функционала F_1 , духовое число которого равно нулю, имеет место соотношение $G_1 = (S, F_1)$, то аномалию в однопетлевом порядке можно устранить, если вычесть этот функционал из действия и, следовательно, из Γ_1 . (Естественно,

$G_1 = (S, \Gamma_1)$, однако при наличии безмассовых частиц Γ_1 не является локальным функционалом.) Таким образом, роль аномальных вкладов могут играть лишь те локальные функционалы с духовым числом, равным единице, которые замкнуты (в том смысле, что удовлетворяют условию $(S, G_1) = 0$) и при этом не являются точными (т. е. их нельзя выразить в виде $G_1 = (S, F_1)$, где F_1 — локальный функционал с духовым числом, равным единице). Другими словами, аномальные вклады соответствуют когомологии операции антискобки $X \mapsto (S, X)$ на духовом числе 1 в пространстве функционалов от полей и антиполей.

Заменяя антискобку $(S, \dots)$ на БРСТ-оператор s , мы воспроизведем результат, который уже был получен в этом параграфе. Если в выражении (22.6.35) занулить антиполя и учесть, что $(\delta\Gamma_1/\delta\chi^n)_{\chi^\dagger=0} = s\chi^n$, то мы найдем, что (22.6.35) фактически приводит к условию $s\Gamma_1 = 0$. Как мы видели, оно эквивалентно требованию, согласно которому Γ_1 должна удовлетворять условиям непротиворечивости Весса–Зумино. Однако основанный на уравнении (22.6.35) анализ в определенном смысле можно расширить и на более высокие порядки.

Чтобы убедиться в этом, допустим, что когомология операции антискобки $X \mapsto (S, X)$ в пространстве локальных функционалов на духовом числе 1 пуста. Предположим также, что для того чтобы положить $G_1 = (S, \Gamma_1) = 0$, мы переопределили действие описанным выше способом. Аномалия, нарушающая основное уравнение $(\Gamma, \Gamma) = 0$, представлена функцией G_2 , для которой

$$(\Gamma_1, \Gamma_1) + 2(S, G_2) = G_2.$$

Однако поскольку $(S, \Gamma_1) = 0$ и $(S, S) = 0$, то любая подобная функция будет удовлетворять условию $(S, G_2) = 0$. Вместе с условием пустоты когомологии это означает, что ее можно представить в виде $G_2 = (S, F_2)$, где F_2 — локальный функционал духового числа нуль. Таким образом, устранить аномалию в данном порядке можно вычитанием из действия функционала F_2 .

Это соображение можно применять в любом порядке. Допустим, что мы устранили в основном уравнении все аномалии до $(N-1)$ -го порядка, так что

$$0 = G_M = \sum_{L=0}^M (\Gamma_L, \Gamma_{M-L}) = 2(S, \Gamma_M) + \sum_{L=1}^{M-1} (\Gamma_L, \Gamma_{M-L})$$

для всех $M < N$. Аналогично, слагаемое N -го порядка в антискобке (Γ, Γ) равно

$$G_N = 2(S, \Gamma_N) + \Gamma \sum_{M=1}^{N-1} (\Gamma_M, \Gamma_{N-M}),$$

поэтому, используя тождество Якоби (15.9.21) (в котором три бозонных оператора берутся со знаком “минус”) и формулу для (S, Γ_M) , находим

$$(S, G_N) = -2 \sum_{M=1}^{N-1} ((S, \Gamma_M), \Gamma_{N-M}) = \sum_{M=1}^{N-1} \sum_{L=1}^{M-1} ((\Gamma_L, \Gamma_{M-L}), \Gamma_{N-M}).$$

Это выражение можно переписать в более симметричной форме

$$(S, G_N) = - \sum_{M_1=1}^{N-2} \sum_{M_2=1}^{N-2} \sum_{M_3=1}^{N-2} \delta_{N, M_1+M_2+M_3} (\Gamma_{M_1}, (\Gamma_{M_2}, \Gamma_{M_3})).$$

Поскольку индексы M_1 , M_2 и M_3 изменяются в одинаковых пределах, двойную антискобку можно переписать в виде суммы по 3! перестановкам этих индексов. Согласно тождеству Якоби (15.9.21) эта сумма равна нулю, откуда следует, что $(S, G_N) = 0$. Если, как и предполагалось, когомология пуста, то выполнение этого равенства означает, что существует локальный функционал F_N , для которого $G_N = (S, F_N)$. Таким образом, вычитая его из действия, можно устранить аномалию в N -м порядке, что и требовалось показать.

С помощью чисто алгебраических методов Барнич, Брандт и Хенно [12] показали, что для янг-миллсовских теорий (в четырехмерном пространстве-времени), которые основаны на полупростых калибровочных группах, когомология операции антискобки $X \mapsto (S, X)$ (на духовом числе один в пространстве локальных функционалов) полностью состоит из линейных комбинаций слагаемых вида (22.6.20), по одному слагаемому для каждой простой подгруппы калибровочной группы. Коэффициенты в этих комбинациях неизвестны⁴⁾. Отсюда видно, что независимо от конкретных полей материи, присутствующих в теории, справедливо следующее утверждение: в однопетлевом порядке, для которого аномалия G_1 автоматически удовлетворяет условию $(S, G_1) = 0$, аномалия полупростой калибровочной группы представляет собой линейную комбинацию слагаемых вида (22.6.20). Постоянные коэффициенты, которые присутствуют в этих комбинациях для каждой простой подгруппы, вычисляются с учетом конкретных полей материи, присутствующих в теории. Далее, в § 22.4 было показано, что существуют калибровочные группы, для которых след из выражения (22.6.20) автоматически равен нулю для любого набора фермионных полей. (Таковыми группами являются любые полупростые группы, не содержащие множителей $SU(n)$ с $n \geq 3$.) Теорема

⁴⁾ Нет никакой необходимости уточнять представление калибровочной алгебры, в котором нужно вычислять след, стоящий в выражении (22.6.20). Это связано с тем, что у всех представлений простой алгебры Ли эти следы равны с точностью до постоянного коэффициента [19a]. Постоянный же коэффициент когомологической теоремой никак не фиксируется.

из работы [22] утверждает, что в таких случаях когомология операции антискобки $X \mapsto (S, X)$ на духовом числе 1 равна нулю. Как было показано, это означает, что в таких теориях аномалия отсутствует в любом порядке теории возмущений.

Существует другой способ связать аномалию с когомологией операции антискобки [23]. При получении тождества Славнова–Тейлора (16.4.6) предполагалось, что мера $\prod_{n,m} d\chi^n(x)$ инвариантна по отношению к данным преобразованиям симметрии.

В § 15.9 из тождества Славнова–Тейлора для преобразований $\chi^n \rightarrow \chi^n + \theta \delta S / \delta \chi_n^\dagger$ было найдено уравнение Зинн–Жустена. Оно неверно, если мера $\prod_{n,m} d\chi^n(x)$

не является инвариантной по отношению к этим преобразованиям, или, другими словами, если не выполняется условие $\Delta S = 0$, где Δ — оператор (15.9.34). В случае $\Delta S \neq 0$, уравнение Зинн–Жустена все еще может оставаться справедливым, если ввести в S локальные функционалы, которые нарушают классическое основное уравнение $(S, S) = 0$ так, что эффект неинвариантности меры исчезает. Оказывается, что условие исчезновения неинвариантности представляет собой не что иное, как квантовое основное уравнение (15.9.35). Чтобы построить удовлетворяющее ему действие S , мы начинаем с действия нулевого порядка S_0 , которое удовлетворяет классическому основному уравнению $(S_0, S_0) = 0$, а затем вводим квантовые поправки. Рассмотрим случай, когда когомология операции $X \rightarrow (S_0, X)$ (на духовом числе один пространстве локальных функционалов) пуста. Тогда оказывается, что в S_0 можно ввести локальный функционал так, чтобы квантовое основное уравнение стало справедливым во всех порядках. В этом можно убедиться таким же образом, каким мы показали отсутствие аномалий во всех порядках.

§ 22.7. Аномалии и голдстоуновские бозоны

В своей статье в 1971 г. Весс и Зумино [18], помимо того что ввели условия непротиворечивости, также заметили, что из возможности существования аномалий вытекают некоторые важные следствия относительно взаимодействий голдстоуновских бозонов. Чтобы понять суть их исследования, полезно обратиться к уже использовавшемуся нами в § 22.5 соображению относительно “согласования аномалий”, которое исследовал ’т Хофт [16] в 1979 г.

Рассмотрим группу G нарушенной глобальной симметрии, которая реализована линейно в некоторой фундаментальной теории, описывающей замкнутые безмассовые фермионы. Примером может служить глобальная киральная симметрия $SU(3) \times SU(3)$ квантовой хромодинамики с тремя безмассовыми кварками. Введем в этой теории

фиктивные поля так, чтобы глобальная симметрия G стала локальной, если не учитывать возможные аномалии. В общем случае такая симметрия *будет* нарушена аномалиями, поскольку в реальном мире симметрия исключительно глобальная, и не существует причин, почему глобальная симметрия должна допускать расширение на не содержащие аномалий локальные симметрии. Однако эти аномалии можно устранить, если ввести подходящие безмассовые наблюдательные фермионы. Эти модификации не будут существенно менять динамику теории до тех пор, пока введенные таким способом калибровочные константы связи достаточно малы и наблюдательные фермионы обладают только такими слабыми взаимодействиями.

Далее рассмотрим эффективную теорию, которая описывает физику на низких энергиях, где запертые частицы ненаблюдаемы. Единственными степенями свободы в этой теории будут безмассовые частицы: фиктивные калибровочные бозоны, фермионы-наблюдатели и голдстоуновские бозоны, с соответствующими им полями ξ_a , по одному на каждую независимую нарушенную симметрию. Поскольку фундаментальную теорию мы сделали калибровочно-инвариантной и не содержащей аномалий, теми же свойствами должна обладать и эффективная теория. Однако фермионы-наблюдатели производят аномалию, которая раньше устранялась аномалией от запертых безмассовых фермионов фундаментальной теории. Поэтому для того чтобы фермионы-наблюдатели сокращали аномалию, возникающую из-за голдстоуновских бозонов, *фиктивные локальные симметрии эффективной калибровочной теории голдстоуновских бозонов должны иметь аномалию, равную аномалии, производимой запертыми фермионами фундаментальной теории.* То есть эффективное действие калибровочных полей и голдстоуновских бозонов $\Gamma[\xi, A]$ вместо условия (22.6.2) подчиняется условию

$$\mathcal{T}_\beta(x)\Gamma[\xi, A] = G_\beta[x; A], \quad (22.7.1)$$

где $G_\beta[x; A]$ — функция аномалии фундаментальной теории, в которой нет никаких голдстоуновских бозонов, а $\mathcal{T}_\beta$ — генератор калибровочной группы G , действующей теперь и на калибровочные поля, и на поля голдстоуновских бозонов. (Стоящий у $\mathcal{T}_\beta$ индекс β пробегает значения i , помечающие полный набор независимых генераторов $\mathcal{U}_i$ подгруппы H ненарушенной симметрии, и значения a , помечающие набор независимых генераторов $\mathcal{X}_a$ нарушенной симметрии; каждому $\mathcal{X}_a$ соответствует одно поле ξ_a голдстоуновских бозонов.)

Естественно, уравнение (22.7.1) можно использовать также и для изучения взаимодействий голдстоуновских бозонов с реальными калибровочными полями со слабой связью. Например, если фундаментальная теория включает связанные с кварками электрослабые калибровочные бозоны, то мы можем отождествить некоторые из “фиктивных” калибровочных полей с электрослабыми калибровочными

ми полями. В таких случаях некоторые из фермионов-“наблюдателей” также должны быть реальными, для того чтобы устранять аномалии, которые производят петли запертых частиц в симметриях реальных слабосвязанных калибровочных полей. (Так, например, лептоны уничтожают создаваемые кварками электрослабые аномалии.)

Теперь давайте вернемся к соотношению (22.7.1). Чтобы вычислить генератор калибровочной симметрии $\mathcal{T}_\beta(x)$, заметим, что при произвольном групповом преобразовании

$$g = \exp\left(-i \int \zeta_\beta(x) \mathcal{T}_\beta(x) d^4x\right)$$

поля $\xi_a(x)$ голдстоуновских бозонов переходят в поля $\xi'_a(x)$, которые задаются соотношением (19.6.18). Калибровочные поля $A_\beta^\mu(x)$ переходят в калибровочно-преобразованные поля $A'^\mu_\beta(x)$ так, чтобы

$$\mathcal{T}_\beta(x) = \mathcal{T}_\beta^A(x) + \mathcal{T}_\beta^\xi(x). \quad (22.7.2)$$

Стоящий здесь генератор $\mathcal{T}_\beta^A(x)$ действует на калибровочные поля и задается соотношением (22.6.1):

$$-i\mathcal{T}_\beta^A(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\delta A_{\beta\mu}(x)} - C_{\beta\gamma\alpha} A_{\gamma\mu}(x) \frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)}, \quad (22.7.3)$$

где $C_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричные структурные константы группы G . Генератор же $\mathcal{T}_\beta^\xi(x)$ действует на голдстоуновские поля и задается инфинитезимальным пределом соотношения (19.6.7), которое (в случае экспоненциальной параметризации $\gamma(\xi) = \exp(i\xi_a X_a)$) имеет вид¹⁾

$$T_\beta \exp(i\xi_a(x) X_a) = -\mathcal{T}_\beta^\xi(x) \exp(i\xi_a(x) X_a) + \exp(i\xi_a(x) X_a) \theta_{\beta i}(x) Y_i, \quad (22.7.4)$$

где T_β — матрицы, представляющие генераторы группы G в каком-либо представлении; они разделены на два набора X_a и Y_i , которые соответствуют генераторам нарушенной и не нарушенной симметрий соответственно; $\theta_{\beta i}(x)$ — зависящие от ξ функции, вид которых в данном случае не важен.

Относительно функций аномалии $G[x; A]$ мы предположим только, что они удовлетворяют условиям непротиворечивости (22.6.6):

$$\mathcal{T}_\alpha(x) G_\beta[y; A] - \mathcal{T}_\beta(y) G_\alpha[x; A] = iC_{\alpha\beta\gamma} \delta^4(x - y) G_\gamma[y; A], \quad (22.7.5)$$

¹⁾ Знаки минус перед первым слагаемым в правой части соотношения (22.7.4) и множитель $-i$ в левой части (22.7.3) появляются из-за того, что именно $\exp[-i \int \Lambda_\beta(x) \mathcal{T}_\beta(x)]$ индуцирует калибровочные преобразования (15.1.17) с калибровочным параметром Λ_β . Это можно увидеть, если потребовать, чтобы $\mathcal{T}_\beta(x)$ удовлетворял коммутационным соотношениям (22.6.5).

и что в ненарушенных симметриях аномалии отсутствуют:

$$G_i[x; A] = 0. \quad (22.7.6)$$

Как упоминалось в предыдущем параграфе, ввести локальный функционал в действие так, чтобы удовлетворилось уравнение (22.7.6), можно всегда, когда след $\text{Tr}[T_i\{T_j, T_k\}]$ генераторов ненарушенной симметрии равен нулю (как это имеет место для некиральных генераторов группы $SU(3) \times SU(3)$).

Допустив (22.7.5) и (22.7.6), можно всегда найти решение аномальных тождеств Славнова–Тейлора (22.7.1):

$$\Gamma[\xi, A] = -i \int_0^1 dt \int \xi_b(y) G_b[y; A_{-t\xi}] d^4y, \quad (22.7.7)$$

где $[A_{-t\xi}(x)]_\mu$ — результат действия на $A_\mu \equiv T_\beta A_{\mu\beta}$ калибровочным преобразованием (15.1.17) с $\Lambda_a = -t\xi_a$ и $\Lambda_i = 0$:

$$[A_{-t\xi}(x)]_\mu = \exp(-itX_a\xi_a(x))A_\mu(x)\exp(itX_a\xi_a(x)) - \\ - i[\partial_\mu \exp(-itX_a\xi_a(x))]\exp(itX_a\xi_a(x)). \quad (22.7.8)$$

В отличие от случая, когда ненарушенная симметрия имеет аномалии, соотношения (22.7.7) и (22.7.8) определяют *локальный* (хотя и довольно сложный) функционал от калибровочных полей и полей голдстоуновских бозонов. Любое другое решение уравнения (22.7.1) будет отличаться от приведенного на не содержащий аномалий функционал.

Рассмотрим план доказательства [24] того, что действие (22.7.7) удовлетворяет уравнению (22.7.1). Вместо того чтобы работать с локальным генератором $\mathcal{T}_\beta(x)$, удобно ввести произвольную функцию $\eta_\beta(x)$ и определить

$$\mathcal{T}[\eta] = \int d^4x \eta_\beta(x) \mathcal{T}_\beta(x). \quad (22.7.9)$$

Чтобы вычислить $\mathcal{T}[\eta]\xi_\beta(x)$, введем матрицу

$$\eta_{-t\xi}(x) \equiv \exp(-iX_a\xi_a(x)t)[\eta(x) + \mathcal{T}[\eta]]\exp(iX_a\xi_a(x)t) \equiv \\ \equiv [\eta_{-t\xi}(x)]_\beta T_\beta, \quad (22.7.10)$$

где $\eta(x) \equiv \eta_\beta(x)T_\beta$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta_{-t\xi}(x) = -i[X_a\xi_a(x), \eta_{-t\xi}(x)] + i(\mathcal{T}[\eta]\xi_a(x))X_a,$$

и поэтому

$$\mathcal{T}[\eta]\xi_b(x) = -i \frac{\partial}{\partial t} [\eta_{-t\xi}(x)]_b + iC_{a\gamma b}\xi_a(x)[\eta_{-t\xi}(x)]_\gamma. \quad (22.7.11)$$

Для вычисления $\mathcal{T}[\eta]G_\beta[y, A]$ применим к калибровочному полю

функционал $\mathcal{T}[\eta]$. В результате прямого вычисления получим, что

$$\mathcal{T}[\eta][A_{-t\xi}(x)]_\mu = (\mathcal{T}^A[\eta_{-t\xi}]A_\mu(x))_{A \rightarrow A_{-t\xi}}. \quad (22.7.12)$$

Используя условие непротиворечивости (22.7.5), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\eta]G_b[y; A_{-t\xi}] &= \int d^4x [\eta_{-t\xi}(x)]_\gamma (\mathcal{T}_\gamma^A(x)G_b[y; A])_{A \rightarrow A_{-t\xi}} = \\ &= \int d^4x [\eta_{-t\xi}(x)]_a (\mathcal{T}_b^A(y)G_a[x; A])_{A \rightarrow A_{-t\xi}} + \\ &\quad + iC_{\gamma ba}[\eta_{-t\xi}(y)]_\gamma G_a[y; A_{-t\xi}]. \end{aligned} \quad (22.7.13)$$

Структурные константы из (22.7.11) и (22.7.13) взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] &= \int_0^1 dt \int d^4y \left\{ - \left[\frac{\partial}{\partial t} [\eta_{-t\xi}(y)]_b \right] G_b[y; A_{-t\xi}] - \right. \\ &\quad \left. - i[\eta_{-t\xi}(y)]_a (\mathcal{T}[\xi]G_a[y; A])_{A \rightarrow A_{-t\xi}} \right\}. \end{aligned} \quad (22.7.14)$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\frac{\partial}{\partial t} [A_{-t\xi}(x)]_\mu = i(\mathcal{T}^A(\xi)A_\mu(x))_{A \rightarrow A_{-t\xi}}, \quad (22.7.15)$$

поэтому слагаемые в подынтегральном выражении (22.7.14) в сумме составляют в производную по t :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] &= - \int_0^1 dt \int d^4y \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [\eta_{-t\xi}(y)]_b G_b[y; A_{-t\xi}] \right\} = \\ &= - \int d^4y \left[[\eta_{-t\xi}(y)]_b G_b[y; A_{-t\xi}] \right]_{t=0}^{t=1}. \end{aligned} \quad (22.7.16)$$

При $t = 1$ мы имеем

$$\eta_{-\xi}(x) = \exp(-iX_a\xi_a(x))[\eta(x) + \mathcal{T}[\eta]] \exp(iX_a\xi_a(x)).$$

Как видно из (22.7.4), это выражение представляет собой линейную комбинацию генераторов подгруппы H ненарушенной симметрии. Поэтому коэффициент $[\eta_{-\xi}(y)]_b$ перед любым генератором X_b нарушенной симметрии равен нулю. Кроме того, из соотношений (22.7.10) и (22.7.8) непосредственно видно, что при $t = 0$ имеет место $\eta_{-t\xi}(y) = \eta(y)$ и $[A_{-t\xi}(y)]_\mu = A_\mu(y)$. Таким образом, выражение (22.7.16) переходит в выражение

$$\mathcal{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] = \int d^4y [\eta_0(y)]_b G_b[y; A_0] = \int d^4y \eta_b(y) G_b[y; A], \quad (22.7.17)$$

которое вместе с условием (22.7.6) приводит к искомому результату (22.7.1). Что и требовалось доказать.

Решение уравнения (22.7.1) вида (22.7.7) не единственно. Однако *только оно* равно нулю при $\xi = 0$. Чтобы увидеть это, заметим, что

$$\exp\left[-i \int \eta_\beta(x) \mathcal{T}_\beta(x) d^4x\right] \Gamma[\xi, A] = \Gamma[\xi', A'], \quad (22.7.18)$$

где штрихи означают калибровочное преобразование с параметром η_β . Экспоненту удобно представить в виде

$$\exp(z) = 1 + \int_0^1 dt \exp(zt) z.$$

В результате уравнения (22.7.1) и (22.7.18) дают

$$\begin{aligned} \Gamma[\xi, A] - i \int_0^1 dt \exp\left[-it \int \eta_\beta(x) \mathcal{T}_\beta^A(x) d^4x\right] \int \eta_b(y) G_b[y; A] d^4y = \\ = \Gamma[\xi', A']. \end{aligned} \quad (22.7.19)$$

В частности, если взять $\eta_a = -\xi_a$ и $\eta_i = 0$, то $\xi'_a = 0$. По предположению, в этом случае правая часть уравнения (22.7.19) равна нулю, и следовательно имеет место формула

$$\Gamma[\xi, A] = -i \int_0^1 dt \exp\left[it \int \xi_a(x) \mathcal{T}_a^A(x) d^4x\right] \int \xi_b(y) G_b[y; A] d^4y. \quad (22.7.20)$$

Поскольку здесь функциональный оператор $\exp[it \int \xi_a(x) \mathcal{T}_a^A d^4x]$ в точности воспроизводит калибровочное преобразование (15.1.17) с параметром $\Lambda_\beta(x) = -t\xi_a(x)$, то выражение (22.7.20) можно переписать в виде (22.7.7).

Уравнение (22.7.7) можно применить для исследования электро-слабых взаимодействий октета псевдоскалярных голдстоуновских бозонов. Наряду с этим оно играет большую роль и при рассмотрении взаимодействий самих голдстоуновских бозонов в отсутствие реальных калибровочных полей. В случае $A = 0$ выражение (22.7.8) приобретает вид, соответствующий полю “чистой калибровки”:

$$\begin{aligned} [A_{-t\xi}(x)]_\mu = -i[\partial_\mu \exp(-itX_A\xi_a(x))] \exp(itX_A\xi_a(x)) = \\ = -i[\partial_\mu V(t\xi(x))] V^{-1}(t\xi(x)), \end{aligned} \quad (22.7.21)$$

где

$$V(t\xi(x)) \equiv \exp(-itX_A\xi_a(x)). \quad (22.7.22)$$

При $A_\alpha^\mu(x) = 0$ уравнение (22.7.1) дает

$$\mathcal{T}_\beta(x) \Gamma[\xi, 0] = 0, \quad (22.7.23)$$

таким образом, при использовании в формуле (22.7.7) выражения (22.7.21) получается G -инвариантный локальный функционал от полей $\xi_a(x)$ голдстоуновских бозонов. При этом мы увидим, что, вообще

говоря, он не является интегралом по пространству–времени от G -инвариантной функции, зависящей от полей $\xi_a(x)$ и их производных.

Проще всего продемонстрировать указанное обстоятельство в случае полностью нарушенной симметрии. Тогда условие (22.7.6) не имеет смысла и для аномалии можно использовать симметричный вид (22.3.28):

$$G_a[x; A] = \frac{i}{24\pi^2} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ T_a \left[\partial_\kappa A_\nu(x) \partial_\lambda A_\rho(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} i \partial_\kappa A_\nu(x) A_\lambda(x) A_\rho(x) + \frac{1}{2} i A_\kappa(x) \partial_\nu A_\lambda(x) A_\rho(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} i A_\kappa(x) A_\nu \partial_\lambda A_\rho(x) \right] \right\}, \quad (22.7.24)$$

где T_a — особое представление группового генератора, образованное левыми фермионами (включая антифермионы, если различие существенно). Тогда, подставляя выражение (22.7.21) в уравнение (22.7.24), мы видим, что при свертывании следа с $\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}$ выживают только те слагаемые, которые пропорциональны

$$\text{Tr} \{ T_a (\partial_\kappa V) V^{-1} (\partial_\nu V) V^{-1} (\partial_\lambda V) V^{-1} (\partial_\rho V) V^{-1} \}.$$

Коэффициенты перед ними равны соответственно -1 , $+1/2$, $-1/2$ и $+1/2$. В результате выражение (22.7.7) принимает вид

$$\Gamma[\xi, 0] = -\frac{1}{48\pi^2} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \int d^4 y \xi_a(y) \int_0^1 dt \text{Tr} \{ T_a [\partial_\kappa V(t\xi(y))] \times \\ \times V^{-1}(t\xi(y)) [\partial_\nu V(t\xi(y))] V^{-1}(t\xi(y)) [\partial_\lambda V(t\xi(y))] \times \\ \times V^{-1}(t\xi(y)) [\partial_\rho V(t\xi(y))] V^{-1}(t\xi(y)) \}. \quad (22.7.25)$$

Как и указывалось ранее, оно не является интегралом от инвариантной функции, зависящей от полей и их производных. Например, для малых полей голдстоуновских бозонов выражение (22.7.25) переходит в

$$\Gamma[\xi, 0] = -\frac{1}{240\pi^2} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \text{Tr} \{ T_a T_b T_c T_d T_e \} \int d^4 y \xi_a \partial_\kappa \xi_b \partial_\nu \xi_c \partial_\lambda \xi_d \partial_\rho \xi_e + \\ + O(\xi^6). \quad (22.7.26)$$

Для любой функции от ковариантных производных голдстоуновских полей член самого низкого порядка по полям должен быть равен произведению частных производных этих полей, и, следовательно, не может иметь вид (22.7.26).

В качестве примера рассмотрим имеющий большое практическое значение случай киральной симметрии $SU(3) \times SU(3)$ квантовой хромодинамики с безмассовыми u , d и s кварками, спонтанно нарушенной до диагональной $SU(3)$ -подгруппы Гелл-Манна и Неемана. Для того чтобы воспользоваться результатами, полученными в этом параграфе, мы *обязаны* обозначить внутренние импульсы в интеграле по

фермионной петле так, чтобы векторные токи диагональной $SU(3)$ подгруппы аномалий не содержали. Тогда аномалия примет бардинскую форму (22.3.34):

$$G_a[V, A] = \frac{in}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left\{ t_a \left[V_{\mu\nu} V_{\rho\sigma} + \frac{1}{3} A_{\mu\nu} A_{\rho\sigma} - \frac{32}{3} A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{8}{3} i(A_\mu A_\nu V_{\rho\sigma} + A_\mu V_{\rho\sigma} A_\nu + V_{\rho\sigma} A_\mu A_\nu) \right] \right\}, \quad (22.7.27)$$

где величины V_μ , A_μ , $V_{\mu\nu}$ и $A_{\mu\nu}$ определяются выражениями (22.3.35)–(22.3.37); t_a равняется $1/2$, умноженной на матрицу Гелл-Манна, задаваемую формулой (19.7.2); n — число кварковых видов (“цветов”) для каждого аромата. (Мы используем строчную букву t для обозначения матриц генераторов, поскольку след подразумевает суммирование только по левым кваркам, а не суммирование по левым антикваркам.) В случае только калибровочных полей (22.7.21) напряженности $V_{\mu\nu}$ и $A_{\mu\nu}$ равны нулю. В результате, используя выражение (22.7.27) в формуле (22.7.7), получаем эффективное аномальное действие для голдстоуновских бозонов:

$$\Gamma[\xi, 0] = -\frac{2n}{3\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int_0^1 dt \int d^4x \text{Tr} \{ \xi_a t_a [A_{-t\xi}]_\mu [A_{-t\xi}]_\nu [A_{-t\xi}]_\rho [A_{-t\xi}]_\sigma \}, \quad (22.7.28)$$

где теперь “ A ” обозначает не векторное, а аксиально-векторное калибровочное поле. Для нахождения $[A_{-t\xi}]_\mu$ воспользуемся выражением (22.7.21), которое в данном случае имеет вид

$$[V_{-i\xi}(x)]_\mu + \gamma_5 [A_{-t\xi}(x)]_\mu = -[\partial_\mu \exp(-it\gamma_5 t_a \xi_a(x))] \exp(it\gamma_5 t_a \xi_a(x)). \quad (22.7.29)$$

Умножая его на сначала на $(1 + \gamma_5)/2$, а затем на $(1 - \gamma_5)/2$ и вычитая полученные результаты один из другого, получаем аксиально-векторное слагаемое

$$[A_{-t\xi}(x)]_\mu = \\ = -\frac{1}{2} i[\partial_\mu \exp(-it\xi_a t_a)] \exp(it\xi_a t_a) + \frac{1}{2} i[\partial_\mu \exp(it\xi_a t_a)] \exp(-it\xi_a t_a) = \\ = \frac{1}{2} i \exp(it\xi_a t_a) U^{-1}(t\xi(x)) [\partial_\mu U(t\xi(x))] \exp(-it\xi_a t_a), \quad (22.7.30)$$

где

$$U(t\xi) \equiv \exp(2it_a \xi_a t). \quad (22.7.31)$$

Подставляя это выражение в формулу (22.7.28), получаем эффективное аномальное действие

$$\Gamma[\xi, 0] = -\frac{n}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int_0^1 dt \int d^4x \text{Tr} \{ \xi_a t_a U^{-1}(t\xi(x)) [\partial_\mu U(t\xi(x))] \times \\ \times U^{-1}(t\xi(x)) [\partial_\nu U(t\xi(x))] U^{-1}(t\xi(x)) [\partial_\rho U(t\xi(x))] U^{-1}(t\xi(x)) \times \\ \times [\partial_\sigma U(t\xi(x))] \}. \quad (22.7.32)$$

Как заметил Виттен [25], это выражение можно записать в удобной пятимерной форме. Мы возьмем t в качестве пятой координаты и определим $\xi_a(x, t) \equiv t\xi_a(x)$. Тогда выражение (22.7.32) примет вид

$$\Gamma[\xi, 0] = -\frac{in}{240\pi^2} \epsilon^{ijklm} \int d^5 z \operatorname{Tr}\{U^{-1}(\xi(z))[\partial_i U(\xi(z))] \times \\ \times U^{-1}(\xi(z))[\partial_j U(\xi(z))]U^{-1}(\xi(z))[\partial_k U(\xi(z))]U^{-1}(\xi(z)) \times \\ \times [\partial_l U(\xi(z))]U^{-1}(\xi(z))[\partial_m U(\xi(z))]\}, \quad (22.7.33)$$

где i, j и т. д. пробегает значения 1, 2, 3, 0 и 5; $z^i = x^i$ для $i = 1, 2, 3, 0$, а $z^5 = t$. Интегрирование ведется по области $0 \leq z^5 \leq 1$. (Дополнительный множитель $1/5$ введен для того, чтобы учесть, что любой из пяти индексов i, j, k, l и m может быть равен 5.) Когда $z^5 = 0$, а значения остальных компонент z^μ (из всех возможных z^i) произвольны, поле $\xi_a(z)$ равно нулю. Поэтому мы можем отождествить эти значения z^i с одной точкой и рассматривать область интегрирования в выражении (22.7.33) как пятимерный шар с четырехмерной границей $z^5 = 1$, взятой в виде обычного пространства–времени. Таким образом, выражение (22.7.3) представляет собой специальный случай действия “Весса–Зумино–Виттена”, задаваемого выражениями (19.8.1) и (19.8.3). Оно также было пропорционально целому числу n ; различие состоит только в том, что теперь n отождествляется с количеством цветов. В § 19.8 мы видели, что интеграл (19.8.3) зависит только от значений $\xi_a(z)$ на пространственно-временной границе пятимерного шара. Следовательно, при получении соотношения (22.7.33) мы показали, что формула (19.8.2) применима для любого продолжения $\xi_a(x)$ внутрь пятимерного шара, а не только для $\xi_a(x, t) = t\xi(x)$.

* * *

Рассмотрим более общий случай. Пусть группа G нарушается спонтанно до подгруппы H , которая аномалий не содержит, т. е. для нее константа D , определенная выражением (22.3.12), равна нулю для любых трех ее генераторов. Чу, Хо и Зумино [26] показали, что мы можем так ввести в действие локальный функционал $B[A]$, что токи подгруппы H не будут содержать аномалий даже при учете калибровочных полей нарушенных симметрий. Указанный функционал имеет вид

$$B[A] = \frac{1}{48\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4 x \operatorname{Tr}\{[A_h^\mu, A^\nu](F^{\rho\sigma} + F_h^{\rho\sigma}) + A^\mu A_h^\nu A_h^\rho A_h^\sigma - \\ - A_h^\mu A^\nu A^\rho A^\sigma + \frac{1}{2} A_h^\mu A^\nu A_h^\rho A^\sigma\}, \quad (22.7.34)$$

где, как и прежде, $A^\mu \equiv T_\alpha A_\alpha^\mu$ и $F^{\mu\nu} \equiv T_\alpha F_\alpha^{\mu\nu}$, в то время как $A_h^\mu \equiv T_i A_i^\mu$ и $F_h^{\mu\nu} \equiv T_i F_i^{\mu\nu}$ — члены в A^μ и $F^{\mu\nu}$, соответствующие алгебре подгруппы H ненарушенной симметрии. Тогда полная аномалия

равна

$$G'_\beta[x; A] = G_\beta[x; A] + \mathcal{T}_\beta(x)B[A] \quad (22.7.35)$$

(где $G_\beta[x; A]$ — симметризованная аномалия (22.3.28)). Она удовлетворяет требуемому условию

$$G'_i[x; A] = 0. \quad (22.7.36)$$

Аномальную часть эффективного действия для голдстоуновских бозонов и калибровочных полей можно получить, если использовать в формуле (22.7.7) вместо G_β выражение (22.7.35). Следуя этому способу, Чу и др. [26] нашли, что эффективное аномальное действие равно

$$\Gamma'[\xi, A] = \Gamma[\xi, A] - B[A_{-\xi}] + B[A], \quad (22.7.37)$$

где $\Gamma[\xi; A]$ — полученное ранее эффективное действие (22.7.7), а $A_{-\xi}(x)$ получается, если в выражении (22.7.8) положить $t = 1$. В частности, когда калибровочные поля равны нулю, $A_{-\xi}$ — поле чистой калибровки:

$$\begin{aligned} [A_{-\xi}(x)]_\mu &= -i[\partial_\mu V(\xi(x))]V^{-1}(\xi(x)), \\ V(\xi(x)) &= \exp(-iX_a\xi_a(x)), \end{aligned}$$

поэтому в данном случае действие для голдстоуновских бозонов имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma'[\xi, 0] &= \Gamma[\xi, 0] - \frac{1}{48\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x \operatorname{Tr} \{ A_{-\xi}^\mu A_{-\xi}^\nu A_{-\xi}^\rho A_{-\xi}^\sigma - \\ &- A_{-\xi}^\mu A_{-\xi}^\nu A_{-\xi}^\rho A_{-\xi}^\sigma + \frac{1}{2} A_{-\xi}^\mu A_{-\xi}^\nu A_{-\xi}^\rho A_{-\xi}^\sigma \}. \end{aligned} \quad (22.7.38)$$

Полученный результат не является единственным в своем роде; в частности, в теориях типа квантовой хромодинамики, в которых четность сохраняется, мы можем ввести в действие дополнительный локальный член, для того чтобы устранить из выражения (22.7.38) любые слагаемые, препятствующие сохранению четности.

Задачи

1. Вычислить скорость распада $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$ в главном порядке по m_s . Считать, что $m_u = m_d = 0$.

2. Рассмотреть киральную $SU(3)$ симметрию, по отношению к которой описываемые теорией с сохраняющимся числом фермионов левые части полей спина $1/2$ образуют N определяющих представлений $\mathbf{3}$ группы $SU(3)$, а все правые части — синглеты. Вычислить аномалию, возникающую в $SU(3)$ -симметрии. Какой будет аномалия, если мы введем M фермионных полей, левые части которых — синглеты, а правые преобразуются как бесследовые симметричные $SU(3)$ -тензоры второго ранга?

3. Найти решение условий согласования аномалий 'т Хофта (22.5.5) и (22.5.6) для случая $n = 4$ ароматов. В случае $n = 2$ ароматов, найти другое, отличное от описанного выше, решение.

4. Получить уравнение Зинн-Жустена из основного квантового уравнения, не предполагая $\Delta S = 0$.

Литература

1. *Steinberger J.* // Phys. Rev. **76**, 1180 (1949); См. также: *Finkelstein R.J.* // Phys. Rev. **72**, 415 (1949); *Fukuda H., Miyamoto Y.* // Prog. Theor. Phys. **4**, 347 (1949); *Schwinger J.* // Phys. Rev. **82**, 664 (1951); *Rosenberg L.* // Phys. Rev. **129**, 2786 (1963). Грубую оценку для этого распада получили *Sakata S., Tanikawa Y.* // Phys. Rev. **57**, 548 (1940) еще до экспериментального открытия π^0 мезона.
2. *Sutherland D.G.* // Nucl. Phys. **B2**, 433 (1967).
3. *Veltman M.* // Proc. Roy. Soc. **A301**, 107 (1967).
4. *Bell J.S., Jackiw R.* // Nuovo Cimento **60A**, 47 (1969). См. также: *Jackiw R.* Lectures on Current Algebra and its Applications (Princeton Press, Princeton, 1972).
5. *Adler S.* // Phys. Rev. **177**, 2426 (1969). См. также: *Adler S.* Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory — 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, под редакцией S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton (MIT Press, Cambridge, MA, 1970): Т. I.
6. *Fujikawa K.* // Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979).
- 6a. *Atiyah M.F., Singer I.M.* // Proc. Nat. Acad. Sci. **81**, 2597 (1984).
7. *Alvarez-Gaumé L., Ginsparg P.* // Ann. Phys. **161**, 423 (1985).
- 7a. Более детальную аргументацию можно найти в *Frishman Y., Schwimmer A., Banks T., Yankielowicz S.* // Nucl. Phys. **B177**, 157 (1981).
8. *Bardeen W.A.* // Phys. Rev. **184**, 1848 (1969).
- 8a. См., например: *Zumino B., Wu Y.-S., Zee A.* // Nucl. Phys. **B239**, 477 (1984).
9. *Adler S.L., Bardeen W.A.* // Phys. Rev. **182**, 1517 (1969).
10. См., например, *Georgi H.* // Lie Algebras in Particle Physics (Benjamin-Cummings, Reading, MA, 1982). С. 15, 198. Оригинальная ссылка — *Schur I.* // Sitz. Preuss. Akad. С. 406 (1905).
- 10a. *Atiyah M.F., Singer I.M.*, Ссылка 6a; *Zumino B.* Relativity, Groups, and Topology II, под редакцией B.S. De Witt, R. Stora (North-Holland, Amsterdam, 1984); *Alvarez-Gaumé L., Ginsparg P.*,

- ссылка 7; *Bardeen W., Zumino B.* // Nucl. Phys. **B244**, 421 (1984); *Stora R.* Progress in Gauge Field Theory, под редакцией G. 't Hooft et al. (Plenum, N.Y., 1984): 543; *Alvarez O., Singer I., Zumino B.* // Comm. Math. Phys. **96**, 409 (1984); *Alvarez-Gaumé L., Ginsparg P.* // Nucl. Phys. **B262**, 439 (1985); *Mañes J., Stora R., Zumino B.* // Commun. Math. Phys. **102**, 157 (1985); *Zumino B.* // Nucl. Phys. **B253**, 477 (1985); *Bismut J.M., Freed D.S.* // Commun. Math. Phys. **106**, 159 (1986); **107**, 103 (1986); *Freed D.S.* // Commun. Math. Phys. **107**, 483 (1986).
- 10b. *Witten E.* // Phys. Lett. **117 B**, 324 (1982).
11. *Gross D.J., Jackiw R.* // Phys. Rev. **96**, 477 (1969).
12. *Georgi H., Glashow S.L.* // Phys. Rev. **D6**, 429 (1972).
13. *Mehta M.L.* // J. Math. Phys. **7**, 1824 (1966); *Mehta M.L., Srivastava P.K.* // J. Math. Phys. **7**, 1833 (1966).
- 13а. Факт сокращения аномалий в четырехкварковом варианте стандартной электрослабой теории показали *Bouchiat C., Iliopoulos J., Meyer Ph.* // Phys. Lett. **38B**, 519 (1972); *Weinberg S.* Fundamental Interactions in Physics and Astrophysics, под редакцией G. Iverson et al. (Plenum Press, N.Y., 1973). С. 157.
14. *Georgi H.* Particles and Fields — 1974, под редакцией C. Carlson (Amer. Inst. of Physics, N.Y., 1975).
15. *Delbourgo R., Salam A.* // Phys. Lett. **40B**, 381 (1972); *Eguchi T., Freund P.* // Phys. Rev. Lett. **37**, 1251 (1976). См. также: *Nielsen N.K., Grisaru M.T., Romer R., van Nieuwenhuizen P.* // Nucl. Phys. **B140**, 477 (1978); *Perry M.J.* // Nucl. Phys. **B143**, 114 (1978); *Hawking S.W., Pope C.* // Nucl. Phys. **B146**, 381 (1978); *Christensen S.M., Duff M.J.* // Phys. Lett. **76B**, 571 (1978); *Critchley R.* // Phys. Lett. **78B**, 410 (1978); *Hanson A.J., Romer H.* // Phys. Lett. **80B**, 58 (1978). Общий обзор можно найти в работе *Eguchi T., Gilkey P.B., Hanson A.J.* Phys. Rep. **66**, 213 (1980). Аномалии в дивергенции тензора энергии-импульса существуют также и в $4n + 1$ измерениях; см.: *Alvarez-Gaumé L., Witten E.* // Nucl. Phys. **B234**, 269 (1984).
16. *'t Hooft G.* Лекции, прочитанные в Cargèse Summer Institute, 1979, Recent Developments in Gauge Theories, под редакцией G. 't Hooft et al. (Plenum, N.Y., 1980), переизданы в Dynamical Gauge Symmetry Breaking, под редакцией E. Farhi, R. Jackiw (World Scientific, Singapore, 1982), и в G. 't Hooft, Under the Spell of the Gauge Principle (World Scientific, Singapore, 1994). См. также: *Dimopoulos S., Raby S., Susskind L.* // Nucl. Phys. **B173**, 208 (1980); *Coleman S., Witten E.* // Phys. Rev. Lett. **45**, 1000 (1980); *Frishman Y., Schwimmer A., Banks T., Yankielowicz S.* // Nucl. Phys. **B177**, 157 (1981); *Zee A.* // Univ. of Pennsylvania report, 1980

- (неопубликовано); *Barbieri R., Maiani L., Petronzio R.* // *Phys. Lett.* **96B**, 63 (1980); *Farrar G.* // *Phys. Lett.* **96B**, 273 (1980); *Chanda R., Roy P.* // *Phys. Lett.* **99B**, 453 (1981).
- 16a. *Weinberg S., Witten E.* // *Phys. Lett.* **96B**, 59 (1980).
17. *Preskill J., Weinberg S.* // *Phys. Rev.* **D24**, 1059 (1981).
18. *Wess J., Zumino B.* // *Phys. Lett.* **37B**, 95 (1971)
- 18a. *Stora R.* Progress in Gauge Field Theory, под редакцией G. 't Hooft et al. (Plenum, N.Y., 1984): 543; *Zumino B.* Relativity, Groups and Topology II, под редакцией B.S. De Witt, R. Stora (Elsevier, Amsterdam, 1984): 1293; *Mañes J., Stora R., Zumino B.* // *Commun. Math. Phys.* **102**, 157 (1985).
- 18b. *Faddeev L.D.* // *Phys. Lett.* **145B**, 81 (1984); *Zumino B.* // *Nucl. Phys.* **B253**, 477 (1985).
- 18c. *Schwinger J.* // *Phys. Rev. Lett.* **3**, 296 (1959).
19. *Dixon J.A.*, неопубликованные препринты (1976–9); *Commun. Math. Phys.* **139**, 495 (1991); *Brandt F., Dragon N., Kreuzer M.* // *Nucl. Phys.* **B332**, 224 (1990); *Dubois-Violette M., Henneaux M., Talon M., Viallet C.M.* // *Phys. Lett.* **B289**, 361 (1992); *Dubois-Violette M., Talon M., Viallet C.M.* // *Phys. Lett.* **B158**, 231 (1985); *Commun. Math. Phys.* **102**, 105 (1985); *Mañes J., Zumino B.* Supersymmetry and its Applications: Superstrings, Anomalies, and Supergravity, под редакцией G.W. Gibbons, S.W. Hawing, P.K. Townsend (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).
- 19a. См., например, *Georgi H.*, ссылка 10: Уравнение (XXV11.9).
20. *Stora R.* New Directions in Quantum Field Theory and Statical Mechanics — Lectures at the 1976 Cargese Summer School, под редакцией M. Lévy, P. Mitter (Plenum, N.Y., 1977).
21. *Dixon J.A.*, ссылка 19.
22. *Barnich G., Henneaux M.* // *Phys. Rev.Lett.* **72**, 1588 (1994); *Barnich G., Brandt F., Henneaux M.* // *Commun. Math. Phys.* **174**, 57, 93 (1995).
23. *Troost W., van Nieuwenhuizen P., van Proeyen A.* // *Nucl. Phys.* **B333**, 727 (1990).
24. Я узнал об этом доказательстве от B. Zumino, частное сообщение.
25. *Witten E.* // *Nucl. Phys.* **B223**, 422 (1983).
26. *Chu C.-S., Ho P.-M., Zumino B.* // *Nucl. Phys.* **B475**, 484 (1996).

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПОЛЕВЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

До сих пор мы рассматривали в основном применения квантовой теории поля, которые могут быть описаны пертурбативно, несмотря на то что в некоторых случаях ряд теории возмущений численно работает не очень хорошо. Напомним, что обычная процедура теории возмущений состоит в том, что мы раскладываем действие около вакуумных значений полей, не зависящих от пространственно-временных точек, оставляя старшие квадратичные члены в экспоненте $\exp(iI)$, а члены высших порядков по полям рассматриваем в качестве поправок.

Оказывается, что многие эффекты не описываются такой процедурой. Так, в середине 1970-х годов было показано, что существуют явления, обусловленные существованием протяженных во времени и пространстве полевых конфигураций, на которых реализуется экстремум действия. Примером таких конфигураций являются инстантоны [1]. Вообще говоря, мы должны учитывать эти конфигурации при вычислении функционального интеграла, суммируя по флуктуациям возле них. (Напомним, что в § 20.7 мы встречались с примером инстантона в немного другом контексте.) В большинстве случаев непертурбативные вклады сильно подавлены. Однако они велики в квантовой хромодинамике, а также вызывают ряд необычных эффектов в стандартной теории электрослабых взаимодействий.

Кроме поправок к процессам с обычными частицами, имеются и другие непертурбативные эффекты. Существуют протяженные полевые конфигурации, которые представляют собой возможные компоненты физических состояний. Например, магнитные монополи [2] и скирмионы [3], сконцентрированные возле точки в трехмерном пространстве, или, что то же самое, возле мировой линии в четырехмерном пространстве, похожи на частицы. Имеются также струноподобные конфигурации [4], напоминающие вихревые линии в сверхпроводниках (см. § 21.6). Они сконцентрированы возле линии в пространстве, т.е. возле мирового листа в пространстве-времени. Еще один пример — доменные стенки [5], разделяющие пространственные области, в которых некоторая дискретная симметрия нарушена по-разному. В отличие от таких конфигураций, инстантоны подобны *событиям*, так как сконцентрированы возле точки в пространстве-времени. Таким образом, инстантоны никогда не представляют собой компоненты настоящих физических состояний.

Некоторые протяженные конфигурации стабильны благодаря граничным условиям. Например, такая ситуация имеет место в задаче

о распаде вакуума [6], рассматриваемой в § 23.8. В других случаях стабильность обеспечивается наличием квантового числа, сохранение которого запрещает распад конфигурации [7].

В данной главе мы в основном будем рассматривать протяженные конфигурации полей, которые стабильны благодаря своей нетривиальной топологии. При описании всех таких конфигураций применяются одни и те же методы гомотопической топологии. Поэтому вначале мы опишем общие черты топологически стабильных конфигураций в пространстве или пространстве–времени произвольной размерности d , а затем перейдем к их специфическим свойствам.

§ 23.1. Применение топологических методов

Оказывается, что во многих ситуациях на множестве возможных полевых конфигураций можно задать нетривиальную топологию, потребовав конечности некоторого функционала S на различных конфигурациях. В классической теории в качестве S можно взять потенциальную энергию (или, в некоторых случаях, потенциальную энергию на единицу площади или единицу длины); никакая конечная флуктуация не смогла бы породить конфигурацию, для которой она стала бесконечной. В классической статистической механике функционалом S является гамильтониан, а в квантовой теории поля, формулируемой в евклидовом пространстве–времени, S пропорционален евклидову действию. (Определение и некоторые приложения евклидова интеграла по траекториям смотрите в приложении А к этой главе.) Напомним, что при построении теории возмущений мы начинаем с некоторой полевой конфигурации, на которой S принимает конечное значение, а затем интегрируем по флуктуациям, которые оставляют S конечным.

На множестве полевых конфигураций можно задать соотношение эквивалентности, т. е. соотношение, удовлетворяющее свойствам рефлексивности, симметричности и транзитивности. Будем считать две полевые конфигурации топологически эквивалентными, если одна из них может быть непрерывно деформирована в другую таким образом, что на каждой промежуточной конфигурации S конечно. Тогда множество всех полевых конфигураций распадается на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из конфигураций с одинаковой топологией. Заметим, что если S — потенциальная энергия (для независящих от времени полей она, очевидно, совпадает с гамильтонианом) в d -мерном пространстве, то топологически различные конфигурации отделены друг от друга бесконечно высоким энергетическим барьером. В частности, протяженные полевые конфигурации, неэквивалентные обычной пространственно-однород-

ной вакуумной конфигурации, нельзя непрерывно трансформировать в пространственно-однородную конфигурацию.

Топологическая классификация оказывается особенно полезной для нахождения локального минимума функционала S . В самом деле, предположим, что среди всех конфигураций данного топологического типа мы нашли конфигурацию, на которой S принимает минимальное значение. Тогда на этой конфигурации S , рассматриваемый уже как функционал на конфигурациях *любого* топологического типа, имеет, по крайней мере локальный, минимум. (Это очевидно в силу того, что никакая малая вариация полей не может изменить топологический тип конфигурации.) Следовательно, такая конфигурация удовлетворяет уравнениям движения, которые эквивалентны условию стационарности S . Приведенное выше рассуждение полезно для нахождения как стационарной точки гамильтониана, так и конфигураций, вблизи которых можно произвести разложение по полевым переменным в функциональном евклидовом интеграле. В этом случае $S = -I$, где I — евклидово действие, поэтому квадратичный член разложения вблизи стационарной точки имеет правильный знак, когда стационарная точка — локальный минимум S .

Перейдем теперь к рассмотрению нескольких важных примеров [8].

а) Скирмионы. Рассмотрим вещественные голдстоуновские бозонные поля π_a , возникающие при спонтанном нарушении группы непрерывной глобальной симметрии G до ее подгруппы H . Как мы видели в гл. 19, потенциальная энергия такой системы голдстоуновских бозонов в евклидовом пространстве размерности $d > 2$ имеет следующий вид:

$$S[\pi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\pi) \partial_i \pi_a \partial_i \pi_b + \dots \right], \quad (23.1.1)$$

где g_{ab} — положительно определенная матрица, а “+...” обозначает возможные члены высшего порядка по производным полей π . Функционал (23.1.1) можно также рассматривать как действие для системы голдстоуновских бозонов в d -мерном евклидовом *пространстве-времени*, взятое со знаком минус.

Для полевых конфигураций, на которых S принимает конечное значение, производные $\partial_i \pi_a(\mathbf{x})$ должны обращаться на бесконечности в нуль быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-d/2}$ (здесь $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_i x_i}$); поэтому $\pi_a(\mathbf{x}) - \pi_{a\infty} = o(|\mathbf{x}|^{(2-d)/2})$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, где $\pi_{a\infty}$ — предельное значение a -го поля на бесконечности. Поле голдстоуновских бозонов π_a в каждой точке образует однородное пространство G/H , т.е. некоторым преобразованием из группы G можно перевести значение поля в данной точке в любое другое значение из смежного класса G/H . Следовательно, всегда можно сделать такое глобальное преобразование, что предел $\pi_{a\infty}$ будет равен заданному элементу G/H , например $\pi_{a\infty} = 0$. Таким

образом, полевая конфигурация $\pi_a(\mathbf{x})$ задает отображение d -мерного пространства в полевое многообразие G/H , причем вся сфера $r = \infty$ отображается в одну точку.

Очевидно, что d -мерное евклидово пространство, в котором отождествлены все точки $(d-1)$ -мерной сферы, находящейся на бесконечности, топологически эквивалентно d -мерной сфере S_d (т.е. поверхности $(d+1)$ -мерного шара). Таким образом, топологические классы полевых конфигураций, для которых $\pi(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, соответствуют топологически различным отображениям S_d в многообразие G/H полевых переменных; при этом точка сферы, отвечающая бесконечности d -мерного евклидова пространства, отображается в нуль. Множество классов таких топологически различных отображений $S_d \mapsto \mathcal{M}$, переводящих заданную точку из S_d в фиксированную точку из $\mathcal{M}$, называется d -й *гомотопической группой* многообразия $\mathcal{M}$ и обозначается $\pi_d(\mathcal{M})$. Мы подробно обсудим гомотопические группы в следующем параграфе (и объясним, каким образом задается групповая структура); гомотопические группы для различных многообразий перечислены в приложении В к этой главе. Отметим, что в случае, когда $\mathcal{M}$ — линейное пространство (а такая ситуация, несомненно, физически интересна), гомотопическая группа $\pi_d(\mathcal{M})$ тривиальна (т.е. любую полевую конфигурацию $\pi_a(\mathbf{x})$, которая стремится на бесконечности к $\pi_{a\infty}$, можно непрерывным образом деформировать в такую конфигурацию, что $\pi_a(\mathbf{x}) = \pi_{a\infty}$). Однако во многих других физических случаях многообразие $\mathcal{M} = G/H$ голдстоуновских полей имеет нетривиальные гомотопические группы. Например, в ситуациях, имеющих отношение к квантовой хромодинамике, $SU(2) \otimes SU(2)$ нарушается до $SU(2)$ или $SU(3) \otimes SU(3)$ нарушается до $SU(3)$. Тогда многообразие G/H совпадает с $SU(2)$ или $SU(3)$ соответственно, а эти многообразия имеют нетривиальную третью гомотопическую группу π_3 .

Топологически нетривиальные полевые конфигурации в трехмерном пространстве, на которых реализуется локальный минимум потенциальной энергии, принято называть *скирмионами* [3]. Отметим, что барионы в некотором смысле можно рассматривать как скирмионные решения в теории, содержащей только мезоны.

Если функционал (23.1.1) не содержит членов более высокого порядка по производным $\partial_i \pi_a$, то скирмионные решения отсутствуют. В этом случае на каждом данном классе конфигураций S принимает континуум значений, причем S может быть сколь угодно близким к нулю; при $S = 0$ поле π становится сингулярным, поэтому топология не может сделать такие конфигурации устойчивыми. Это утверждение известно под названием теоремы Деррика [9]. Перейдем к доказательству этой теоремы. Отметим, что для любой нетривиальной конфигурации $\pi_a(\mathbf{x})$ конфигурация

$$\pi_a^R(\mathbf{x}) \equiv \pi_a(\mathbf{x}/R)$$

принадлежит к тому же топологическому классу, что и $\pi_a(\mathbf{x})$ (здесь R — произвольное положительное число.) Следовательно, в случае, когда функционал (23.1.1) содержит только квадратичные по производным члены, функционал действия подчиняется скейлинговому соотношению

$$S[\pi^R] = R^{d-2} S[\pi].$$

То есть при $d > 2$ $S(\pi^R)$ представляет собой убывающую функцию R , причем $S(\pi^R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow 0$. Далее, $S[\pi] > 0$ в силу нашего предположения о топологической нетривиальности конфигурации π . Таким образом, значение $S = 0$ достигается при $R = 0$, когда конфигурация $\pi_a^R(\mathbf{x})$ становится сингулярной.

Нетривиальные конфигурации голдстоуновских полей можно сделать стабильными, добавив в функционал (23.1.1) члены высшего порядка по производным полей π . (Напомним, что такие члены должны появиться в действии для любой теории голдстоуновских бозонов.) Например, рассмотрим

$$S[\pi] = T[\pi] + D[\pi],$$

где

$$T[\pi] \equiv \int d^d x \frac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\pi) \partial_i \pi_a \partial_i \pi_b \geq 0,$$

$$D[\pi] \equiv \int d^d x f_{abcd}(\pi) \nabla \pi_a \cdot \nabla \pi_b \nabla \pi_c \cdot \nabla \pi_d \geq 0.$$

Тогда $D[\pi^R] = R^{d-4} D[\pi]$, в то время как $T[\pi^R] = R^{d-2} T[\pi]$, поэтому для $2 < d < 4$ функция $S[\pi^R]$ достигает минимума при некотором конечном значении R . В частности, скирмионные решения существуют в физически интересном случае $d = 3$.

В заключение укажем на серьезную проблему теории скирмионов: вообще говоря, в функционале (23.1.1) имеется бесконечно много членов высшего порядка по $\partial_i \pi_a$; оказывается, что их вклады в действие для физически интересных топологически нетривиальных конфигураций в общем случае имеют один и тот же порядок. Эта особенность чрезвычайно затрудняет вычисления для скирмионных конфигураций.

б) Доменные границы. Рассмотрим теперь теорию, в которой нарушается *дискретная* симметрия. Возможна ситуация, когда возникают домены, причем в разных доменах эта симметрия нарушена по-разному; домены будут разделены границами — областями, в которых вакуумные поля совершают переход от одного минимального значения потенциала до другого. Например, рассмотрим случай доменной границы, находящейся в плоскости $y-z$; предположим, что энергия на единицу площади равна

$$S[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right], \quad (23.1.2)$$

где $\phi(x)$ — вещественное скалярное поле, которое зависит только от координаты x вдоль нормали к границе, а $V(\phi)$ — потенциал, инвариантный относительно преобразования отражения $\phi \rightarrow -\phi$ и имеющих минимум при $\phi = \pm\bar{\phi}$. Отметим, что потенциал V определен лишь с точностью до постоянной. В дальнейшем нам будет удобно выбирать эту постоянную таким образом, чтобы

$$V(\pm\bar{\phi}) = 0.$$

Тогда $V(\phi) \geq 0$ при любых ϕ , причем $V(\phi) = 0$ только при $\phi = \pm\bar{\phi}$.

Для конечности действия необходимо, чтобы $\phi(x)$ стремилось к $\bar{\phi}$ или к $-\bar{\phi}$ при $x \rightarrow \infty$; очевидно, что то же самое должно выполняться при $x \rightarrow -\infty$. Таким образом, имеются четыре топологически различные конфигурации с конечным действием. В двух из них $\phi(x)$ стремится к одному и тому же пределу при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Очевидно, что каждая такая конфигурация топологически эквивалентна вакуумной, так как непрерывным образом может быть деформирована в однородную с постоянной $\phi(x)$. В двух других конфигурациях пределы $\phi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ различны и топологически стабильны. Легко видеть, что в данном случае классы эквивалентных конфигураций соответствуют элементам $\pi_0(G)$, где для любого многообразия $\mathcal{M}$ $\pi_0(\mathcal{M})$ обозначает множество связных компонент $\mathcal{M}$, а G — группа симметрии. В рассматриваемом примере G представляет собой группу Z_2 отражений $\phi \rightarrow -\phi$.

Для дальнейшего анализа удобно проделать преобразование Богомольного [10], которое также используется в §§ 23.3, 23.5 при рассмотрении монополей и инстантонов. Перепишем действие (23.1.2) в следующем виде:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} \sqrt{2V(f)} df. \quad (23.1.3)$$

Второй член в правой части уравнения (23.1.3) представляет собой “топологический заряд”, который зависит только от значений поля при $x \rightarrow \pm\infty$. Топологический заряд равен нулю для тех конфигураций, у которых $\phi(x)$ стремится к одному и тому же пределу при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Следовательно, минимальное значение действия для таких конфигураций равно нулю и достигается на однородных конфигурациях. Если $\phi(x)$ имеет различные пределы при $x \rightarrow \pm\infty$, то, соответствующим образом выбирая знак в уравнении (23.1.3), получим оценку снизу для действия:

$$S[\phi] \geq \int_{-\bar{\phi}}^{\bar{\phi}} \sqrt{2V(f)} df. \quad (23.1.4)$$

Эта нижняя граница достигается, когда первый член в уравне-

нии (23.1.3) равен нулю, или, другими словами,

$$x = \pm \int_0^{\phi(x)} \frac{df}{\sqrt{2V(f)}} + x_0, \quad (23.1.5)$$

где x_0 — постоянная интегрирования, которая, очевидно, соответствует координате центра доменной стенки. Отметим, что полученный результат не противоречит теореме Деррика, так как для доменных границ $d = 1$, т. е. при замене конфигурации $\phi(x)$ на $\phi(x/R)$ первый и второй члены в действии (23.1.2) изменяются в R^{-1} и R раз соответственно.

Мы могли бы получить уравнение (23.1.5) более стандартным способом, воспользовавшись условием стационарности действия (23.1.2) при малых вариациях поля $\phi(x)$ и затем показав, что величина $(1/2)(d\phi/dx)^2 - V(\phi)$ постоянна. Преимущество вывода, основанного на преобразовании (23.1.3), состоит в том, что из него сразу следует устойчивость решения (23.1.5) при любых малых возмущениях вида границы, за исключением “нулевой моды”, соответствующей изменению центра x_0 границы. Решение (23.1.5) также является устойчивым в трехмерном случае. В самом деле, добавив в действие (23.1.2) член $(1/2)(d\phi/dy)^2 + (1/2)(d\phi/dz)^2$, мы получим, что конфигурация (23.1.5) устойчива при *любых* возмущениях $\delta\phi(x, y, z)$, таких что $\delta\phi(x, y, z) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и фиксированных y, z .

В настоящее время неизвестно ни одной точной дискретной симметрии, кроме СРТ, равно как и точных или приближенных спонтанно нарушенных дискретных симметрий. Это полностью согласуется с данными об изотропности и однородности Вселенной. В самом деле, если бы в природе существовали какие-то спонтанно нарушенные дискретные симметрии, то в процессе нарушения этих симметрий в ранней Вселенной образовались бы доменные границы [5]. Очевидно, что Вселенная с такими доменными границами не являлась бы ни однородной, ни изотропной.

в) Инстантоны и др. Рассмотрим теорию калибровочного поля с действием

$$S[A] = \frac{1}{4} \int d^d x F_{\alpha ij} F_{\alpha ij}, \quad (23.1.6)$$

где $F_{\alpha ij}$ представляет собой обычный тензор напряженности. Будем считать, что размерность пространства $d \geq 4$. Действие (23.1.6) можно рассматривать либо как евклидово действие для квантового калибровочного поля в d измерениях, либо как потенциальную энергию классического калибровочного поля во временной калибровке, $A_\alpha^0 = 0$, в $(d+1)$ -мерном пространстве-времени.

Необходимым условием конечности действия (23.1.6) является быстрое убывание тензора $F_{\alpha ij}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Это условие заведомо выполняется, если поле $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ достаточно быстро стремится к ну-

лю при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Однако даже при размерности пространства $d \geq 4$ существуют конфигурации, обладающие конечным действием, для которых $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ убывает по закону $1/|\mathbf{x}|$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. В самом деле, это справедливо для полей, которые стремятся при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ к чистой калибровке

$$it_{\alpha} A_{\alpha i}(\mathbf{x}) \rightarrow g^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_i g(\hat{\mathbf{x}}), \quad (23.1.7)$$

где $g(\hat{\mathbf{x}})$ — элемент калибровочной группы G , зависящий от направления. Конфигурация полей $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ остается прежней при замене $g(\hat{\mathbf{x}})$ на $g_0 g(\hat{\mathbf{x}})$, где g_0 — некоторый фиксированный элемент группы G , поэтому без ограничения общности можно считать, что для заданного направления $\hat{\mathbf{x}}_1$ $g(\mathbf{x}_1)$ равен единичному элементу G . Таким образом, любая конфигурация поля A , обладающая конечным действием $S[A]$, задает отображение единичной сферы $|\hat{\mathbf{x}}| = 1$ в калибровочную группу G , причем точка $\hat{\mathbf{x}}_1$ сферы отображается в единицу G . (Заметим, что в случае, когда $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ убывает быстрее, чем $1/|\mathbf{x}|$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, это отображение переводит всю сферу $|\hat{\mathbf{x}}| = 1$ в единичный элемент калибровочной группы.) Множество топологически различных отображений $S_{d-1} \mapsto G$, каждое из которых переводит некоторую фиксированную точку S_{d-1} в единичный элемент G , называется $(d-1)$ -й гомотопической группой многообразия G и обозначается $\pi_{d-1}(G)$. Как показано в приложении В к этой главе, физически важная третья гомотопическая группа $\pi_3(G)$ нетривиальна для любой полупростой группы Ли. При $d = 4$ топологически нетривиальные конфигурации поля A , которые являются стационарными точками функционала $S[A]$, получили название инстантонов [1]. Мы подробно обсудим роль инстантонов в квантовой хромодинамике в § 23.5, § 23.6.

Для того чтобы конфигурация $A(\mathbf{x})$ обеспечивала стационарность функционала (23.1.6), она должна удовлетворять уравнениям движения

$$\partial_i F_{\alpha ij} = 0. \quad (23.1.8)$$

Воспользовавшись рассуждением, которое мы применили при выводе теоремы Деррика, легко показать, что существование инстантонов возможно лишь при $d = 4$. В самом деле, определим $A^R(\mathbf{x})$ как $A(\mathbf{x}/R)/R$. Тогда

$$S[A^R] = R^{d-4} S[A],$$

поэтому при $d \neq 4$ действие для любой стационарной конфигурации A^* равно нулю: $S[A^*] = 0$. Но тогда $F_{\alpha ij} = 0$ во всех точках пространства, что, очевидно, соответствует топологически тривиальной конфигурации.

В § 23.5 мы докажем, что в четырехмерном пространстве инстантоны действительно существуют. Заметим, что из наивного скейлингового рассуждения, приведенного выше, следует, что для любого инстантонного решения $A(\mathbf{x})$ конфигурация $A(\mathbf{x}/R)/R$ также является инстантонной. Однако оказывается, что квантовые поправки снимают это вырождение.

д) Монополи, вихревые линии и др. Рассмотрим теперь теорию, которая содержит как калибровочные поля, так и скалярные, причем последние преобразуются по линейному представлению калибровочной группы. Действие для такой теории имеет следующий вид:

$$S[\phi, A] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\phi) D_i \phi_a D_i \phi_b + \frac{1}{4} F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} + U(\phi) \right], \quad (23.1.9)$$

где g_{ab} — положительно определенная матрица (которая обычно не зависит от ϕ), потенциал $U(\phi)$ ограничен снизу и начало отсчета выбрано таким образом, что минимальное значение $U(\phi)$ равно нулю; наконец, $F_{\alpha ij}$ и D_i представляют собой обычный тензор напряженности и ковариантную производную соответственно. Потребуем, чтобы $U(\phi)$ преобразовывался как скаляр, а $g_{ab}(\phi)$ — как тензор под действием преобразований группы G . Как и для случая теории калибровочного поля (см. пункт **в**), функционал (23.1.9) представляет собой либо действие для квантовых полей в евклидовом d -мерном пространстве, либо потенциальную энергию классической полевой конфигурации во временной калибровке в $(d+1)$ -мерном пространстве-времени.

Для того чтобы $S[\phi, A]$ было конечным, необходимо, чтобы $U(\phi(\mathbf{x}))$ обращалось в нуль при $\mathbf{x} \rightarrow 0$. Множество значений ϕ , для которых $U(\phi) = 0$, инвариантно при действии группы G и может быть как дискретным, так и непрерывным. В пункте **б** был рассмотрен случай, когда это множество дискретно. Теперь будем считать, что $U(\phi)$ обращается в нуль на непрерывном многообразии $\mathcal{M}_0$, причем действие группы G на $\mathcal{M}_0$ транзитивно.

Рассмотрим некоторую конфигурацию полей A, ϕ . Для конечности действия $S[\phi, A]$ на этой конфигурации необходимо, чтобы $U(\phi(\mathbf{x})) \rightarrow 0$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Выберем некоторое направление $\mathbf{x}_1$. В силу сделанного предположения о потенциале $U(\phi)$ мы можем получить предел поля $\phi(\hat{\mathbf{x}})$ по любому направлению $\hat{\mathbf{x}}$, подействовав на $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ некоторым преобразованием $\gamma(\hat{\mathbf{x}}) \in G$.

Легко видеть, что преобразование $\gamma(\hat{\mathbf{x}})$ определено с точностью до умножения справа на элемент группы H , которая оставляет $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ инвариантным. Таким образом, любая физическая конфигурация поля ϕ задает отображение $S_{d-1} \mapsto G/H$ $(d-1)$ -мерной сферы в множество смежных классов G/H (т. е. в группу G со следующим отношением эквивалентности: $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H$ такой, что $g_1 = g_2 h$). В частности, точка $\hat{\mathbf{x}}_1$ отображается в смежный класс, содержащий единичный элемент группы G . Итак, конфигурации полей A, ϕ , обладающие конечным действием, классифицируются в соответствии с топологически различными отображениями сферы S_{d-1} в G/H . Множество топологически различных отображений S_{d-1} в G/H , которые переводят точку $\hat{\mathbf{x}}_1$ в единичный смежный класс, называется $(d-1)$ -й гомотопической группой многообразия G/H и обозначается $\pi_{d-1}(G/H)$.

Отметим, что для полевой конфигурации, соответствующей нетривиальному элементу $\pi_{d-1}(G/H)$, производная $\partial_i \phi(\mathbf{x})$ ведет себя как $1/|\mathbf{x}|$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Далее, в силу конечности действия ковариантная производная $D_i \phi(\mathbf{x})$ убывает быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-d/2}$, т. е. $it_\alpha A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ стремится при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ к $\gamma^{-1}(\hat{\mathbf{x}})\partial_i \gamma(\hat{\mathbf{x}})$ быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-d/2}$. Следовательно, $F_{\alpha ij}(\mathbf{x})$ убывает быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-d/2-1}$, что, очевидно, обеспечивает сходимость интеграла $\int d^d x F_{\alpha ij} F_{\alpha ij}$.

Оказывается, что теорема Деррика несправедлива для теории с действием (23.1.9). В самом деле, для полей $\phi(\mathbf{x})$, $A(\mathbf{x})$ определим

$$\phi^R(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}/R), \quad A^R(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}/R)/R.$$

Тогда для трех членов гамильтониана (23.1.9) выполняются следующие скейлинговые соотношения:

$$T[\phi^R, A^R] = R^{d-2}T[\phi, A], \quad K[A^R] = R^{d-4}K[A], \quad V[\phi^R] = R^d V[\phi],$$

где

$$T[\phi, A] \equiv \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{ab} g_{ab}(\phi) D_i \phi_a D_i \phi_b, \quad K[A] \equiv \frac{1}{4} \int d^d x F_{\alpha ij} F_{\alpha ij}$$

и

$$V[\phi] \equiv \int d^d x U(\phi).$$

Тогда при $d > 4$ у $S[\phi^R, A^R]$ нет минимума при конечных R , и поэтому нет стабильной конфигурации с нетривиальной топологией. Таким образом, $S[\phi^R, A^R]$ имеет минимум для некоторого конечного значения R при размерности пространства $0 < d < 4$.

В трехмерном пространстве топологически различные полевые конфигурации соответствуют различным элементам гомотопической группы $\pi_2(G/H)$. Вторая гомотопическая группа нетривиальна в физически интересном случае односвязной калибровочной группы G (например, $SU(2)$), нарушенной до подгруппы H , содержащей калибровочную группу электромагнетизма $U(1)$. Топологически нетривиальные классические полевые конфигурации при $d = 3$ получили название *магнитных монополей* [2]. Мы подробно обсудим свойства магнитных монополей в § 23.3.

При $d = 2$ топологически нетривиальные конфигурации классифицируются в соответствии с элементами фундаментальной группы $\pi_1(G/H)$, которая нетривиальна для таких калибровочных групп, как $U(1)$ и $SO(3)$, нарушенных либо полностью, либо до дискретной подгруппы. Топологически нетривиальные полевые конфигурации в двумерном пространстве представляют собой поперечные сечения *вихревых линий*. Вихревые линии встречаются, например, в теории сверхпроводимости, где $G = U(1)$ спонтанно нарушена до $H = Z_2$. Как мы видели в § 21.6, вихревые линии возникают в сверхпроводниках второго рода, помещенных в магнитное поле определенной величины, и поток через них квантуется, причем различные значения потока

соответствуют различным элементам $\pi_1(U(1)/Z_2)$. Вихревые линии могут также возникать в релятивистской квантовой теории поля [4], и, возможно, они рождались при фазовых переходах в ранней Вселенной. В этом контексте вихревые линии принято называть *космическими струнами* [11].

Как монополи, так и вихревые линии обладают тем замечательным свойством, что могут быть описаны в чисто топологических терминах. В обоих случаях конфигурацию голдстоуновских полей $\pi_a(\mathbf{x})$ на сфере, находящейся в бесконечности (S_1 для вихрей и S_2 для монополей), нельзя непрерывным образом деформировать в конфигурацию, для которой $\pi_a(\mathbf{x}) = \text{const}$. Отсюда немедленно следует, что и вихревые линии, и монополи обязательно имеют сингулярности. В обоих случаях особенности возникают в сердцевине объекта. Заметим, что сердцевина представляет собой линию или цилиндр для вихря и точку или шар для монополей. В сердцевине калибровочная симметрия восстановлена и, таким образом, описание системы в терминах голдстоуновских полей становится неприменимым и следует использовать параметр порядка, линейно преобразующийся под действием группы G .

В четырехмерном пространстве функционал $S[\phi^R, A^R]$ может иметь минимум при некотором значении R , только если $T[\phi, A] = V[\phi] = 0$, из чего следует, что $U(\phi(\mathbf{x})) = 0$ в любой точке пространства. Так как G действует на $\mathcal{M}_0$ транзитивно, то можно выбрать калибровку, в которой поле $\phi(\mathbf{x})$ постоянно во всем пространстве, т.е. $\phi(\mathbf{x}) = \phi_0 = \text{const}$. Тогда из условия $T[\phi, A]$ вытекает, что $A_a(\mathbf{x}) = 0$ для всех нарушенных симметрий, для которых $t_a \phi_0 \neq 0$. Легко видеть, что такая конфигурация стационарна как для $T[\phi, A]$, так и для $V[\phi]$. Она также должна быть стационарной точкой $S[\phi, A]$, поэтому эта конфигурация стационарна и для потенциальной энергии калибровочного поля $K[A]$. Другими словами, калибровочное поле $A_{i\mu}$, принадлежащее подгруппе $H \subset G$, которая оставляет ϕ_0 инвариантным, должно удовлетворять евклидовым уравнениям Янга–Миллса:

$$\partial_\mu F_{i\mu\nu} = 0. \quad (23.1.10)$$

Таким образом, этот случай сводится к ситуации, рассмотренной в пункте **в**. Единственное отличие заключается в том, что теперь роль калибровочной группы играет подгруппа H исходной группы G .

§ 23.2. Гомотопические группы

В предыдущем параграфе мы показали, что полевые конфигурации, обладающие конечным действием, классифицируются в соответствии с различными элементами так называемых гомотопических групп. Мы, однако, не объяснили, в каком смысле гомотопические

группы являются *группами* и каков физический смысл их структуры. Как мы увидим ниже, в гомотопических группах можно естественным образом определить операцию умножения. Пусть две протяженные конфигурации полей, образующих многообразие $\mathcal{M}$ в d измерениях, соответствуют элементам c_1 и c_2 гомотопической группы $\pi_d(\mathcal{M})$, тогда, приближаясь друг к другу и сливаясь, они образуют конфигурацию, отвечающую произведению $c_1 \times c_2$ элементов c_1 и c_2 . Вначале мы определим первую гомотопическую группу $\pi_1(\mathcal{M})$ для произвольного многообразия $\mathcal{M}$; эту группу также называют фундаментальной группой многообразия. Отметим, что нетривиальность фундаментальной группы $\pi_1(G/H)$ смежного класса G/H обеспечивает топологическую устойчивость вихревой линии в трехмерной теории (или монополя в двумерной) с калибровочной группой G , спонтанно нарушенной до подгруппы H . Рассмотрев группу $\pi_1(\mathcal{M})$, мы затем перейдем к описанию гомотопических групп произвольного порядка.

Пусть $\mathcal{M}$ — связанное многообразие. Рассмотрим всевозможные замкнутые кривые, или петли, на этом многообразии. При этом будем параметризовывать различные петли p параметром $z \in [0, 1]$; очевидно, что $p(0) = p(1)$. Многообразие называется неодносвязным, если некоторая замкнутая кривая на нем $p(z)$ не может быть стянута в точку непрерывным преобразованием. В силу связности $\mathcal{M}$ каждую петлю можно непрерывным образом деформировать так, что любая ее наперед заданная точка перейдет в некоторую фиксированную точку многообразия $\mathcal{M}$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением лишь таких замкнутых кривых, для которых $p(0) = p(1) = p_0$, где p_0 — некоторая фиксированная точка $\mathcal{M}$, которую принято называть *отмеченной точкой*. Далее зададим отношение гомотопической эквивалентности на множестве петель, отождествив петли, которые могут быть непрерывно деформированы друг в друга. Таким образом, две замкнутые кривые $p_1(z)$, $p_2(z)$ называются эквивалентными, если существует непрерывная функция $p(z, t)$, $0 \leq t \leq 1$, удовлетворяющая следующему условию:

$$p(z, 0) = p_1(z), \quad p(z, 1) = p_2(z), \quad p(0, t) = p(1, t) = p_0.$$

Легко видеть, что отношение гомотопической эквивалентности обладает свойствами симметричности, транзитивности и рефлексивности, поэтому оно разбивает пространство петель на классы эквивалентности: две петли принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда они гомотопически эквивалентны. Такие классы являются элементами фундаментальной группы многообразия $\mathcal{M}$ — первой гомотопической группы $\pi_1(\mathcal{M})$.

Введем теперь операцию умножения на $\pi_1(\mathcal{M})$. Для этого выберем по одному представителю $p[z, c]$ каждого класса эквивалентности c в виде кривой, которая начинается и заканчивается в точке p_0 ; будем в дальнейшем называть $p[z, c]$ стандартной петлей класса c . Опре-

делим произведение двух элементов c_1 и c_2 как класс, содержащий петлю $p[z, c_1, c_2]$, которая начинается в точке p_0 , проходит кривую $p[z, c_1]$, возвращается в p_0 , а затем проходит кривую $p[z, c_2]$ и снова возвращается в p_0 . Таким образом,

$$p[z, c_1, c_2] \equiv \begin{cases} p[2z, c_1], & 0 \leq z \leq 1/2, \\ p[2z - 1, c_2], & 1/2 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Проверим, что таким образом введенное умножение удовлетворяет определению группы. Докажем вначале свойство *ассоциативности*. Для этого заметим, что класс $(c_1 \times c_2) \times c_3$ содержит кривую $p[z, c_1 \times c_2, c_3]$, которая вначале проходит стандартную петлю $p[z, c_1 \times c_2]$, а затем — петлю $p[z, c_3]$, в то время как $c_1 \times (c_2 \times c_3)$ представляет собой класс эквивалентности петли $p[z, c_1, c_2 \times c_3]$, последовательно обходящей кривые $p[z, c_1]$ и $p[z, c_2 \times c_3]$. Далее, в соответствии с нашим определением умножения, кривую $p[z, c_1 \times c_2]$ можно непрерывно деформировать в петлю, составленную из $p[z, c_1]$ и $p[z, c_2]$; точно так же $p[z, c_2 \times c_3]$ может быть деформирована в петлю, составленную из стандартных контуров $p[z, c_2]$, $p[z, c_3]$, которые проходятся последовательно. Таким образом, как $p[z, c_1 \times c_2, c_3]$, так и $p[z, c_1, c_2 \times c_3]$ принадлежат к тому же классу эквивалентности, что и петля, составленная из последовательно проходимых кривых $p[z, c_1]$, $p[z, c_2]$ и $p[z, c_3]$. Следовательно,

$$(c_1 \times c_2) \times c_3 = c_1 \times (c_2 \times c_3).$$

Единичный элемент e группы $\pi_1(\mathcal{M})$ определяется как класс эквивалентности, содержащий точечную петлю $p[z, e] \equiv p_0$. Проверим, что $e \times c = c$ для любого класса c . Петля $p[z, e, c]$ может быть записана в следующем виде:

$$p[z, e, c] = \begin{cases} p_0, & 0 \leq z \leq 1/2, \\ p[2z - 1, c], & 1/2 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Но такая кривая гомотопически эквивалентна стандартному представителю $p[z, c]$ класса c . В самом деле, выберем $p(z, t)$ следующим образом:

$$p(z, t) \equiv \begin{cases} p_0, & 0 \leq z \leq t/2, \\ p[(2z - t)/(2 - t), c], & t/2 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Тогда $p(z, t)$ при $t = 0$ действительно совпадает с петлей $p[z, c]$, а при $t = 1$ — с петлей $p[z, e, c]$. Итак, мы показали, что кривая $p[z, c]$, принадлежащая классу c , гомотопически эквивалентна петле $p[z, e, c]$, принадлежащей классу $e \times c$, поэтому $e \times c = c$. Равенство $c \times e = c$ доказывается аналогично.

Обратный элемент c^{-1} для некоторого класса c представляет собой класс эквивалентности, содержащий кривую $p^{-1}[z, c]$, которая отличается от $p[z, c]$ лишь ориентацией. То есть

$$p^{-1}[z, c] \equiv p[1 - z, c].$$

Отметим, что петля $p^{-1}[z, c]$ может не совпадать со стандартным представителем $p[z, c^{-1}]$ класса c^{-1} , так как определение гарантирует нам лишь *гомотопическую* эквивалентность этих кривых. Для доказательства равенства $c^{-1} \times c = e$ заметим, что из эквивалентности петель $p^{-1}[z, c]$ и $p[z, c^{-1}]$ следует, что петля $p[z, c^{-1}, c]$ может быть непрерывно деформирована в путь

$$p[z, c^{-1}, c] \rightarrow \begin{cases} p[1 - 2z, c], & 0 \leq z \leq 1/2, \\ p[2z - 1, c], & 1/2 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Эта замкнутая кривая, в свою очередь, может быть деформирована в единичную петлю $p[z, e] = p_0$:

$$p(z, t) = \begin{cases} p[1 - 2tz, c], & 0 \leq z \leq 1/2, \\ p[2tz + 1 - 2t, c], & 1/2 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом, $p[z, c^{-1}, c]$ можно деформировать в $p[z, e]$. Это означает, что петли $p[z, c^{-1}, c]$ и $p[z, e]$ принадлежат одному классу эквивалентности, т. е. $c^{-1} \times c = e$. Аналогично можно показать, что $c \times c^{-1} = e$. Итак, мы определили операцию умножения на $\pi_1(\mathcal{M})$ и построили единичный элемент, а также обратный для каждого элемента $\pi_1(\mathcal{M})$. Тем самым мы задали на множестве классов эквивалентности петлей структуру группы.

Простейшим примером многообразия $\mathcal{M}$ с нетривиальной фундаментальной группой является окружность S_1 . В качестве координаты на окружности удобно взять угол θ , при этом, очевидно, точки $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi n$ (где n — произвольное целое число) следует считать тождественными. Тогда элементы первой гомотопической группы S_1 представляют собой классы эквивалентных функций $\theta(z)$, $0 \leq z \leq 1$, каждая из которых начинается в отмеченной точке, $\theta(0) = \theta_0$, и заканчивается в ней же, т. е. $\theta(1) = \theta_0 + 2\pi n$. Легко видеть, что две такие функции задают гомотопически эквивалентные отображения тогда и только тогда, когда число n для них одинаково. Следовательно, фундаментальная группа окружности $\pi_1(S_1)$ имеет бесконечно много элементов, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с целыми числами n . Далее, произведение классов c_n и c_m состоит из петель, которые вначале обходят окружность n раз, возвращаются в отмеченную точку, а затем обходят окружность еще m раз, поэтому умножение в $\pi_1(S_1)$ соответствует сложению целых чисел:

$$c_n \times c_m = c_{n+m} \quad (23.2.1)$$

Итак,

$$\pi_1(S_1) = Z, \quad (23.2.2)$$

где Z обозначает группу целых чисел по сложению. В качестве физического приложения результата (23.2.2) рассмотрим систему с полнотью нарушенной калибровочной группой $SO(2)$. В этом случае

пространство смежного класса совпадает с самой группой $SO(2)$, которая, как известно, имеет топологию окружности, поэтому в такой физической системе имеется бесконечно много топологически устойчивых вихревых линий, соответствующих целым числам n . Описанная ситуация имеет место в сверхпроводниках второго рода, для которых, как мы видели в §21.6, группа $U(1)$ электромагнетизма нарушается до дискретной подгруппы Z_2 .

Отметим, что все сферы S_d , $d > 1$, являются односвязными, т. е. их фундаментальные группы тривиальны:

$$\pi_1(S_d) = 0 \quad \text{при} \quad d > 1. \quad (23.2.3)$$

Приведем также первые гомотопические группы различных групп Ли:

$$\pi_1(G) = \begin{cases} Z, & G = U(k), & k \geq 1, \\ Z_2, & G = SO(k), & k \geq 3, \\ 0, & G = Spin(k), & k \geq 3, \\ 0, & G = SU(k), & k \geq 2, \\ 0, & G = USp(2k), & k \geq 1, \\ 0, & G = G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. \end{cases}$$

Здесь Z_2 обозначает группу, состоящую из двух элементов 1 и -1 , причем групповой операцией является обычное умножение; $Spin(n)$ — односвязная накрывающая группы $SO(n)$. (Напомним, что в соответствии с §2.7 группы $Spin(3)$ и $SU(2)$ совпадают.)

Другой важный результат состоит в том, что фундаментальная группа прямого произведения двух многообразий равна прямому произведению фундаментальных групп сомножителей:

$$\pi_1(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') = \pi_1(\mathcal{M}) \times \pi_1(\mathcal{M}'). \quad (23.2.5)$$

Перейдем теперь к вопросу о физическом смысле операции умножения в фундаментальной группе многообразия. Для этого рассмотрим процесс сближения двух параллельных вихревых линий в трехмерном пространстве, которые первоначально находятся далеко друг от друга. Понятно, что пока вихри достаточно удалены друг от друга, взаимодействие между ними пренебрежимо мало, поэтому такая конфигурация характеризуется двумя элементами c' , c'' группы $\pi_1(G/H)$, которые соответствуют первой и второй вихревым линиям. Далее, класс всей конфигурации определяется значениями полей на большой окружности, которая охватывает оба вихря. Эту окружность можно непрерывно деформировать в две другие большие окружности, которые пересекаются в одной точке и охватывают по одному вихрю каждая. Очевидно, что обход замкнутой кривой, состоящей из этих двух окружностей, в пространстве G/H соответствует последовательному обходу двух петель, принадлежащих классам c' и c'' . Эта ситуация, как легко видеть, совпадает с определением произведения двух элементов фундаментальной группы. Таким образом, рассматриваемая

полевая конфигурация, состоящая из двух вихрей, характеризуется элементом $c = c' \times c''$ фундаментальной группы. Значит, при слиянии двух вихрей, которые относятся к классам c' , c'' соответственно, образуется вихрь класса $c = c' \times c''$. В частности, две вихревые линии могут аннигилировать тогда и только тогда, когда $c'' = c'^{-1}$.

Например, в трехмерной теории, для которой $\pi_1(G/H) = Z$ (напомним, что такая ситуация имеет место в сверхпроводимости, где $G/H = SO(2)/Z_2$), при объединении вихревых линий классов c_n и c_m образуется вихревая линия класса c_{n+m} , т.е. вихревые линии могут аннигилировать, только если $n = -m$. С другой стороны, в случае, когда $\pi_1(G/H) = Z_2$ (что справедливо для $G = SO(N)$, $N \geq 3$, и тривиальной подгруппы H), имеются вихревые линии лишь одного типа в трех измерениях, соответствующие элементу -1 из Z_2 , причем $(-1)^2 = 1$, поэтому любые два вихря могут аннигилировать.

Рассмотрим гомотопические группы $\pi_k(\mathcal{M})$ при произвольном $k > 1$. Определение таких групп почти совпадает с определением фундаментальной группы, с тем отличием, что элементами k -й гомотопической группы $\pi_k(\mathcal{M})$ являются классы эквивалентных отображений сферы S_k (т.е. поверхности $(k+1)$ -мерного шара) в многообразие $\mathcal{M}$; при этом вновь рассматриваются лишь отображения, переводящие точку сферы S_k в отмеченную точку p_0 многообразия $\mathcal{M}$. Напомним, что два отображения называются гомотопически эквивалентными, если они могут быть непрерывно деформированы друг в друга так, что отмеченная точка при этой деформации всегда отображается в отмеченную. Гомотопическая группа $\pi_k(\mathcal{M})$ состоит из классов эквивалентности, соответствующим этим отображениям.

При обсуждении свойств гомотопических групп удобно рассматривать сферу S_d как внутреннюю часть d -мерного гиперкуба, у которого все точки границы отождествлены. Например, как мы видели выше, окружность S_1 совпадает с отрезком $0 \leq \theta \leq 2\pi$ с отождествленными точками $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$. Аналогично, двумерную сферу S_2 (например, поверхность Земли с удаленным южным полюсом) можно представлять как единичный квадрат $0 \leq z_1 \leq 1$, $0 \leq z_2 \leq 1$, все точки границы которого считаются тождественными. Таким образом, отображения S_2 в многообразие $\mathcal{M}$ соответствуют таким отображениям единичного квадрата в $\mathcal{M}$, которые переводят все точки границы квадрата в отмеченную точку многообразия, поскольку все точки на границе — это одна и та же точка — южный полюс. При этом два отображения $p(z_1, \dots, z_d)$, $p'(z_1, \dots, z_d)$ сферы S_d в многообразии $\mathcal{M}$ гомотопически эквивалентны, если существует отображение $p(z_1, \dots, z_d, t)$, $t \in [0, 1]$, которое совпадает с $p(z_1, \dots, z_d)$ при $t = 0$, совпадает с $p'(z_1, \dots, z_d)$ при $t = 1$ и при любом $t \in [0, 1]$ переводит каждую точку границы единичного d -мерного куба в отмеченную точку многообразия.

Определим теперь операции умножения и взятия обратного элемента, а также единичный элемент для гомотопической группы произ-

вольного порядка. Как и для фундаментальной группы, выберем по одному стандартному представителю $p(z_1, \dots, z_d; t)$ каждого класса c . Произведение двух классов эквивалентности c_1 и c_2 определяется как класс эквивалентности, содержащий отображение

$$p(z_1, z_2, \dots, z_d; c_1 c_2) = \begin{cases} p(2z_1, z_2, \dots, z_d; c_1), & 0 \leq z_1 \leq 1/2, \\ p(2z_1 - 1, z_2, \dots, z_d; c_2), & 1/2 \leq z_1 \leq 1. \end{cases}$$

Далее, единичный элемент e представляет собой класс, включающий отображение, которое переводит в отмеченную точку всю d -мерную сферу, класс c^{-1} , обратный элементу c , содержит следующее отображение:

$$p^{-1}[z_1, z_2, \dots, z_d; c] = p[1 - z_1, z_2, \dots, z_d; c]. \quad (23.2.7)$$

Доказательство свойства ассоциативности умножения, а также равенств $e \times c = c \times e = c$, $c^{-1} \times c = c \times c^{-1} = e$ проводится аналогично случаю фундаментальной группы. Отметим, что гомотопические группы $\pi_n(\mathcal{M})$ при $n \geq 2$ коммутативны для любого многообразия, в то время как существуют многообразия (например, плоскость с двумя выколотыми точками), имеющие неабелеву фундаментальную группу.

В случае, когда $\pi_k(\mathcal{M}) = Z$, должно существовать взаимно однозначное отображение сферы S_k на некоторую k -мерную сферу S'_k в $\mathcal{M}$, которое соответствует целому числу один (чтобы избежать путаницы, напомним, что целое число один не совпадает с единичным элементом группы Z , который равен нулю). Тогда, очевидно, элемент $\nu \in Z$ при $\nu = 2, 3, \dots$ отвечает отображению S_k в ту же самую сферу S'_k в $\mathcal{M}$, которое имеет положительный якобиан и покрывает S'_k ν раз. Точно так же элемент $\nu \in Z$ при $\nu = -1, -2, \dots$ соответствует отображению $S_k \rightarrow S'_k$, которое покрывает S'_k $|\nu|$ раз и имеет отрицательный якобиан.

Например, как мы видели в предыдущем параграфе, топологически устойчивые магнитные монополи появляются при нарушении односвязной калибровочной группы G до группы $U(1)$ электромагнетизма. В этом случае (см. приложение В)

$$\pi_2(G/U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z, \quad (23.2.8)$$

поэтому магнитные монополи обладают целочисленным квантовым числом ν , которое, как доказано в § 23.3, пропорционально магнитному заряду монополя. Геометрически это квантовое число показывает, сколько раз большая 2-сфера, окружающая монополь, накручивается на 2-сферу в пространстве голдстоуновских полей $G/U(1)$ (при этом знак числа ν характеризует относительную ориентацию этих 2-сфер). Число ν называется *степенью отображения*. Из вида групповой структуры Z следует, что это квантовое число сохраняется, т. е. при слиянии монополей, обладающих зарядами ν, ν' , образуется монополь с зарядом $\nu + \nu'$.

Рассмотрим также ситуацию, когда односвязная группа G нарушается до подгруппы $SO(n)$, $n \geq 3$. В этом случае, как показано в приложении В,

$$\pi_2(G/SO(n)) = \pi_1(SO(n)) = Z_2. \quad (23.2.9)$$

Тогда в такой теории имеется лишь один тип “монополей”, соответствующий элементу -1 группы Z_2 , причем пары таких монополей могут аннигилировать. Отметим также, что в теории, калибровочная группа которой нарушена до подгруппы $Spin(n)$, монополи отсутствуют. Мы более подробно обсудим такие теории в следующем параграфе.

В заключение рассмотрим еще один важный пример. Как мы показали в предыдущем параграфе, в квантовой хромодинамике с n легкими кварками скирмионы соответствуют элементам гомотопической группы $\pi_3(SU(n))$, которая равна Z . Поэтому скирмионы в такой теории обладают сохраняющимся целочисленным зарядом, который, возможно, совпадает с барионным числом. Аналогично, различные инстантонные конфигурации в калибровочной теории с односвязной группой G классифицируются в соответствии с различными элементами группы $\pi_3(G) = Z$. Следовательно, инстантоны, так же как и скирмионы, характеризуются некоторым целочисленным квантовым числом ν . В § 23.5 мы покажем, что топологический заряд произвольной конфигурации калибровочного поля может быть представлен как значение некоторого локального функционала на этой конфигурации.

§ 23.3. Монополи

В предыдущем параграфе было показано, что в теории, односвязная калибровочная группа G которой спонтанно нарушена до подгруппы $U(1)$ электромагнетизма, топологически устойчивые конфигурации соответствуют различным элементам гомотопической группы $\pi_2(G/U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z$. Мы также продемонстрировали, что такие конфигурации обладают сохраняющимся аддитивным квантовым числом. В этом параграфе мы докажем, что стационарные монопольные конфигурации действительно существуют, и дадим физическую интерпретацию сохраняющегося топологического числа. Вначале мы рассмотрим монополь 'т Хофта–Полякова [2], его обобщения и некоторые свойства, а затем перейдем к обсуждению особенностей монопольных конфигураций в теориях с неодносвязными калибровочными группами.

Рассмотрим теорию с калибровочной группой $SU(2)$ ¹⁾, спонтанно нарушенной ненулевым средним значением триплета скалярных

¹⁾ Обратим внимание на то, что мы взяли $SU(2)$, а не $SO(3)$ в качестве калибровочной группы. Мы объясним причину такого выбора в конце настоящего параграфа.

полей ϕ_n . Отметим, что эта теория напоминает модель Джорджи–Глэшоу [12] электрослабых взаимодействий. Плотность лагранжиана такой теории в пространстве–времени Минковского имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{n\mu\nu} F_n^{\mu\nu} - \frac{1}{2} D_\mu \phi_n D^\mu \phi_n - V(\phi_n \phi_n), \quad (23.3.1)$$

где

$$F_{n\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{n\nu} - \partial_\nu A_{n\mu} + e\epsilon_{nml} A_{m\mu} A_{l\nu}, \quad (23.3.2)$$

$$D_\mu \phi_n \equiv \partial_\mu \phi_n + e\epsilon_{nml} A_{m\mu} \phi_l, \quad (23.3.3)$$

Будем считать, что функция $V(\phi_n \phi_n)$ неотрицательна и обращается в нуль при $\sqrt{\phi_n \phi_n} = \langle \phi \rangle \neq 0$. (Заметим, что во многих работах, посвященных монополям, в качестве потенциала $V(\phi_n \phi_n)$ выбирается полином четвертой степени $\lambda(\phi_n \phi_n - \langle \phi \rangle^2)^2$ с $\lambda > 0$. Мы, однако, не будем задаваться какой-то конкретной формой потенциала и рассмотрим общий случай.) Очевидно, что для вакуумной классической однородной конфигурации теории (23.3.1) $A_{n\mu} = 0$, а поле ϕ_n имеет ненулевое значение. Таким образом, группа $SU(2)$ нарушена до подгруппы $U(1)$, которая представляет собой калибровочную группу электродинамики.

Перейдем теперь к нахождению топологически нетривиальных конфигураций в теории (23.3.1). Статические монопольные решения уравнений движения в данном случае удобно искать во временной калибровке, $A_n^0 = 0$, $A_n^i \neq 0$. При таком выборе калибровки функционал (23.3.1) с точностью до знака совпадает с плотностью потенциальной энергии $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} F_{nij}^2 + \frac{1}{2} (D_i \phi_n)^2 + V(\phi), \quad (23.3.4)$$

где квадраты подразумевают очевидную свертку по индексам. Так как все члены в выражении (23.3.4) положительны, то для конфигураций конечной энергии интеграл по всему трехмерному пространству от *каждого* из них должен сходиться.

В частности, должен сходиться интеграл от $V(\phi_n \phi_n)$, для чего необходимо, чтобы вектор ϕ_n в бесконечности имел длину $\langle \phi \rangle$. То есть любая конфигурация конечной энергии задает отображение 2-сферы $\mathcal{S}$, окружающей монополь и расположенной на бесконечности координатного пространства, в 2-сферу $\phi_n \phi_n = \langle \phi \rangle^2$ в пространстве полей. Как мы знаем из предыдущего параграфа, при таком отображении сфера $\mathcal{S}$ может покрывать сферу $\phi_n \phi_n = \langle \phi \rangle^2$ любое целое число раз N , причем если якобиан $\text{Det}(\partial x / \partial \phi)$ положителен, то мы говорим, что степень отображения равна N , а если он отрицателен, то отображение имеет степень $-N$.

Для того чтобы установить связь между магнитным зарядом монополя и соответствующим ему индексом отображения, мы должны сперва понять, какая величина в теории (23.3.1) играет роль физического магнитного поля. Для произвольной полевой конфигурации

можно выбрать калибровку, в которой вектор (в изотопическом пространстве) ϕ_n в каждой точке некоторой ограниченной области параллелен вектору $(0, 0, 1)$, т. е. в этой области ненарушенной электромагнитной подгруппе $U(1)$ исходной группы $SU(2)$ соответствует калибровочное поле A_{3i} . Таким образом, наша задача заключается в том, чтобы найти калибровочно-инвариантный тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, который в описанной выше калибровке сводился бы к $\partial_\mu A_{3\nu} - \partial_\nu A_{3\mu}$. Как показал 'т Хофт [2], такой тензор можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv F_{n\mu\nu} \hat{\phi}_n - \frac{1}{e} \epsilon_{nml} \hat{\phi}_n D_\mu \hat{\phi}_m D_\nu \hat{\phi}_l, \quad (23.3.5)$$

где $\hat{\phi}_n = \phi_n / \sqrt{\phi_m \phi_m}$. Проверим тот факт, что в калибровке с постоянным $\hat{\phi}_n$ тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ действительно представляет собой обычный тензор напряженности электромагнитного поля. Для этого, пользуясь уравнениями (23.3.2) и (23.3.3), а также тождеством

$$\epsilon_{abc} \epsilon_{ade} = \delta_{bd} \delta_{ce} - \delta_{be} \delta_{cd},$$

перепишем уравнение (23.3.5) в виде [13]:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu (\hat{\phi}_n A_{n\nu}) - \partial_\nu (\hat{\phi}_n A_{n\mu}) - \frac{1}{e} \epsilon_{nml} \hat{\phi}_n \partial_\mu \hat{\phi}_m \partial_\nu \hat{\phi}_l. \quad (23.3.6)$$

Из выражения (23.3.6) следует, что в калибровке, в которой $\hat{\phi}_n$ совпадает с единичным вектором вдоль третьей оси координат, тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ имеет форму

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_{3\nu} - \partial_\nu A_{3\mu},$$

что и требовалось доказать.

Магнитный заряд g произвольной полевой конфигурации по определению равен потоку магнитного поля через замкнутую поверхность, содержащую эту конфигурацию, деленному на 4π :

$$4\pi g \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{F}_{ij} d^2 S_k. \quad (23.3.7)$$

Первые два члена тензора $\mathcal{F}_{ij}$ (23.3.6) являются полными производными и потому не дают вклада в интеграл (23.3.7), т. е.

$$g = -\frac{1}{8\pi e} \epsilon_{ijk} \epsilon_{nml} \int_{\mathcal{S}} \hat{\phi}_n \partial_i \hat{\phi}_m \partial_j \hat{\phi}_l d^2 S_k. \quad (23.3.8)$$

Магнитный заряд (23.3.8) представляет собой топологический инвариант, так как его значение остается прежним при любых бесконечно малых вариациях поля ϕ_n . В самом деле, легко видеть, что при изменении $\hat{\phi}_n$ на $\delta \hat{\phi}_n$ магнитный заряд меняется на величину

$$\delta g = -\frac{3}{8\pi e} \epsilon_{ijk} \epsilon_{nml} \int_{\mathcal{S}} \delta \hat{\phi}_n \partial_i \hat{\phi}_m \partial_j \hat{\phi}_l d^2 S_k.$$

Но так как $\widehat{\phi}$ — единичный вектор, то векторы $\delta\widehat{\phi}$, $\partial_i\widehat{\phi}$ и $\partial_j\phi$ лежат в плоскости, перпендикулярной к $\widehat{\phi}$, поэтому

$$\epsilon_{nml}\delta\widehat{\phi}_n\partial_i\widehat{\phi}_m\partial_j\widehat{\phi}_l = 0,$$

и $\delta g = 0$. Отметим, что величина (23.3.8) связана с топологическим инвариантом, который называется *индексом Кронекера*.

Важным свойством магнитного заряда, определенного через поверхностный интеграл (23.3.8), является его аддитивность. Действительно, вычисление заряда двух удаленных локализованных конфигураций можно производить, интегрируя поток магнитного поля через две большие сферы, каждая из которых окружает один из монополей и которые соединены тонкой трубкой, поэтому заряд g всей конфигурации равен сумме зарядов g_1 и g_2 каждого из монополей. Далее, так как g является топологическим инвариантом, то он остается постоянным при сближении монополей. Таким образом, при слиянии монополей, которые имеют заряды g_1 и g_2 , образуется монополь с зарядом $g = g_1 + g_2$. Итак, магнитный заряд обладает теми же свойствами, что и степень отображения, поэтому эти два топологических инварианта должны быть пропорциональны друг другу. Арафьюн, Фройнд и Гебель [13] вычислили коэффициент пропорциональности между степенью отображения и зарядом (23.3.8) в общем случае, мы же здесь ограничимся выводом этого коэффициента для монополя 'т Хофта–Полякова [2], который соответствует степени отображения, равной единице.

Перейдем к построению монополя 'т Хофта–Полякова. Как мы видели в предыдущем параграфе, элемент “один” $\mathcal{I}$ (отличный от единичного элемента группы!) гомотопической группы $\pi_2(SU(2)/U(1))$, который соответствует целому числу один, содержит конфигурации, для которых отображение 2-сферы $\mathcal{S}$ в бесконечности на сферу в пространстве полей ϕ взаимно однозначно и имеет положительный якобиан. В качестве представителя этого гомотопического класса естественно взять конфигурацию, для которой вектор $\phi_n(\mathbf{x})$ параллелен $\mathbf{x}$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Предполагая инвариантность такой конфигурации относительно одновременных вращений в координатном и полевом пространствах, мы можем искать ее в следующем виде:

$$\phi_n = \widehat{x}_n \langle \phi \rangle F(r), \quad (23.3.9)$$

$$A_{ni} = \frac{\epsilon_{nil}\widehat{x}_l}{er} G(r). \quad (23.3.10)$$

Обратим внимание на то, что монопольное решение (23.3.9), (23.3.10) изменяется как при вращениях трехмерного пространства, так и при калибровочных преобразованиях. Тем не менее оно инвариантно относительно комбинации поворота координат и соответствующего такому повороту глобального калибровочного преобразования. Аналогичная ситуация имеет место для вихревых линий в сверхпроводниках второ-

го рода. В самом деле, согласно § 21.6 конфигурация голдстоуновского бозонного поля для вихревого решения имеет вид $\phi = \pm l\varphi/2e$, поэтому калибровочная инвариантность и симметрия относительно поворотов нарушены. Но одновременное применение глобального калибровочного преобразования $\phi \rightarrow \phi + \Lambda$ и вращения координат $\varphi \rightarrow \varphi \pm 2e\Lambda/l$ оставляет вихревое решение инвариантным.

Как мы уже отмечали, для сходимости интеграла от $V(\phi_n\phi_n)$ необходимо, чтобы $\phi_n\phi_n$ стремилось к $\langle\phi\rangle^2$ при $r \rightarrow \infty$, поэтому $F(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$. Для того чтобы получить поведение $G(r)$ при больших значениях r , заметим, что ковариантная производная скалярного поля имеет следующий вид:

$$D_i\phi_n = \pm\langle\phi\rangle\left[(1-G(r))(\delta_{ni}-\hat{x}_n\hat{x}_i)\frac{F(r)}{r} + \hat{x}_n\hat{x}_iF'(r)\right]. \quad (23.3.11)$$

Следовательно, вклад скалярного поля в плотность гамильтониана равен

$$\frac{1}{2}(D_i\phi_n)^2 = \langle\phi\rangle^2\left[\frac{F^2(1-G)^2}{r^2} + \frac{F'^2}{2}\right]. \quad (23.3.12)$$

Для сходимости интеграла по трехмерному пространству от плотности (23.3.12) необходимо, чтобы $F'(r) \rightarrow 0$ и $G(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$. Наконец, выразим тензор напряженности поля (23.3.2) через функции $F(r)$ и $G(r)$:

$$F_{nij} = \frac{\epsilon_{ijk}}{e}\left[-\frac{1}{r}G'(r)(\delta_{nk}-\hat{x}_n\hat{x}_k) - \frac{1}{r^2}(2G(r)-G^2(r))\hat{x}_n\hat{x}_k\right]. \quad (23.3.13)$$

Таким образом, янг-миллсовский член в плотности гамильтониана определяется выражением

$$\frac{1}{4}(F_{nij})^2 = \frac{1}{e^2}\left[\frac{G'^2}{r^2} + \frac{(2G-G^2)^2}{2r^4}\right]. \quad (23.3.14)$$

Интеграл от этого члена сходится, если производная $G'(r)$ убывает достаточно быстро при $r \rightarrow \infty$.

Итак, мы получили асимптотики функций $F(r)$, $G(r)$, а также их производных, при $r \rightarrow \infty$. Этого оказывается достаточно для определения заряда магнитного монополя (23.3.9)–(23.3.10). Из уравнения (23.3.13) и асимптотик $G(\infty) = 1$, $G'(\infty) = 0$ следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$F_{nij} \rightarrow -\frac{\epsilon_{ijk}\hat{x}_k\hat{x}_n}{er^2}. \quad (23.3.15)$$

В силу быстрого убывания ковариантной производной $D_i\phi_n$ при $r \rightarrow \infty$ можно считать, что в такой калибровке магнитное поле на больших расстояниях определяется первым членом в правой части выражения (23.3.5), т. е. при $r \rightarrow \infty$ мы имеем

$$B_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{F}_{jk} \rightarrow \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{\phi}_nF_{njk} \rightarrow -\frac{\hat{x}_i}{er^2}. \quad (23.3.16)$$

Отсюда сразу видно, что конфигурация (23.3.9), (23.3.10) обладает магнитным зарядом $g = -1/e$. Тогда, в соответствии с общими аргу-

ментами, приведенными выше, заряд монополя, отвечающего степени отображения ν , равен

$$g_\nu = -\nu/e. \quad (23.3.17)$$

Мы вывели заряд монополя, пользуясь лишь предельным поведением функций G и F при больших расстояниях. Перейдем теперь к обсуждению этих функций при произвольных r . Оказывается, что, вообще говоря, явный вид $F(r)$ и $G(r)$ может быть получен только численным расчетом. Однако существует предельный случай, для которого можно найти эти функции аналитически. Для того чтобы увидеть, чему соответствует такой предельный случай, удобно воспользоваться преобразованием Богомольного [10], о котором мы уже упоминали в § 23.1. Перепишем (23.3.4) в следующем виде:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} (F_{nij} \mp \epsilon_{ijk} D_k \phi_n)^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{nij} D_k \phi_n + V(\phi_n \phi_n). \quad (23.3.18)$$

Воспользовавшись тождеством Бианки (15.3.9), преобразуем второй член выражения (23.3.18):

$$\pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{nij} D_k \phi_n = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} D_k (F_{nij} \phi_n) = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_k (F_{nij} \phi_n),$$

Таким образом, интеграл от этого слагаемого определяется магнитным зарядом g конфигурации:

$$\pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3 x F_{nij} D_k \phi_n = \pm \langle \phi \rangle \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \pm 4\pi \langle \phi \rangle g.$$

Так как все остальные члены гамильтониана $\mathcal{H}$ положительны, то отсюда мы немедленно получаем ограничение снизу для энергии монополя с зарядом g :

$$E = \int d^3 x \mathcal{H} \geq 4\pi \langle \phi \rangle |g|. \quad (23.3.19)$$

Заметим, что для энергии монополя, обладающего зарядом $g = \pm 1/e$, эта оценка дает $E \geq 4\pi \langle \phi \rangle / e$, т. е. при малых значениях константы связи e классическая энергия монополя много больше квантовых поправок, которые имеют порядок $\langle \phi \rangle$. Таким образом, классические монополярные конфигурации представляют собой ведущие члены теории возмущений и их рассмотрение физически осмысленно.

Далее можно было бы попытаться минимизировать энергию монополярной конфигурации с заданным зарядом, положив первый член в выражении (23.3.18) равным нулю, т. е.

$$F_{nij} = \pm \epsilon_{ijk} D_k \phi_n. \quad (23.3.20)$$

Однако оказывается, что решение уравнения (23.3.20) не соответствует конфигурации, на которой функционал энергии стационарен. Действительно, условие стационарности энергии при вариациях скалярного поля представляет собой уравнение поля:

$$D_k D_k \phi_n = 2\phi_n V'(\phi_n \phi_n), \quad (23.3.21)$$

в то время как из уравнения (23.3.20) и тождеств Бианки (15.3.9) следует, что $D_k D_k \phi_n = 0$. Это рассуждение показывает, что в специальном случае, когда потенциал $V(\phi_n \phi_n)$ очень мал, уравнения (23.3.20) и (23.3.21) почти совпадают. То есть решив уравнение (23.3.20), мы получим конфигурацию, почти не отличающуюся от монополя и имеющую энергию, близкую к нижней границе (23.3.19). (Заметим, что если потенциал $V(\phi_n \phi_n)$ представляет собой полином четвертой степени $\lambda(\phi_n \phi_n - \langle \phi \rangle^2)^2$, то условие его малости означает, что $\lambda \ll \ll e^2$. Такая ситуация имеет место в сверхпроводниках первого рода.) Этот подход к нахождению монопольных решений был разработан Богомольным [10]. Ранее, несколько другим способом, не используя уравнение (23.3.20), аналогичный результат получили Прасад и Зоммерфельд [14], поэтому топологически нетривиальные конфигурации в специальном случае слабого потенциала носят название монополей Богомольного–Прасада–Зоммерфельда.

Причина, по которой преобразование Богомольного резко упрощает нахождение монопольных решений, заключается в том, что условия (23.3.20) представляют собой дифференциальные уравнения первого порядка для функций F , G , в то время как классические уравнения движения содержат также вторые производные. Пользуясь уравнениями (23.3.11) и (23.3.13) и приравнявая коэффициенты при тензорах $\epsilon_{ijk}[\delta_{kn} - \hat{x}_k \hat{x}_n]$ и $\epsilon_{ijk} \hat{x}_k \hat{x}_n$ в правой и левой частях выражения (23.3.20), получим

$$e\langle \phi \rangle F(1 - G) = G', \quad (23.3.22)$$

$$e\langle \phi \rangle r^2 F' = G(2 - G). \quad (23.3.23)$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее граничным условиям $F(r) \rightarrow 1$ и $G(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$, имеет следующий вид:

$$F = \text{cth } \rho - \frac{1}{\rho}, \quad G = 1 - \frac{\rho}{\text{sh } \rho}, \quad (23.3.24)$$

где $\rho \equiv e\langle \phi \rangle r$. Из явного вида функций F , G , в частности, следует, что при $r \rightarrow 0$ поле ϕ_n обращается в нуль. Отсюда получаем результат, о котором мы упоминали в § 23.1: в центре монополя $SU(2)$ -симметрия восстанавливается.

Вернемся теперь к рассмотрению монополей для произвольного потенциала V . Очевидно, что монополь 'т Хофта–Полякова является устойчивым, так как он имеет минимально возможный магнитный заряд и поэтому не может распадаться на другие конфигурации. Напротив, конфигурации, имеющие больший заряд, вообще говоря, неустойчивы [10]. Отметим также, что существуют конфигурации, обладающие как магнитным, так и электрическим зарядами; такие объекты называются *дионами* [15].

При рассмотрении монополя 'т Хофта–Полякова можно пользоваться также подходом, который был предложен Дираком в рабо-

те [16] и отличается от описанного выше. Для того чтобы проиллюстрировать этот подход, удобно сделать калибровочное преобразование $\phi_n \rightarrow R_{nm}(\mathbf{x})\phi_m$, после применения которого поле ϕ_n становится направленным вдоль некоторого фиксированного направления $\hat{\mathbf{v}}$. (В качестве $\hat{\mathbf{v}}$ можно выбрать, например, направление, задаваемое третьей осью координат.) В такой калибровке напряженность поля $B_{nk} = (1/2)\epsilon_{ijk}F_{nij}$ равна $R_{nm}B_{mk}$, поэтому $B_{nk} \rightarrow \hat{\mathbf{v}}_n \widehat{x_k}/er^2$ при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, теперь, в отличие от калибровки (23.3.9)–(23.3.10), напряженность поля в каждой точке оказывается параллельной направлению, вдоль которого калибровочная симметрия не нарушена. Однако легко видеть, что преобразование, которое привело нас к этой “простой” калибровке, является сингулярным. В самом деле, поворот, переводящий вектор, направленный вдоль $\hat{\mathbf{x}}$, в вектор, направленный вдоль $\hat{\mathbf{v}}$, может быть записан в следующем виде:

$$R(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{v}}) = 1 - (1 - \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}^T + \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}})^T + (\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}^T - \frac{(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}})(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}})^T}{1 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}}. \quad (23.3.25)$$

Такой поворот сингулярен при $\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{v}}$. Очевидно, что поворот R можно выбрать различными способами; например, последовательное применение поворота $R(\hat{\mathbf{x}}; -\hat{\mathbf{v}})$ и поворота на 180° вокруг некоторой оси, перпендикулярной $\hat{\mathbf{v}}$, так же как и (23.3.25), переводит вектор $\hat{\mathbf{x}}$ в вектор $\hat{\mathbf{v}}$. Тем не менее такое альтернативное преобразование также обладает особенностью при $\hat{\mathbf{x}} = +\hat{\mathbf{v}}$. Единственный способ избавиться от сингулярности состоит в том, чтобы использовать разные калибровки в разных областях. Например, выбирая $\hat{\mathbf{v}} \parallel Oz$, мы можем сделать в области $0 < \theta < \theta_0$ калибровочное преобразование (23.3.25), которое сингулярно только при $\theta = \pi$, а в области $\theta_0 < \theta < \pi$ — другое калибровочное преобразование, имеющее особенность при $\theta = 0$ (здесь θ_0 — произвольный угол, удовлетворяющий условию $0 < \theta_0$, например $\theta_0 = \pi/2$). Тогда можно считать, что во всех удаленных от центра монополя точках пространства, для которых $\theta \neq 0, \pi$, магнитное поле равно $B \approx g\hat{\mathbf{x}}/r^2$, где g — магнитный заряд монополя. Векторный потенциал $\mathbf{A}$, соответствующий такой конфигурации магнитного поля $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, имеет азимутальное направление: $\mathbf{A} = (0, A_\phi, 0)$. Тогда при $0 < \theta < \theta_0$ он определяется выражением $A_\phi = g(1 - \cos \theta)/r \sin \theta$, сингулярным при $\theta = \pi$, а при $\theta_0 < \theta < \pi$ — выражением $A_\phi = -g(1 + \cos \theta)/r \sin \theta$, сингулярным при $\theta = 0$. Так как эти два вектор-потенциала задают одну и ту же физическую конфигурацию, то они должны отличаться на градиент некоторой функции. В самом деле, легко проверить, что $\Delta \mathbf{A} = \nabla \Lambda$, где $\Lambda = 2g\phi$.

Очевидно, что выбор различных калибровок в различных областях пространства никак не влияет на магнитное поле, однако такой выбор может изменить динамику заряженного поля. Действительно, при переходе из области пространства с одной калибровкой в область с дру-

гой калибровкой, поле, обладающее зарядом q , должно приобрести множитель $\exp(iq\Lambda) = \exp(2iqg\phi)$. Тогда из однозначности значений полей следует, что $2qg$ должно быть целым числом. Таким образом, мы получили условие квантования Дирака: если в теории существуют магнитный монополи, обладающий зарядом g , и частица, имеющая электрический заряд q , то произведение зарядов gq является целым числом. Отметим, что для монополя 'т Хофта–Полякова это условие автоматически выполняется, так как $g = 1/e$, и заряды всех частиц в теории Джорджи–Глэшоу являются целыми, кратными $e/2$.

Модель Джорджи–Глэшоу является простейшей теорией, в которой имеются магнитные монополи. Но, как показало открытие нейтральных токов, эта теория не может адекватно описывать электрослабые взаимодействия. Тем не менее монополи существуют во многих реалистических теориях большого объединения²⁾. В самом деле, мы видели, что монополи возникают в любой теории, односвязная калибровочная группа G которой спонтанно нарушена до подгруппы $H' \times U(1)$, где H' односвязна, так как в соответствии с приложением В в этом случае $\pi_2(G/H) = \pi_1(H) = \pi_1(H') \times \pi_1(U(1)) = \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$. Поэтому в единых теориях электрослабого и сильного взаимодействий, имеющих односвязные калибровочные группы, такие как $SU(4) \times SU(5)$ или $SU(5)$ или $Spin(10)$, нарушенные до калибровочной группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ стандартной модели, монополи обязательно присутствуют (см. § 21.5). Масса монополя в таких теориях по порядку величины равна обратному квадрату константы связи, умноженному на массу векторных бозонов, возникающих при спонтанном нарушении симметрии. Численное значение массы монополя составляет $M \approx 10^{15} - 10^{16}$ ГэВ. Таким образом, монополи могли рождаться в ранней Вселенной во время фазового перехода, при котором симметрия нарушалась до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ и который имел место при температурах T порядка M .

Рождение монополей в ранней Вселенной, если оно действительно происходило по описанной выше схеме, вступает в противоречие с некоторыми космологическими моделями [17]. Действительно, перед фазовым переходом, при котором калибровочная группа нарушилась до группы стандартной модели, радиус корреляции полей не мог превышать расстояния до горизонта, т.е. наибольшего расстояния, которое мог пройти свет с момента развития начальной сингулярности. Как известно, в стандартных космологических моделях [18] это расстояние в момент времени t после развития сингулярности имеет порядок $t \approx (G_N T^4)^{-1/2}$ (где $G_N \simeq (10^{19} \text{ ГэВ})^{-2}$ — постоянная Ньютона), поэтому в единице объема должно было бы родиться поряд-

²⁾ Заметим, что в стандартной теории электрослабых взаимодействий, которая имеет неодносвязную калибровочную группу $SU(2) \times U(1)$, монополи отсутствуют.

ка $t^{-3} \approx (G_N M^4)^{3/2}$ монополей, что меньше концентрации фотонов M^3 при $T \approx M$ в $(G_N M^2)^{3/2}$ раз. При $M \approx 10^{15}$ GeV этот множитель имеет порядок 10^{-12} . Далее, если в процессе эволюции Вселенной монополи не аннигилировали друг с другом, то соотношение концентраций фотонов и монополей оставалось бы примерно постоянным с течением времени. Но в настоящее время количество фотонов микроволнового фона составляет примерно 10^9 на нуклон, т. е., если описанная картина верна, то на один нуклон должно приходиться 10^{-3} монополей, что находится в противоречии с наблюдениями.

Это рассуждение было одним из факторов, которые привели к развитию инфляционных космологических моделей [19]. В таких моделях предполагается, что в течение некоторого времени Вселенная экспоненциально расширялась; в любом случае такое расширение приводит к уменьшению концентрации монополей: в самом деле, если оно имело место до фазового перехода, то рождение монополей начиналось бы при гораздо большем значении радиуса корреляции, а если Вселенная расширялась после фазового перехода (но до периода повторного нагрева), то это привело бы к тому, что монополярный “газ” стал более разреженным.

Отметим, что открытие монополей любого типа дало бы возможность наблюдать такие замечательные явления, как фермион-монополярные конфигурации с дробным фермионным числом [20] и нарушение закона сохранения барионного числа при фермион-монополярном рассеянии [21].

* * *

Выше мы подробно рассмотрели монополи, возникающие при спонтанном нарушении односвязной калибровочной группы G . Обратимся теперь к случаю неодносвязной калибровочной группы. Как известно, для любой связной или неодносвязной калибровочной группы G существует односвязная группа $\bar{G}$ с той же алгеброй Ли, что и G , известная под названием *накрывающей группы*. (См., например, § 2.7.) Любая неодносвязная группа имеет меньше представлений, чем ее односвязная накрывающая (например, двусвязные группы $SO(n)$ имеют только скалярные, векторные и тензорные представления, в то время как их накрывающие $Spin(n)$ обладают также спинорными представлениями). В связи с этим возникает естественный вопрос. Рассмотрим теорию, не содержащую полей, преобразующихся по представлениям накрывающей группы $\bar{G}$, которые не являются представлениями G . Зависят ли физические свойства теории от того, какую группу мы будем считать калибровочной для этой теории, G или $\bar{G}$? В частности, изменятся ли возможные типы монополярных конфигураций, если в теорию, все поля которой преобразуются по представлениям неодносвязной группы G , добавить поля, преобразующиеся по представлениям накрывающей $\bar{G}$? Например, в перво-

начальной модели Джорджи–Глэшоу [12] кроме скалярных полей, которые преобразуются по векторному представлению $SO(3)$, присутствовали фермионные поля, принадлежащие спинорному представлению накрывающей группы $Spin(3) = SU(2)$. Можно также спросить, повлияет ли на возможные значения монопольных зарядов добавление в модель Джорджи–Глэшоу скалярных полей, преобразующихся по спинорному представлению $SU(2)$? Затем, как изменятся разрешенные значения зарядов монополей, если рассматривать теорию без фермионных полей?

Ответ заключается в том, что типы монополей, а также возможные значения их зарядов не зависят от того, рассматриваем ли мы в качестве калибровочной группы теории неодносвязную группу G или ее накрывающую $\bar{G}$. Таким образом, добавление в теорию полей, преобразующихся по представлениям $\bar{G}$, которые не являются представлениями G , никак не влияет на монополи. В самом деле, мы видели в § 23.1, что различные топологически устойчивые конфигурации определяются различными элементами группы $\pi_2(G/H)$. Как показано в приложении В, элементы этой гомотопической группы находятся во взаимно однозначном соответствии с теми классами эквивалентности петель из $\pi_1(H)$, которые переходят в тривиальный класс $\pi_1(G)$ при гомоморфизме фундаментальных групп, индуцированном вложением G в H . Однако при замене G на ее накрывающую $\bar{G}$ ненарушенная подгруппа H также заменится на некоторую другую подгруппу H' , так как некоторые петли в H соответствуют незамкнутым контурам в $\bar{G}$. Но таким свойством обладают те и только те петли, которые остаются нестягиваемыми при вложении H в G , поэтому $\pi_2(G/H) = \pi_1(H')$. Следовательно, если мы интересуемся только свойствами монополей, то мы можем считать, что калибровочная группа равна $\bar{G}$, а не G .

Например, при рассмотрении свойств скалярных полей в модели Джорджи–Глэшоу, мы могли бы полагать, что калибровочная группа представляет собой двусвязную $SO(3)$, а не ее накрывающую односвязную группу $SU(2)$. Тогда ненарушенная подгруппа равна $SO(2)$. Далее, фундаментальная группа $\pi_1(SO(2))$ содержит петли, идущие от тождественного преобразования до поворота на 360° , которые не соответствуют никаким петлям в группе $SU(2)$. Но, как мы знаем, $\pi_2(SO(3)/SO(2))$ содержит лишь те петли $\pi_1(SO(2))$, которые стягиваемы в $SO(3)$. Так как в $SO(3)$ нестягиваемы те и только те петли из $\pi_1(SO(2))$, которые не соответствуют никаким петлям в $SU(2)$, то мы получаем, что $\pi_2(SO(3)/SO(2))$ совпадает с фундаментальной группой многообразия $U(1) \subset SU(2)$. Таким образом, выбор неодносвязной $SO(3)$ в качестве калибровочной группы теории Джорджи–Глэшоу никак не влияет на свойства монополей.

В большинстве ситуаций удобно считать, что соответствующая калибровочной алгебре Ли калибровочная группа односвязна, пото-

му что при таком выборе можно пользоваться простым результатом $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$. Как мы видели выше, фундаментальная группа H определяется тем, как именно эта подгруппа вкладывается в группу G , или, более точно, тем, как алгебра Ли подгруппы H вкладывается в алгебру Ли группы G . Например, калибровочная алгебра $SU(3)$ может спонтанно нарушаться как до $SU(2)$ -подалгебры, причем при этом фундаментальное представление $SU(3)$ распадается на дублет и синглет, так и до $SO(3)$ -подалгебры, под действием которой поля, принадлежащие фундаментальному представлению $SU(3)$, преобразуются как 3-векторы. В первом случае мы не можем полагать, что ненарушенная подгруппа равна $SO(3)$; в силу того что $\pi_1(SU(2)) = 0$, при таком спонтанном нарушении калибровочной симметрии монополи отсутствуют. Во втором случае, напротив, ненарушенная подгруппа совпадает с $SO(3)$, фундаментальная группа которой есть Z_2 , поэтому в такой теории монополи существуют. Отметим, что набор полей в теории влияет на способ нарушения симметрии, т. е. на то, какая подалгебра останется ненарушенной и как именно ненарушенная подалгебра вкладывается в исходную калибровочную алгебру.

Рассуждение, аналогичное использованному при выводе условия квантования заряда монополя, показывает, что в любой теории, калибровочная алгебра G которой спонтанно нарушена до подалгебры, содержащей оператор электрического заряда, разрешенные значения заряда магнитного монополя равны целым кратным обратного минимального электрического заряда. При этом совершенно неважно, присутствует ли в лагранжиане поле, обладающее минимальным электрическим зарядом. Однако описанная ситуация реализуется не всегда. Например, в стандартной теории электрослабых взаимодействий подалгебра, генератором которой является оператор электрического заряда, вкладывается в калибровочную алгебру таким образом, что соответствующая ей подгруппа некомпактна. Таким образом, калибровочная группа имеет представления, обладающие сколь угодно малым электрическим зарядом, поэтому существование монополей оказывается невозможным.

§ 23.4. Интегральный инвариант Картана–Маурера

В этом параграфе мы построим топологический инвариант отображения, который может быть записан как интеграл по многообразию. Существование такой величины оказывается весьма полезным при изучении топологии компактных многообразий. Напомним, что мы уже применяли топологические интегральные инварианты в §§ 19.8, 22.7 при рассмотрении членов Весса–Зумино–Виттена. Результаты настоящего параграфа также будут использованы при обсуждении свойств инстантонов.

Рассмотрим отображение произвольного компактного многообразия $\mathcal{S}$ нечетной размерности d с координатами $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^d$ в многообразии $\mathcal{M}$ невырожденных матриц $g(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^d)$. (Отметим, что для приложений, которые рассматриваются в дальнейшем, наиболее важен случай, когда $\mathcal{S}$ представляет собой сферу S_d , а матрицы g принадлежат некоторой группе Ли G .) Определим на множестве отображений $g(\theta)$ следующий функционал:

$$\mathcal{J}[g] = \int d\theta^1 d\theta^2 \dots d\theta^d \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \dots g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right\}, \quad (23.4.1)$$

где $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d}$ — полностью антисимметричный тензор, причем $\epsilon^{12 \dots d} = 1$. Инвариант (23.4.1) называется *формой Кармана–Маурера*. Обратите внимание на тот факт, что из равенства $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} = -(-1)^d \epsilon^{i_2 \dots i_d i_1}$ следует тривиальность интеграла $\mathcal{J}[g]$ для многообразий четной размерности. Поэтому далее в этом параграфе будем считать, что многообразие $\mathcal{S}$ имеет нечетную размерность.

Величина (23.4.1) обладает несколькими замечательными свойствами. Во-первых, интеграл $\mathcal{J}[g]$ не зависит от выбора координат на многообразии $\mathcal{S}$. В самом деле, это утверждение легко получить из того, что $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d}$ представляет собой контравариантную тензорную плотность, т. е.

$$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \frac{\partial \theta'^{j_1}}{\partial \theta^{i_1}} \frac{\partial \theta'^{j_2}}{\partial \theta^{i_2}} \dots \frac{\partial \theta'^{j_d}}{\partial \theta^{i_d}} = \text{Det} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right) \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_d}.$$

Во-вторых, интеграл $\mathcal{J}[g]$ инвариантен при малых изменениях отображения $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{M}$. Из свойств следа произведения матриц следует, что при вариации $g \rightarrow g + \delta g$ отображения $g(\theta)$ изменение каждого из множителей $g^{-1} \partial g / \partial \theta^i$ дает одинаковый вклад в изменение величины (23.4.1):

$$\delta \mathcal{J}[g] = d \int d\theta^1 d\theta^2 \dots d\theta^d \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \dots \delta \left(g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right) \right\}.$$

Последний множитель в этом выражении можно переписать в следующем виде:

$$\delta \left(g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right) = -g^{-1}(\theta) \delta g(\theta) g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} + g^{-1}(\theta) \frac{\partial \delta g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} = \\ = g^{-1}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta^{i_d}} (\delta g(\theta) g^{-1}(\theta)) g(\theta).$$

Проинтегрировав по частям, мы получим два типа слагаемых. В слагаемых первого типа производная $\partial / \partial \theta^{i_d}$ действует на $\partial g(\theta) / \partial \theta^{i_n}$.

Такие члены, очевидно, не дают вклада в интеграл, так как тензор $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d}$ антисимметричен. Далее, имеется $d - 1$ слагаемых второго типа, в которых производная $\partial/\partial\theta^{i_d}$ действует на $g^{-1}(\theta)$. Все эти слагаемые равны между собой по модулю, но обладают переменным знаком, поэтому (напомним, что число $d - 1$ четное) их полный вклад равен нулю.

Рассмотрим теперь более подробно случай, когда многообразие $\mathcal{S}$ представляет собой сферу S_d . Так как величина $\mathcal{S}[g]$ не меняется при малых вариациях отображения $g(\theta)$, то она зависит только от гомотопического класса c отображения $g(\theta)$. Покажем, что интегралы $\mathcal{S}(c)$ (или, точнее, $\exp\{\mathcal{S}(c)\}$) образуют представление гомотопической группы $\pi_d(\mathcal{M})$, т. е.

$$\mathcal{S}(c_a \times c_b) = \mathcal{S}(c_a) + \mathcal{S}(c_b). \quad (23.4.2)$$

Действительно, пусть функции $g_a(\theta)$ и $g_b(\theta)$ принадлежат к гомотопическим классам c_a и c_b , соответственно, тогда гомотопический класс $c_a \times c_b$ состоит из отображений, топологически эквивалентных следующему отображению:

$$g_{ab}(\theta) = \begin{cases} g_a(2\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d), & 0 \leq \theta_1 \leq 1/2, \\ g_b(2\theta_1 - 1, \theta_2, \dots, \theta_d), & 1/2 \leq \theta_1 \leq 1. \end{cases}$$

При вычислении инварианта $\mathcal{S}[g]$ удобно отдельно рассматривать интегрирование по верхней и нижней полусферам. Интегрирование по полусфере $0 \leq \theta_1 \leq 1/2$ легко выполняется с помощью замены переменных $\theta'_1 = 2\theta_1$ и дает результат $\mathcal{S}(c_a)$. Аналогично, интеграл по полусфере $1/2 \leq \theta_1 \leq 1$ равен $\mathcal{S}(c_b)$. Таким образом, равенство (23.4.2) доказано.

Из доказанного утверждения, в частности, следует, что инвариант $\mathcal{S}$ для гомотопических классов e , c , $c \times c$ и т. д. и c^{-1} , $c^{-1} \times c^{-1}$ и т. д. равен

$$\mathcal{S}(c^n) = n\mathcal{S}(c). \quad (23.4.3)$$

Если $\mathcal{S}(c) \neq 0$ для некоторого класса c , то инвариант $\mathcal{S}(c^n)$ различен для разных целых чисел n , т. е. среди классов c^n , $n \in \mathbb{Z}$ нет совпадающих. Поэтому классы c^n образуют подгруппу Z группы $\pi_d(\mathcal{M})$. Это утверждение объясняет фундаментальное различие между гомотопическими группами четных и нечетных порядков. Например, для любой простой группы Ли G имеем $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$, $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$, $\pi_5(SU(n)) = \mathbb{Z}$ для всех $n \geq 3$, в то время как для всех групп Ли $\pi_2(G) = 0$, а $\pi_4(G)$ конечна.

В качестве простейшего примера, в котором $\mathcal{S}(c) \neq 0$, рассмотрим фундаментальную группу $\pi_1(U(1))$, которая, очевидно, совпадает с группой $\pi_1(S_1)$. Как известно, отображение $S_1 \mapsto U(1)$ характеризуется числом намотки ν , причем два отображения гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им числа ν совпадают. Гомотопический класс, отвечающий числу намотки ν ,

содержит отображение $g_\nu(\theta) = \exp(2i\nu\pi\theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$, для которого

$$\mathcal{J}[g_\nu] = \int_0^1 d\theta \exp(-2i\nu\pi\theta) \frac{d}{d\theta} \exp(2i\nu\pi\theta) = 2i\nu\pi.$$

Итак, фундаментальная группа $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$.

Перейдем теперь к рассмотрению более сложных случаев. Для простоты будем предполагать, что многообразие $\mathcal{M}$ можно непрерывным образом деформировать в группу Ли H размерности d . Пусть последовательное применение преобразований из H с параметрами θ и φ эквивалентно преобразованию, соответствующему параметру $\theta'(\theta, \varphi)$. В терминах матричного представления $g(\theta)$ это можно записать следующим образом:

$$g(\varphi)g(\theta) = g(\theta'(\theta, \varphi)).$$

Продифференцировав это равенство по θ' при постоянном φ и домножив слева на $g^{-1}(\theta')$, получим

$$\frac{\partial \theta^i}{\partial \theta'^j} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^i} = g^{-1}(\theta') \frac{\partial g(\theta')}{\partial \theta'^j}.$$

Таким образом, подынтегральное выражение $\mathcal{J}[g]$ в точке θ' равно

$$\begin{aligned} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_d} \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta') \frac{\partial g(\theta')}{\partial \theta'^{j_1}} g^{-1}(\theta') \frac{\partial g(\theta')}{\partial \theta'^{j_2}} \dots g^{-1}(\theta') \frac{\partial g(\theta')}{\partial \theta'^{j_d}} \right\} = \\ = \text{Det} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta'} \right) \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \dots g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right\}. \end{aligned}$$

Далее, на каждой группе Ли H можно определить (необязательно единственным образом) инвариантную метрику $\gamma_{ij}(\theta)$. Условие инвариантности метрики означает, что

$$\gamma_{ij}(\theta') \equiv \frac{\partial \theta^k}{\partial \theta'^i} \frac{\partial \theta^l}{\partial \theta'^j} \gamma_{kl}(\theta). \quad (23.4.4)$$

Метрику γ_{ij} можно выбрать, например, в следующем виде:

$$\gamma_{ij}(\theta) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^i} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^j} \right\}. \quad (23.4.5)$$

Взяв определитель от обеих частей равенства (23.4.4), получим

$$\text{Det} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta'} \right) = \sqrt{\frac{\text{Det} \gamma(\theta')}{\text{Det} \gamma(\theta)}}.$$

Заметим, что это соотношение верно для любого выбора метрики. Заменяя в выражении (23.4.1) переменные θ на θ' , найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[g] = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \dots g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right\} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{\text{Det} \gamma(\theta)}} \int d^d \theta' \sqrt{\text{Det} \gamma(\theta')}. \quad (23.4.6) \end{aligned}$$

В силу произвольности параметра φ мы можем рассматривать θ и θ' в качестве независимых переменных и вычислять правую часть выражения (23.4.6) при любом значении θ , например $\theta^i = 0$. Нам будет удобно нормировать координаты θ^i и генераторы t_i таким образом, чтобы при $\theta \rightarrow 0$ элемент $g(\theta)$ группы H имел следующую форму:

$$g(\theta) \rightarrow 1 + 2i\theta^i t_i. \quad (23.4.7)$$

При таком выборе нормировки уравнение (23.4.6) принимает вид

$$\mathcal{J}[g] = (2i)^d \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \text{Tr}\{t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_d}\} \frac{1}{\sqrt{\text{Det } \gamma(0)}} \int d^d \theta' \sqrt{\text{Det } \gamma(\theta')}. \quad (23.4.8)$$

Особенно интересным для физических приложений является случай трехмерных многообразий, $d = 3$. Как показал Ботт [22], для любой простой группы Ли G произвольное отображение $S_3 \mapsto G$ можно непрерывным образом деформировать в отображение трехмерной сферы S_3 в так называемую стандартную подгруппу $SU(2)$ группы G . (Например, стандартная $SU(2)$ -подгруппа специальной унитарной группы $SU(n)$ состоит из матриц, которые действуют нетривиальным образом только на две первые компоненты векторов пространства фундаментального представления $SU(n)$. Отметим, что не всякая подгруппа $SU(n)$, изоморфная $SU(2)$, эквивалентна стандартной.) Произвольный элемент группы $SU(2)$ в двумерном представлении можно записать в виде

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \theta_4 + i\theta_3 & \theta_2 + i\theta_1 \\ -\theta_2 + i\theta_1 & \theta_4 - i\theta_3 \end{pmatrix} = \theta_4 + 2i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{t}, \quad (23.4.9)$$

где, как обычно,

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а θ_4 и $\boldsymbol{\theta}$ действительные числа, такие что $(\theta_4)^2 = 1 - \boldsymbol{\theta}^2$. (Обратите внимание, что уравнение (23.4.9) согласуется с нормировкой (23.4.7).) Метрика (23.4.5) в этом случае равна

$$\gamma_{ij}(\theta) = \delta_{ij} + \frac{\theta_i \theta_j}{1 - \boldsymbol{\theta}^2}, \quad (23.4.10)$$

откуда

$$\text{Det } \gamma(\theta) = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\theta}^2}. \quad (23.4.11)$$

Тогда уравнение (23.4.8) принимает следующий вид:

$$\mathcal{J}[g] = -8i\epsilon^{ijk} \text{Tr}\{t_i t_j t_k\} \int \frac{d^3 \theta}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\theta}^2}}.$$

Из равенств $4t_i t_j = \delta_{ij} + 2\epsilon^{ijl} t_l$ и $\text{Tr}\{t_l t_k\} = (1/2)\delta_{lk}$ следует соотношение

$$8\epsilon^{ijk} \text{Tr}\{t_i t_j t_k\} = 2i\epsilon^{ijk} \epsilon^{ijk} = 12i.$$

Далее, для “единичного” отображения g_1 интегрирование по внутренности трехмерного единичного шара ведется дважды (так как координата θ_4 может быть как положительной, так и отрицательной), и дает результат

$$\int \frac{d^3\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} = 2 \int_0^1 \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi^2.$$

Поэтому инвариант (23.4.1) для класса c , в который входят отображения, гомотопически эквивалентные g_1 , равен

$$\mathcal{J}(c) = 24\pi^2, \quad (23.4.12)$$

следовательно,

$$\mathcal{J}(c^\nu) = 24\pi^2 \nu. \quad (23.4.13)$$

Целое число ν называется *степеню отображения*. Результаты (23.4.12), (23.4.13) справедливы для такого выбора нормировки, при котором генераторы t_i стандартной $SU(2)$ -подалгебры имеют структурные константы ϵ_{ijk} и выполняется соотношение $\text{Tr}(t_i t_j) = (1/2)\delta_{ij}$. Если генераторы удовлетворяют более общим соотношениям $[t_i, t_j] = i g \epsilon_{ijk} t_k$, $\text{Tr}(t_i t_j) = (1/2) N g^2 \delta_{ij}$, то инвариант Картана–Маурера для отображения c^ν равен

$$\mathcal{J}(c^\nu) = 24\pi^2 N \nu. \quad (23.4.14)$$

Из выражений (23.4.13), (23.4.14) немедленно следует, что для любой простой группы Ли G гомотопическая группа $\pi_3(G)$ содержит подгруппу, изоморфную Z . С другой стороны, известно, что $\pi_3(G) = Z$ для любой простой группы Ли (см. приложение В). Таким образом, гомотопический класс отображения $g(\theta)$ для любой простой группы Ли полностью определяется классом эквивалентности этого отображения (уже в группе $\pi_3(SU(2))!$) после непрерывной деформации в стандартную $SU(2)$ -подгруппу.

§ 23.5. Инстантоны

Как было показано в § 23.1, топологически нетривиальные решения чисто калибровочной теории с простой калибровочной группой G в четырехмерном евклидовом пространстве соответствуют элементам гомотопической группы $\pi_3(G) = Z$. Такие нетривиальные четырехмерные конфигурации, получившие название инстантонов, обладают рядом физических приложений. Например, в следующем параграфе

мы продемонстрируем, что при вычислении функциональных интегралов необходимо учитывать вклад инстантонных конфигураций и флуктуаций около них.

Явный вид инстантонных решений был впервые получен Белаиным, Поляковым, Шварцем и Тюпкиным в работе [1]. Впоследствии 'т Хофт [23] доказал, что учет инстантонных вкладов в функциональные интегралы решает $U(1)$ -проблему, с которой мы столкнулись в § 19.10. В настоящем параграфе мы вначале обсудим свойства инстантонов, а затем объясним их роль при вычислении интегралов по траекториям.

В соответствии с уравнением (23.1.7) для конечности действия некоторой конфигурации калибровочного поля необходимо, чтобы калибровочное поле стремилось к чистой калибровке при $r \rightarrow \infty$ (напомним, что $r \equiv \sqrt{x_i x_i}$, причем по индексу $i = 1, 2, 3, 4$ подразумевается суммирование), т. е.

$$iA_i(x) \rightarrow g^{-1}(\hat{x})\partial_i g(\hat{x}), \quad (23.5.1)$$

где $A_i \equiv t_\alpha A_{\alpha i}$, а $g(\hat{x})$ представляет собой элемент калибровочной группы, зависящий от направления. Таким образом, топологический инвариант, который мы обсуждали в предыдущем параграфе, выражается через асимптотическое значение калибровочного поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[g] &\equiv \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \epsilon^{abc} \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^a} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^b} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^c} \right\} = \\ &= -i \lim_{r \rightarrow \infty} r^3 \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \epsilon^{abc} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \theta^a} \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial \theta^b} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \theta^c} \text{Tr} \{ A_i A_j A_k \}, \end{aligned} \quad (23.5.2)$$

где θ^a , $a = 1, 2, 3$ — произвольные координаты, параметризующие единичный вектор $\hat{x}$. Поверхностный интеграл (23.5.2) удобно переписать с помощью теоремы Гаусса. По аналогии с током (22.2.29) в пространстве Минковского мы можем определить ток в евклидовом пространстве:

$$G_l \equiv \epsilon_{lijk}^E \left[A_{\gamma i} F_{\gamma jk} - \frac{1}{3} C_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha i} A_{\beta j} A_{\gamma k} \right], \quad (23.5.3)$$

дивергенция которого равна

$$\partial_l G_l = \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl}^E F_{\alpha ij} F_{\alpha kl}. \quad (23.5.4)$$

(Здесь ϵ_{ijkl}^E обозначает абсолютно антисимметричный тензор, такой что $\epsilon_{1234}^E \equiv 1$.) Будем также считать, что структурные константы калибровочной алгебры Ли абсолютно антисимметричны. Тогда

$$\text{Tr} \{ t_\alpha t_\beta \} = \frac{1}{2} N \delta_{\alpha\beta}, \quad (23.5.5)$$

где постоянная N зависит от представления, в котором мы вычисляем след в уравнении (23.5.2). Таким образом, выражение (23.5.3) можно

переписать в виде

$$G_l \equiv \frac{2}{N} \epsilon_{lik}^E \operatorname{Tr} \left[A_i F_{jk} + \frac{2i}{3} A_i A_j A_k \right]. \quad (23.5.6)$$

Так как напряженность поля F_{kl} обращается в нуль достаточно быстро при $r \rightarrow \infty$, то на больших расстояниях

$$G_l \rightarrow \frac{4i}{3N} \epsilon_{lik}^E \operatorname{Tr} [A_i A_j A_k]. \quad (23.5.7)$$

Следовательно, топологический инвариант (23.5.2) равен

$$\mathcal{J}[g] = -\frac{3N}{4} \int (d^4 x)_E \partial_l G_l = -\frac{3N}{8} \epsilon_{ijk}^E \int (d^4 x)_E F_{\alpha ij} F_{\alpha kl}. \quad (23.5.8)$$

Таким образом, для того чтобы доказать существование топологически нетривиальных полевых конфигураций, достаточно продемонстрировать, что имеются решения уравнений поля, для которых интеграл от плотности Черна–Понтрягина $\epsilon_{ijk}^E F_{\alpha ij} F_{\alpha kl}$ отличен от нуля. Воспользуемся для этой цели так называемым *неравенством Богомольного* [10]. Из неравенства

$$0 \leq \int \left(F_{\alpha ij} \mp \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl}^E F_{\alpha kl} \right)^2 (d^4 x)_E$$

(здесь квадрат подразумевает очевидную свертку по повторяющимся индексам) вытекает следующая оценка для действия:

$$S[A] \geq \frac{1}{8} \left| \epsilon_{ijk}^E \int F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} (d^4 x)_E \right| = \frac{|\mathcal{J}[g]|}{3N}, \quad (23.5.9)$$

где $S[A]$ с точностью до постоянного множителя представляет собой евклидово действие:

$$S[A] \equiv \frac{1}{4} \int F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} (d^4 x)_E. \quad (23.5.10)$$

Ясно, что нижняя граница в выражении (23.5.9) достигается тогда и только тогда, когда калибровочное поле удовлетворяет условию самодуальности или антисамодуальности, т. е.

$$F_{\alpha ij} = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl}^E F_{\alpha kl}. \quad (23.5.11)$$

Поэтому функционал действия достигает абсолютного минимума в секторе с данным топологическим числом $\mathcal{J}$ на решении уравнений первого порядка (23.5.11), а значит, любое решение уравнений самодуальности или антисамодуальности также удовлетворяет уравнениям Янга–Миллса, которые имеют второй порядок.

Поляков с соавторами [1] нашли следующее решение уравнений (23.5.11):

$$iA_i(x) = \left(\frac{r^2}{r^2 + R^2} \right) g_1^{-1}(\hat{x}) \partial_i g_1(\hat{x}), \quad (23.5.12)$$

где R — произвольный масштабный фактор, а $g_1(\hat{x})$ обозначает элемент $SU(2)$ -подгруппы калибровочной группы, причем

$$g_1(\hat{x}) = \left(\frac{x_4 + 2i\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}}{r} \right), \quad (23.5.13)$$

а

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (23.5.14)$$

Легко видеть, что асимптотическое поведение этого решения согласуется с выражением (23.5.1), и функция $g(\hat{x})$ совпадает с “единичным” отображением (23.4.9), поэтому конфигурация (23.5.12) принадлежит к гомотопическому классу тождественного отображения, т. е. имеет степень отображения $\nu = 1$. Тогда, воспользовавшись выражениями (23.4.14) и (23.5.9) (которое в данном случае превращается в равенство), получим

$$S[A] = 8\pi^2. \quad (23.5.15)$$

Заметим также, что из уравнений (23.5.10), (23.5.11) (со знаком плюс) следует равенство

$$\epsilon_{ijkl}^E \int F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} (d^4 x)_E = 64\pi^2. \quad (23.5.16)$$

Отметим, что решение (23.5.12) не является единственным. В самом деле, это решение можно сдвигать и преобразовывать с помощью калибровочной группы. Оказывается, что таким образом может быть получено любое решение уравнений поля с единичным топологическим числом [24].

Обсудим теперь инстантоны с произвольным топологическим числом. Прежде всего напомним, что существование нетривиальных конфигураций с топологическим числом, равным ν , следует из существования инстантона (23.5.12) с $\nu = 1$ (см. предыдущий параграф). Например, в качестве решения, для которого ν равно положительному целому числу $\mathcal{N}$, можно взять конфигурацию, содержащую $\mathcal{N}$ инстантонов, находящихся друг от друга на настолько большом расстоянии, что нелинейные члены в уравнениях поля являются несущественными. Решение с топологическим числом $\nu = -1$ получается посредством замены величины g_1 в уравнении (23.5.12) на g_1^{-1} . Как и в случае положительных ν , конфигурация с топологическим числом $\nu = -\mathcal{N}$ представляет собой комбинацию $\mathcal{N}$ инстантонов с зарядом $\nu = -1$, размещенных далеко друг от друга. Аналоги уравнений (23.5.15), (23.5.16) для конфигурации с произвольным топологическим числом ν записываются следующим образом:

$$S[A] = 8\pi^2 |\nu|, \quad (23.5.17)$$

$$\epsilon_{ijkl}^E \int F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} (d^4 x)_E = 64\pi^2 \nu. \quad (23.5.18)$$

Напомним, что эти результаты справедливы для калибровочного поля, нормированного в соответствии с выражениями (23.5.11)–(23.5.13). При такой нормировке действие $I[A]$ равно $-S[A]$ с точностью до числового множителя:

$$I[A] = -\frac{S[A]}{g^2} = -\frac{8\pi^2|\nu|}{g^2}, \quad (23.5.19)$$

где g обозначает обычную константу связи. Отметим, что если, как обычно, включать множитель g в генераторы и структурные константы, то действие $I[A]$ совпадает с $-S[A]$, а величины $A_{\alpha\mu}$ и $F_{\alpha\mu\nu}$ содержат множитель $1/g$. Таким образом, при данной нормировке действие инстантонной конфигурации вновь равно $-8\pi^2/g^2$, а формула (23.5.18) меняется и принимает вид

$$\epsilon_{ijkl}^E \int F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} (d^4x)_E = \frac{64\pi^2\nu}{g^2}. \quad (23.5.20)$$

Инстантоны обладают тем замечательным свойством, что их вклад в физические процессы является непертурбативным, т. е. не может быть получен ни в каком порядке теории возмущений. В самом деле, вклад конфигурации с топологическим числом $\nu \neq 0$ в евклидов функциональный интеграл подавлен множителем $\exp(I[A]) = \exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$. Как будет показано в § 23.7, коэффициент при этой экспоненте представляет собой отрицательную степень $-n$ константы связи g , причем для наиболее интересного случая КХД постоянная n равна 12. Далее, функция $g^{-n} \exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$, равно как и все ее производные по g , обращается в нуль при $g = 0$, что и доказывает непертурбативность инстантонных эффектов.

Тем не менее из этого утверждения совсем не следует, что инстантонные вклады малы. Как мы видели в гл. 18, в квантовой хромодинамике константа связи зависит от энергетического масштаба процессов и становится большой при малых энергиях. Эффективный масштаб энергии, который надо использовать при вычислении действия (23.5.19) инстантонной конфигурации, вообще говоря, определяется квантовыми флуктуациями (см. § 23.7), но из соображений размерности сразу следует, что по порядку величины этот масштаб равен $1/R$, где R — размер инстантона (23.5.12). (Заметим, что размер инстантона не является фиксированной величиной; мы должны интегрировать по размеру инстантонной конфигурации с некоторым весом, который зависит от рассматриваемого процесса.) В квантовой хромодинамике бегущая константа связи g_μ при больших μ определяется выражением (18.7.7):

$$g_\mu^2 = \frac{8\pi^2}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda)},$$

где $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$, а $\Lambda \approx 250$ МэВ — масштабный параметр квантовой хромодинамики. Таким образом, для инстантонов малого размера

множитель $\exp(-8\pi^2/g_{1/R}^2)$ равен

$$\exp\left(-\frac{8\pi^2}{g_{1/R}^2}\right) = (R\Lambda)^{\beta_0}.$$

Для инстантонов большого размера, $R\Lambda \gg 1$, мы не можем вычислить множитель $\exp(-8\pi^2/g^2)$ точно, но очевидно, что в этом случае экспоненциальное подавление инстантонных вкладов отсутствует.

Непосредственно после открытия инстантонов многие физики полагали, что учет инстантонных вкладов позволит существенно улучшить точность вычислений характеристик различных процессов в квантовой хромодинамике. Несмотря на то что эти надежды не оправдались, некоторые инстантонные эффекты, которые мы обсуждаем ниже, очень сильно изменили наше понимание квантовой хромодинамики и других калибровочных теорий на *качественном* уровне.

Прежде всего, из того простого факта, что в теории имеются решения, для которых интеграл (23.5.15) отличен от нуля, немедленно следует решение $U(1)$ -проблемы. Действительно, при *глобальном* $U(1)$ -преобразовании вида $\psi \rightarrow \exp(i\gamma_5\alpha)\psi$ мера интегрирования по кварковым полям меняется в соответствии с уравнением (22.2.10):

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow \exp\left\{i\alpha \int \mathcal{A}(x)(d^4x)_E\right\}[d\psi][d\bar{\psi}], \quad (23.5.21)$$

где аномальная функция $\mathcal{A}(x)$ определяется выражением (22.2.45), в котором теперь матрица t равняется единице:

$$\mathcal{A}(x) \rightarrow \frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{ijkl}^E F_{ij\alpha} F_{kl\beta} \text{tr } t_\alpha t_\beta. \quad (23.5.22)$$

Существование такой аномалии само по себе не решает $U(1)$ -проблему, так как величина (23.5.22) представляет собой полную производную, а значит, интеграл от нее по всему пространству равен нулю для несингулярных полей, достаточно быстро убывающих на бесконечности. Но инстантонное решение убывает лишь по закону $1/r$, и интеграл от плотности (23.5.22) для такого решения отличен от нуля (см. уравнения (23.5.18) и (23.5.5)):

$$\int (d^4x)_E \mathcal{A}(x) = 2N\nu. \quad (23.5.23)$$

Отсюда мы видим, что аномалия *действительно* нарушает киральную симметрию.

Эффекты инстантонов также оказываются важными в теории электрослабых взаимодействий. Как мы видели в § 22.4, токи барионного и лептонного чисел содержат аномалии, возникающие из-за взаимодействия кварков и лептонов с $SU(2) \times U(1)$ -калибровочным полем стандартной модели. Таким образом, инстантонные конфигурации $SU(2)$ -калибровочного поля нарушают законы сохранения барионного и лептонного чисел [25]. Тем не менее, как было замечено

в § 22.4, имеются токи, такие как ток разности барионного и лептонного чисел, токи разностей электронного, мюонного и тау-лептонного чисел, сохранение которых не нарушается аномалиями или чем-либо еще. То есть в любом процессе с несохранением лептонного и барионного чисел разность числа барионов и лептонов обязана сохраняться. Из этого, например, следует, что распад протона или дейтрона запрещен, а процесс $\text{He}^3 \rightarrow e^+ + \mu^+ + \bar{\nu}_\tau$ возможен. Амплитуда такого процесса подавлена множителем $\exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$, где g теперь представляет собой константу связи $SU(2)$ -калибровочной теории $e/\sin\theta$ на масштабе порядка m_Z . Полагая $e^2/4\pi = 1/129$ (см. § 18.2) и $\sin^2\theta = 0,23$, получим, что фактор подавления одноинстантонных вкладов равен $\exp(-373)$. Таким образом, очень маловероятно, что когда-либо удастся наблюдать распад He^3 в антилептоны.

* * *

Рассмотрим теперь подход [26], который несколько отличается от рассмотренного выше и позволяет лучше понять некоторые особенности инстантонов. Будем работать во временной калибровке, $A_{\alpha 4}(\mathbf{x}, x_4) = 0$, тогда при $x_4 \rightarrow \pm\infty$ калибровочное поле должно стремиться к чистой калибровке, не зависящей от времени:

$$i\mathbf{A}(\mathbf{x}, x_4) \equiv it_\alpha \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{x}, x_4) \rightarrow g_\pm^{-1}(\mathbf{x}) \nabla g_\pm(\mathbf{x}), \quad (23.5.24)$$

где $g_\pm(\mathbf{x})$ представляет собой элемент калибровочной группы в представлении, порождаемом генераторами t_α . Полагая, что $\mathbf{A}_\alpha(\mathbf{x}, x_4)$ обращается в нуль при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ ¹⁾, мы получим, что элемент калибровочной группы $g_\pm(\mathbf{x})$ стремится к постоянному пределу $g_\pm$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Следовательно, отождествив все точки пространственной бесконечности $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, мы можем рассматривать бесконечно удаленные трехмерные гиперплоскости $x_4 \rightarrow \infty$ как трехмерные сферы. Тогда, пользуясь теми же аргументами, что и при выводе (23.4.13), мы можем записать

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \int d^3x \operatorname{Tr}\{g_\pm^{-1}(\mathbf{x}) \partial_i g_\pm(\mathbf{x}) g_\pm^{-1}(\mathbf{x}) \partial_j g_\pm(\mathbf{x}) g_\pm^{-1}(\mathbf{x}) \partial_k g_\pm(\mathbf{x})\} = \\ = 24\pi^2 n_\pm, \end{aligned} \quad (23.5.25)$$

где $n_\pm$ — некоторые целые числа. Далее, интеграл по границе четырехмерного пространства в формуле (23.5.2) можно рассматривать как разность интегралов по плоскостям $x_4 = +\infty$ и $x_4 = -\infty$, поэтому из уравнений (23.5.8) и (23.5.18) мы имеем

$$\nu = n_+ - n_-. \quad (23.5.26)$$

¹⁾ Оправданность такого предположения вызвана тем, что $\pi_2(G) = 0$, а значит, можно сделать калибровочное преобразование, после применения которого поле $\mathbf{A}$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ обратится в нуль.

Таким образом, экспоненциальный множитель $\exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$ в уравнении (23.5.19) можно рассматривать как амплитуду перехода конфигурации с пространственным топологическим числом n_- при $x_4 \rightarrow -\infty$ в конфигурацию с топологическим числом n_+ при $x_4 \rightarrow +\infty$. Экспоненциальная форма этого множителя соответствует тому, что такой переход представляет собой процесс *туннелирования*, т. е. никакая непрерывная деформация исходной конфигурации калибровочных полей не может дать конфигурацию с другим топологическим числом.

Интерпретация фактора $\exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$ в качестве некоторой амплитуды туннелирования наталкивает на мысль, что при высоких температурах порядка 1 ТэВ процессы, в которых не сохраняются барионное и лептонные числа, будут происходить за счет тепловых флуктуаций над барьером, а не за счет туннелирования, и вероятность этих процессов станет велика [27]. Такие явления, возможно, имеют важное значение в космологии ранней Вселенной. Следует отметить, что правила отбора, о которых мы упоминали выше, а именно сохранение разности плотностей барионного и лептонного чисел, а также разности плотностей трех типов лептонов, остаются в силе и для термоактивационных процессов.

§ 23.6. θ -угол

Как мы видели выше, в квантовой хромодинамике существуют конфигурации с заданным целым топологическим числом. Тем не менее мы оставили открытым вопрос о том, почему такие конфигурации важны для физических процессов и почему мы должны учитывать их вклад при вычислении функциональных интегралов. Сейчас мы продемонстрируем, каким образом необходимость учета топологически нетривиальных конфигураций следует из первых принципов.

Предположим, что конфигурации с топологическим числом ν входят в интеграл по траекториям с некоторым весом $f(\nu)$, причем, возможно, какие-то из этих весовых множителей равны нулю. Среднее значение некоторой наблюдаемой $\mathcal{O}$, находящейся в большом пространственно-временном объеме Ω , может быть записано в следующем виде:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\Omega = \frac{\sum_\nu f(\nu) \int_\nu [d\phi] \exp(I_\Omega[\phi]) \mathcal{O}[\phi]}{\sum_\nu f(\nu) \int_\nu [d\phi] \exp(I_\Omega[\phi])}, \quad (23.6.1)$$

где ϕ обозначает все поля, входящие в теорию; индекс ν указывает на то, что при интегрировании мы учитываем только конфигурации с топологическим числом ν ; наконец, $I_\Omega[\phi]$ представляет собой интеграл от лагранжевой плотности по объему Ω . Разделим объем Ω на две

больших части Ω_1 и Ω_2 таким образом, чтобы наблюдаемая $\mathcal{O}$ находилась в объеме Ω_1 . Тогда вместо интегрирования по конфигурациям с топологическим числом ν во всем объеме мы можем интегрировать по конфигурациям полей в объемах Ω_1 и Ω_2 с топологическими числами ν_1 и ν_2 , удовлетворяющими соотношению $\nu_1 + \nu_2 = \nu$. Таким образом, среднее оператора $\mathcal{O}$ принимает вид

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\Omega = \frac{\sum_{\nu_1, \nu_2} f(\nu_1 + \nu_2) \int_{\nu_1} [d\phi] \exp(I_\Omega[\phi]) \mathcal{O}[\phi] \int_{\nu_2} [d\phi] \exp(I_\Omega[\phi])}{\sum_{\nu_1, \nu_2} f(\nu_1 + \nu_2) \int_{\nu_1} [d\phi] \exp(I_\Omega[\phi]) \int_{\nu_2} [d\phi] \exp(I_\Omega[\phi])}. \quad (23.6.2)$$

В соответствии с общими рассуждениями, приведенными в гл. 4, выражение (23.6.2) не должно зависеть от выбора объема Ω_2 . Очевидно, что факторы, относящиеся к части пространства Ω_2 , выпадут из уравнения (23.6.2) в том и только в том случае, если

$$f(\nu_1 + \nu_2) = f(\nu_1)f(\nu_2).$$

Для того чтобы это равенство было справедливым, множитель $f(\nu)$ должен иметь форму

$$f(\nu) = \exp(i\theta\nu), \quad (23.6.3)$$

где θ — некоторый параметр. Отсюда, в частности, следует, что учет топологически нетривиальных конфигураций необходим при вычислении функциональных интегралов, так как в противном случае инстантон в части пространства Ω_1 должен был бы компенсироваться инстантоном в объеме Ω_2 , и, таким образом, мы бы получили, что наблюдаемые в некоторой точке пространства зависят от процессов, происходящих сколь угодно далеко от этой точки.

Множитель $f(\nu)$ можно записать в более привычном виде. В соответствии с уравнением (23.5.18), выбирая нормировку калибровочного поля так, чтобы стандартная $SU(2)$ -подгруппа обладала структурными константами ϵ_{ijk} , степень отображения можно представить в интегральной форме следующим образом:

$$\nu = \frac{1}{64\pi^2} \int (d^4x)_E \epsilon_{ijkl}^E F_{\alpha ij} F_{\alpha kl}. \quad (23.6.4)$$

Удобно переписать это выражение как интеграл по пространству Минковского. Воспользовавшись равенствами $(d^4x)_E = i d^4x$, $F_{\alpha 34} = -iF_{\alpha 30}$, $\epsilon^{1230} = -1$, получим

$$\nu = -\frac{1}{64\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma} F_{\alpha\kappa\lambda} F_{\alpha\rho\sigma}. \quad (23.6.5)$$

Таким образом, введение весового множителя (23.6.3) эквивалентно добавлению члена

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{\theta}{64\pi^2} \epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma} F_{\alpha\kappa\lambda} F_{\alpha\rho\sigma} \quad (23.6.6)$$

в плотность лагранжиана. Как было отмечено в § 15.2, включение такого члена в лагранжиан неабелевой калибровочной теории возможно при любом действительном параметре θ .

Включение члена (23.6.6) в лагранжеву плотность нарушит С- и СР-инвариантность. Можно было бы просто положить $\theta = 0$, но это обесценило бы одно из достижений квантовой хромодинамики, а именно тот факт, что она автоматически обеспечивает сохранение С- и СР-инвариантностей сильных взаимодействий, несмотря на то, что они, очевидно, нарушаются слабыми взаимодействиями.

Для того чтобы понять физический смысл θ -члена (23.6.6), переопределим фермионные поля следующим образом:

$$\psi_f \rightarrow \exp(i\gamma_5 \alpha_f) \psi_f, \quad (23.6.7)$$

где f — индекс аромата, а α_f — некоторое множество действительных фаз. В соответствии с уравнениями (22.2.10), (22.2.24) такое преобразование вызовет изменение меры функционального интегрирования по фермионным полям:

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow \exp\left\{\frac{-i}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\alpha}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\rho\sigma} \sum_f \alpha_f\right\} [d\psi][d\bar{\psi}]. \quad (23.6.8)$$

(Заметим, что мы используем генераторы, удовлетворяющие нормировке $\text{Tr}(t_{\alpha} t_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta}/2$.) Сравнивая этот результат с выражением (23.6.6), мы видим, что он эквивалентен замене параметра θ на $\theta + 2 \sum_f \alpha_f$:

$$\theta \rightarrow \theta + 2 \sum_f \alpha_f. \quad (23.6.9)$$

Переопределение фермионных полей также повлечет за собой изменение фермионных массовых членов лагранжиана, которые можно записать в виде

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} \sum_f \mathcal{M}_f \bar{\psi}_f (1 + \gamma_5) \psi_f - \frac{1}{2} \sum_f \mathcal{M}_f^* \bar{\psi}_f (1 - \gamma_5) \psi_f, \quad (23.6.10)$$

причем в случае, когда $\mathcal{M}_f$ комплексны, законы сохранения Р и СР-четности нарушены. Преобразование (23.6.7) изменяет фазы этих параметров следующим образом:

$$\mathcal{M}_f \rightarrow \exp(2i\alpha_f) \mathcal{M}_f. \quad (23.6.11)$$

Очевидно, что простая замена переменных интегрирования в функциональном интеграле не может повлиять на физические свойства теории, поэтому наблюдаемые величины не могут зависеть от параметров θ или $\text{Arg } \mathcal{M}_f$ по отдельности, а определяются лишь комбинацией

$$\exp(-i\theta) \prod_f \mathcal{M}_f. \quad (23.6.12)$$

В частности, мы всегда можем определить фермионные поля так, чтобы параметр θ равнялся нулю, но при этом, возможно, придется ввести фазы, нарушающие P- и CP-инвариантность, в массовые параметры.

Это рассуждение показывает, что если хотя бы один из кварков был безмассовым, то θ -угол никак не влиял бы на физические эффекты, и в КХД не было бы несохранения P- и CP-четности. Однако, как следует из анализа отношений масс кварков, приведенного в § 19.7, все кварки обладают ненулевыми массами (заметим для справки, что существует мнение, согласно которому учет членов второго по m_s порядка мог бы привести к нулевой массе m_u [28].) Как бы то ни было, u и d кварки являются очень легкими, что вызывает подавление эффектов, возникающих при наличии ненулевого параметра θ . Как мы видели в § 19.4, массы m_u и m_d по порядку величины равны m_π^2/m_N (здесь m_N — характерный массовый масштаб КХД), поэтому можно было бы предположить, что эффекты θ -члена подавлены параметром m_π в четвертой степени, что, однако, оказывается неверным. В самом деле, при несохранении P- и CP-четности процесс исчезновения π^0 в вакуум обладает ненулевой амплитудой, пропорциональной m_π^4 , но диаграмма-головастик, соответствующая этому процессу, также включает пионный пропагатор, который пропорционален m_π^{-2} . Следовательно, физические эффекты ненулевого угла θ оказываются малыми порядка m_π^2 , а не m_π^4 .

В частности, если мы определим фермионные поля так, что массовые параметры $\mathcal{M}_f$ будут действительны, то при ненулевом угле θ нейтрон приобретет нарушающий P и T-четность дипольный момент d_n , пропорциональный $|\theta|$ и m_π^2 . Пользуясь размерными соображениями, мы можем сразу записать

$$d_n \approx |\theta| e m_\pi^2 / m_N^3 \approx 10^{-16} |\theta| e \text{ см.} \quad (23.6.13)$$

Как известно, дипольный момент нейтрона меньше, чем $10^{-25} e \text{ см}$, откуда следует, что $|\theta| < 10^{-9}$.

Для того чтобы естественным образом объяснить, почему параметр θ столь мал, Печчеи и Квин [30] предложили теорию, в рамках которой угол θ имеет смысл динамической переменной и может релаксировать к минимуму эффективного потенциала, в котором P- и CP-симметрии восстанавливаются. Эта идея была развита в работах [31], в которых было показано, что такая физическая трактовка угла θ требует присутствия в теории легкой бесспиновой частицы, названной *аксионом*. Несмотря на то что аксион, фигурирующий в первоначальной теории Печчеи–Квина, не удалось наблюдать экспериментально, существуют другие модели подобного рода [32], в которых аксион слишком слабо взаимодействует с обычными полями материи, для того чтобы мы могли видеть его в лабораторных опытах.

Общая черта аксионных моделей состоит в том, что в таких теориях имеется $U(1)$ -симметрия, которая спонтанно нарушается при энергиях гораздо больших, чем характерный энергетический масштаб КХД. Эту симметрию также нарушает аномалия, содержащая глюонные поля. В соответствии с общим формализмом, развитым в гл. 19 и 22, низкоэнергетическая эффективная теория поля должна содержать голдстоуновское бозонное поле ϕ , причем при преобразовании

$$\phi \rightarrow \phi + F_\phi \epsilon \quad (23.6.14)$$

эффективный лагранжиан изменяется следующим образом:

$$\delta \mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{\epsilon A}{64\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\alpha^{\rho\sigma}, \quad (23.6.15)$$

где A представляет собой безразмерный параметр порядка единицы, характеризующий аномалию, а F_ϕ по порядку величины совпадает с энергетическим масштабом, на котором происходит спонтанное нарушение симметрии. При этом мы предполагаем, что поле ϕ нормировано каноническим образом. Тогда члены эффективного лагранжиана, содержащие ϕ , равны

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{64\pi^2} \frac{\phi}{M} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\alpha^{\rho\sigma} + \dots, \quad (23.6.16)$$

где $M = F_\phi/A$, а “...” обозначает возможные члены взаимодействия, содержащие производные ϕ . Сравнивая уравнения (23.6.16) и (23.6.6), мы видим, что при постоянном значении ϕ все физические наблюдаемые зависят не от ϕ и θ по отдельности, а лишь от комбинации $\theta + \phi/M$ (Это будет справедливо при выборе θ , для которого массовые параметры $\mathcal{M}_f$ действительны; в противном случае наблюдаемые будут определяться величиной $\theta - \sum_f \text{Arg } \mathcal{M}_f + \phi/M$.) Если все члены

теории, за исключением θ -члена и взаимодействия поля ϕ с глюонами из уравнения (23.6.16), сохраняют P- и CP-четность, то эффективный потенциал является четной функцией $\theta + \phi/M$, поэтому он имеет экстремум в точке $\theta + \phi/M$, в которой P- и CP-симметрии восстанавливаются. На самом деле P и CP не являются точными симметриями в природе, так как они нарушаются слабыми взаимодействиями, но это вызывает лишь незначительное отклонение среднего значения ϕ от $-M\theta$ [33].

Мы можем получить многие свойства аксионов, не задаваясь конкретной моделью, а пользуясь лишь общими методами эффективной теории поля. Наиболее общий аксионный лагранжиан, содержащий θ -член и взаимодействия с u и d кварками в ведущем порядке по $1/M$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi = & -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{64\pi^2} \left[\frac{\phi}{M} + \theta \right] \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\alpha^{\rho\sigma} - \\ & - \frac{if_u}{M} \partial_\mu \phi \bar{u} \gamma_5 \gamma^\mu u - \frac{if_d}{M} \partial_\mu \phi \bar{d} \gamma_5 \gamma^\mu d, \end{aligned} \quad (23.6.17)$$

где f_u и f_d — безразмерные константы связи, которые, как ожидается, по порядку величины равны единице. Как следует из уравнения (23.6.8), переопределение (23.6.7) кварковых полей вызывает изменение величины $\phi(x)/M + \theta$, входящей в лагранжиан (23.6.17):

$$\frac{\phi(x)}{M} + \theta \rightarrow \frac{\phi(x)}{M} + \theta + 2[\alpha_u(x) + \alpha_d(x)]. \quad (23.6.18)$$

Выбирая

$$\alpha_f = -(\theta + \phi/M)c_f/2,$$

где постоянные коэффициенты c_f удовлетворяют условию $c_d + c_u = 1$, мы можем избавиться от члена лагранжиана, пропорционального $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\alpha}^{\mu\nu} F_{\alpha}^{\rho\sigma}$, но при этом массовый член в лагранжевой плотности КХД при низких энергиях примет вид

$$\mathcal{L}_m = -m_u \bar{u} \exp[-ic_u(\theta + \phi/M)\gamma_5] u - m_d \bar{d} \exp[-ic_d(\theta + \phi/M)\gamma_5] d. \quad (23.6.19)$$

Кроме того, кинематическая часть кваркового лагранжиана даст член взаимодействия, содержащий производные поля ϕ :

$$\frac{1}{2} ic_u (\bar{u} \gamma^{\mu} \gamma_5) u \partial_{\mu} \phi / M + \frac{1}{2} ic_d (\bar{d} \gamma^{\mu} \gamma_5) d \partial_{\mu} \phi / M, \quad (23.6.20)$$

поэтому коэффициенты f_u и f_d в уравнении (23.6.17) заменятся на

$$f'_u = f_u - c_u/2 \quad \text{и} \quad f'_d = f_d - c_d/2$$

соответственно. Пользуясь методами § 19.5 (только теперь вместо протона и нейтрона мы рассматриваем u и d кварки), легко получить низкоэнергетический лагранжиан для пионов и аксиона. Для этого следует сделать замены

$$\begin{aligned} \bar{u}u &\rightarrow v \cos(\pi^0/F_{\pi}), & \bar{d}d &\rightarrow v \cos(\pi^0/F_{\pi}), \\ \bar{u}\gamma_5 u &\rightarrow iv \sin(\pi^0/F_{\pi}), & \bar{d}\gamma_5 d &\rightarrow -iv \sin(\pi^0/F_{\pi}), \\ i\bar{u}\gamma^{\mu}\gamma_5 u &\rightarrow \frac{1}{2} F_{\pi} \partial^{\mu} \pi^0 + \dots, & i\bar{d}\gamma^{\mu}\gamma_5 d &\rightarrow \frac{1}{2} F_{\pi} \partial^{\mu} \pi^0 + \dots, \end{aligned} \quad (23.6.21)$$

где $v = \langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$, а “...” обозначает члены, не имеющие однопионного полюса. Из уравнений (23.6.19) и (23.6.20) находим эффективный пионно-аксионный лагранжиан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \pi^0 \partial^{\mu} \pi^0 - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi' \partial^{\mu} \phi' - \left(\frac{f'_u - f'_d}{2M} \right) F_{\pi} \partial_{\mu} \phi' \partial^{\mu} \pi^0 - \\ & - m_u v \cos\left(\frac{\pi^0}{F_{\pi}} - \frac{c_d \phi'}{M}\right) - m_d v \cos\left(\frac{\pi^0}{F_{\pi}} + \frac{c_d \phi'}{M}\right), \end{aligned} \quad (23.6.22)$$

где ϕ' представляет собой разность аксионного поля и его среднего, т. е.

$$\phi' \equiv \phi - \langle \phi \rangle = \phi + M\theta. \quad (23.6.23)$$

Так как единственным ограничением при выборе c_u и c_d является условие $c_u + c_d = 1$, то мы можем исключить перекрестный член $\partial_\mu \phi \partial^\mu \pi^0$, положив

$$c_u = 1/2 + f_u - f_d \quad \text{и} \quad c_d = 1/2 + f_d - f_u,$$

так что $f'_u = f'_d$. Квадратичная часть лагранжиана (23.6.22) равна

$$\mathcal{L}_{\text{квэд}} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi' - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^0}{\phi'} \right)^T M_0^2 \left(\frac{\pi^0}{\phi'} \right), \quad (23.6.24)$$

где

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} (m_u + m_d)v/F_\pi^2 & (-m_u c_u + m_d c_d)v/F_\pi M \\ (-m_u c_u + m_d c_d)v/F_\pi M & (m_u c_u^2 + m_d c_d^2)v/M^2 \end{pmatrix}. \quad (23.6.25)$$

При $M \gg F_\pi$ одно из собственных значений матрицы M_0^2 равно

$$(m_u + m_d)v/F_\pi^2,$$

что, в соответствии с выражением (19.7.20), представляет собой массу π^0 , возведенную в квадрат. Таким образом, второе собственное значение дает массу аксиона:

$$m_a^2 = \frac{v}{M^2} \frac{m_d m_u}{m_d + m_u} = \frac{F_\pi^2}{M^2} \frac{m_d m_u}{(m_d + m_u)^2} m_\pi^2. \quad (23.6.26)$$

Из отношения масс кварков, полученного в § 19.7, мы находим, что $m_a = 13 \text{ МэВ}/M$ (ГэВ).

С помощью описанного выше формализма мы также можем сделать некоторые заключения о взаимодействии аксионов с адронами. Собственный вектор матрицы M_0^2 , отвечающий собственному значению m_a^2 , имеет составляющую, равную

$$(m_u c_u - m_d c_d)F_\pi / (m_u + m_d)M,$$

вдоль первоначального направления π^0 . Как мы уже упоминали, это будет ведущий член аксион-адронного взаимодействия. Таким образом, отношение амплитуд рождения аксионов и пионов по порядку величины равно F_π/M . Тот факт, что аксионы не наблюдаются при столкновениях адронов, показывает, что $M > 3 \text{ ТэВ}$, и это противоречит первоначальным ожиданиям [30, 31] того, что $U(1)$ -симметрия должна нарушаться тем же средним скалярного поля порядка $0,3 \text{ ТэВ}$, что и электрослабая группа $SU(2) \times U(1)$.

Рассматривая M в качестве независимого параметра [32], много большего, чем масштаб нарушения симметрии в электрослабой теории, можно объяснить, почему мы не наблюдаем аксионов в экспериментах на ускорителях и реакторах, но даже при таком подходе параметр M должен удовлетворять некоторым ограничениям, следующим из астрофизических наблюдений. Как показывают оценки скорости охлаждения красных гигантских звезд [34], параметр M должен удовлетворять неравенству $M > 10^7 \text{ ГэВ}$, а наблюдения сверх-

новой SN1987A налагают ограничение $M > 10^{10}$ ГэВ¹). С другой стороны, пользуясь космологическими аргументами, можно получить оценку сверху $M < 10^{12}$ ГэВ. Таким образом, имеется узкий диапазон разрешенных значений параметра M , поэтому теория аксионов продолжает представлять некоторый интерес.

§ 23.7. Квантовые флуктуации около протяженных полевых конфигураций

Топологически нетривиальные четырехмерные полевые конфигурации, такие как инстантоны, дают лишь вклад нулевого порядка в функциональные интегралы. В этом параграфе мы кратко обсудим эффекты квантовых флуктуаций около таких конфигураций.

Рассмотрим множество полей $\phi(x)$, динамика которых описывается евклидовым действием $I[\phi]$, и предположим, что действие $I[\phi]$ стационарно на полевых конфигурациях $\phi_{\nu,u}$, причем индекс ν отвечает топологическому числу конфигурации, а индекс u обозначает непрерывные коллективные координаты, которые задают различные стационарные конфигурации. Например, для случая инстантонов ν представляет собой степень отображения, целое число, в то время как u включает в себя координаты центра инстантона, его радиус, а также ориентацию по отношению к калибровочной группе. Мы можем записать евклидов функциональный интеграл в следующем виде:

$$\int [d\phi] \exp(I[\phi]) \mathcal{O} = \sum_{\nu} \int du \int_u [d\phi'] \exp(I[\phi_{\nu,u} + \phi']) \mathcal{O}, \quad (23.7.1)$$

где индекс интеграла по флуктуациям ϕ' указывает на то, что интегрирование проводится только по тем флуктуациям, которые не меняют коллективных параметров конфигурации, а $\mathcal{O}$ представляет собой некоторое произведение локальных функций полевых операторов. В силу стационарности действия $I[\phi]$ на конфигурации $\phi = \phi_{\nu,u}$

¹⁾ При $M > 10^7$ ГэВ масса аксиона должна быть меньше 1 эВ, поэтому красные гигантские звезды достаточно горячие для того, чтобы рождался аксионы. Как ожидается, отношение скоростей распада аксиона и пиона в пару фотонов приблизительно равно $(F_{\pi}/M)^2$, умноженному на отношение $(m_a/m_{\pi})^3$ фазовых объемов, т. е.

$$\frac{\Gamma(a \rightarrow \gamma + \gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma)} = \left(\frac{F_{\pi}}{M}\right)^2 \left(\frac{m_a}{m_{\pi}}\right)^3 \approx \left(\frac{F_{\pi}}{M}\right)^5.$$

Таким образом, при $M > 10^7$ ГэВ время жизни аксиона должно быть больше чем 10^{24} секунд, что вполне достаточно для того, чтобы аксион мог пролетать даже космические расстояния перед распадом.

его разложение до второго порядка по флуктуациям дает

$$I[\phi_{\nu,u} + \phi'] \simeq I_\nu - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y K_{xl,ym}(\nu, u) \phi'_l(x) \phi'_m(y), \quad (23.7.2)$$

где l, m обозначают спин и сорт частиц и $I_\nu = I[\phi_{\nu,u}]$ зависит только от топологического числа ν , так как мы предположили, что действие стационарно на всех конфигурациях $\phi_{\nu,u}$. Таким образом, интеграл по флуктуациям ϕ' в уравнении (23.7.1) равен сумме всевозможных спариваний полей, входящих в оператор $\mathcal{O}$, умноженной на величину, которая равна (в случае действительных бозонных полей) $[\text{Det } K(\nu, u)]^{-1/2}$, причем подразумевается, что оператор K действует только в подпространстве флуктуаций, не изменяющих коллективные координаты u . Этот множитель удобно записать в виде произведения по собственным значениям “матрицы” $K(\nu, u)$:

$$(\text{Det } K(\nu, u))^{-1/2} = \prod_n' \lambda_n^{-1/2}(\nu, u), \quad (23.7.3)$$

где штрих показывает, что мы должны исключить “нулевые моды”, т. е. нулевые собственные значения K , собственные функции которых соответствуют изменению коллективных параметров.

Теперь мы готовы доказать результат относительно зависимости вкладов инстантонов с различным топологическим числом от константы связи, который был использован в § 23.5. Определим поля в теории таким образом, чтобы действие имело вид $I[\phi, g] = g^{-2} I_1[\phi]$, где $I_1[\phi]$ не зависит от константы связи. (Такой выбор в теории Янга–Миллса соответствует тому, что мы берем в качестве калибровочного поля канонически нормированное поле, умноженное на g .) Тогда каждое собственное значение K пропорционально g^{-2} , и множитель (23.7.3) пропорционален константе связи g в степени, равной количеству ненулевых собственных значений оператора K . Эта степень, конечно, бесконечна, но мы можем рассматривать ее как число *всех* собственных значений K , которое также бесконечно, но не зависит от топологического числа ν , минус число $\mathcal{N}(\nu)$ нулевых мод, равное количеству коллективных координат, которое конечно и зависит от ν . Мы заключаем, что вклад флуктуаций около конфигурации топологического типа ν наравне с факторами, которые одинаковы для всех ν , содержит также константу связи в степени, равной количеству $\mathcal{N}(\nu)$ коллективных параметров, взятому со знаком минус, т. е.

$$g^{-\mathcal{N}(\nu)}. \quad (23.7.4)$$

Эта оценка основана на разложении (23.7.2), которое соответствует однопетлевому приближению, поэтому при учете членов высшего порядка выражение (23.7.4) домножается на ряд по степеням g , при этом коэффициенты этого ряда зависят от конкретного вида оператора $\mathcal{O}$, входящего в функциональный интеграл.

Применим эти рассуждения к инстантонам. Очевидно, что конфигурации с $\nu = 0$ не имеют коллективных координат, поэтому вклад флуктуаций около этих конфигураций в функциональный интеграл представляет собой просто ряд по степеням g . Далее, конфигурации с топологическим числом $\nu = 1$ отвечают четыре коллективные координаты, которые задают центр инстантона, одна коллективная координата, определяющая размер инстантона, а также N_1 коллективных параметров, соответствующих вращениям и/или глобальным калибровочным преобразованиям, которые не оставляют инстантон инвариантным. Таким образом, полная зависимость одноинстантонного вклада от константы связи определяется множителем $g^{-5-N_1} \exp(-8\pi^2/g^2)$. Для инстантона с топологическим числом $\nu = 1$ в теории Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ имеется три независимых вращения и три независимых калибровочных преобразования, но в силу того, что три комбинации вращений и калибровочных преобразований оставляют инстантон инвариантным, число N_1 в этом случае равно 3, т.е. рассматриваемый множитель равен $g^{-8} \exp(-8\pi^2/g^2)$.

Аналогично, в теории Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(3)$ есть восемь независимых калибровочных преобразований и три вращения, но так же как и в предыдущем примере, три комбинации вращений и калибровочных преобразований не изменяют инстантонную конфигурацию. Кроме того, генератор $SU(3)$, который коммутирует со стандартной $SU(2)$ подгруппой (которая может состоять, например, из матриц фундаментального представления $SU(3)$, действующих только на две первых компоненты векторов пространства этого представления), также входит в группу инвариантности инстантонного решения. Таким образом, $N_1 = 3 + 8 - 3 - 1 = 7$, т.е. в $SU(3)$ калибровочной теории одноинстантонные эффекты дают малый вклад, пропорциональный $g^{-12} \exp(-8\pi^2/g^2)$.

Предположим теперь, что в действии I также присутствует член

$$- \int d^4x \int d^4y \bar{\psi}_l(x) \mathcal{K}_{lx,my}(\nu, u) \psi_m(y),$$

содержащий независимые фермионные поля ψ и $\bar{\psi}$. Если ни одно из этих полей не входит в оператор $\mathcal{O}$, то интегрирование по полям ψ , $\bar{\psi}$ дает множитель $\text{Det } \mathcal{K}(\nu, u)$, который равен нулю, если $\mathcal{K}(\nu, u)$ имеет хотя бы одно нулевое собственное значение. Этот результат легко понять на основе общих правил интегрирования по фермионным переменным. В самом деле, раскладывая $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ по собственным функциям оператора $\mathcal{K}$, мы можем записать интеграл по $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ как интеграл по коэффициентам этого разложения. Далее, квадратичная часть действия не содержит членов, соответствующих нулевым модам, поэтому для каждого нулевого собственного значения мы получим интеграл по фермионному параметру, который не фи-

гурирует в подынтегральном выражении. В соответствии с общими правилами интегрирования по грассмановым переменным (см. § 9.5), такие интегралы равны нулю. Напомним, что единственные члены, интеграл от которых отличен от нуля, должны содержать каждую антикоммутирующую переменную интегрирования в первой степени. Поэтому интеграл по фермионным полям в уравнении (23.7.1) не равен нулю только в том случае, когда в оператор $\mathcal{O}$ входит по одному фермионному полю для каждого нулевого собственного значения $\mathcal{H}$.

Можно показать, что для инстантонных конфигураций имеются нулевые фермионные моды, причем свойства этих мод определяются теоремами об индексе, аналогичными теореме Атьи–Зингера, которую мы доказали в § 22.2. Отметим, что, руководствуясь соображениями, приведенными выше, 'т Хофт [25] доказал, что процессы с несохранением барионного и лептонного чисел, которые обусловлены существованием инстантонных конфигураций с $\nu = 1$, могут вовлекать только один тип лептона.

§ 23.8. Распад ложного вакуума

Мы посвятим этот параграф рассмотрению скалярных теорий поля, в которых эффективный потенциал имеет два минимума, причем его значения в этих минимумах различны. Очевидно, что конфигурация со средним значением поля, находящимся в более глубоком минимуме, устойчива и представляет собой истинный вакуум. Если же среднее скалярного поля равно значению, при котором потенциал имеет локальный минимум, то такое состояние является метастабильным. Метастабильный ложный вакуум, соответствующий менее глубокому минимуму, должен распадаться в истинный вакуум, отвечающий глобальному минимуму, посредством некоторого процесса туннелирования, аналогичного процессу альфа-распада. Хотя мы не можем наблюдать такой процесс распада ложного вакуума в лаборатории, вполне вероятно, что он имел место при эволюции Вселенной, когда спонтанно нарушались различные симметрии, поэтому понимание механизма распада вакуума может оказаться полезным для описания космологических явлений. Как мы сейчас увидим, скорость распада вакуума определяется свойствами некоторой протяженной полевой конфигурации [6].

Рассмотрим компоненту ϕ скалярного мультиплетта, вакуумное среднее $\langle \phi \rangle$ которой отлично от нуля. Например, в теории с нарушенной киральной симметрией, которую мы обсуждали в § 19.5, ϕ представляет собой четвертую компоненту кирального 4-вектора. Оказывается, что для случая достаточно высокого барьера другие скалярные поля, присутствующие в теории (включая голдстоуновские бозоны), не оказывают влияния на скорость распада ложного ваку-

ума, и ведущий вклад можно получить, рассматривая теорию лишь одного скалярного поля ϕ . Для определенности выберем плотность лагранжиана в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (23.8.1)$$

Предположим, что эффективный потенциал $V(\phi)$ имеет глобальный минимум при $\phi = \langle \phi \rangle$ и локальный при $\phi = 0$, и выберем начало отсчета энергии таким образом, чтобы $V(0) = 0$. Тогда, очевидно, $V(\langle \phi \rangle) < 0$. Наша задача заключается в том, чтобы вычислить скорость распада конфигурации с нулевым средним скалярного поля в состояние истинного вакуума, для которого среднее значение поля равно $\langle \phi \rangle$.

Как показывают результаты приложения А к этой главе (см. уравнения (23.А.6), (23.А.21) и (23.А.23)), энергия E_0 ложного вакуума определяется следующим выражением:

$$E_0 = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left[\int \exp(-S[\phi; T]) \prod_{\mathbf{x}, t} d\phi(\mathbf{x}, t) \right], \quad (23.8.2)$$

где $S[\phi; T]$ обозначает евклидово действие, соответствующее лагранжевой плотности (23.8.1), т. е.

$$S[\phi, T] = \int d^3x \int_{-T/2}^{+T/2} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (23.8.3)$$

а интегрирование в выражении (23.8.2) выполняется по всем конфигурациям полей $\phi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющим условиям

$$\phi(\mathbf{x}, T/2) = \phi(\mathbf{x}, -T/2) = 0. \quad (23.8.4)$$

Как мы покажем ниже, энергия (23.8.2) комплексна. Очевидно, что ее мнимая часть и даст нам скорость распада ложного вакуума.

Для того чтобы вычислить функциональный интеграл в выражении (23.8.2), найдем стационарную точку евклидова действия $S[\phi, T]$. Стационарная конфигурация определяется из уравнений

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \phi} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (23.8.5)$$

с граничными условиями (23.8.4). Из-за одинаковых условий на границах решение уравнения (23.8.5) получило название *отскокового* решения.

Будем искать отскоковые решения $\phi(\mathbf{x}, t)$, которые инвариантны относительно вращений четырехмерного пространства, т. е.

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\rho), \quad \text{где} \quad \rho \equiv \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + (t - t_0)^2}. \quad (23.8.6)$$

Отметим, что задача (23.8.5) с граничным условием (23.8.4) имеет также решения, не обладающие вращательной инвариантностью, но действие для таких решений больше, чем для вращательно-инва-

риантных отскоковых конфигураций [37], поэтому вклад таких решений становится пренебрежимо малым при больших T . Комбинируя уравнения (23.8.6) и (23.8.5), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = V'(\phi). \quad (23.8.7)$$

Строго говоря, решение вида (23.8.6) совместимо с граничными условиями (23.8.4) только в том случае, когда T гораздо больше характерного времени движения в потенциале $V(\rho)$. При выполнении этого соотношения мы можем положить T в уравнении (23.8.4) равным бесконечности, тогда граничное условие принимает вид $\phi(\rho) = 0$ при $\rho \rightarrow \infty$. Далее, поле $\phi(\mathbf{x}, t)$ должно быть аналитической функцией $\mathbf{x}$ вблизи точки $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ при всех t , включая $t = t_0$, поэтому $\phi(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ представляет собой ряд по степеням ρ^2 . Отсюда, в частности, следует, что $d\phi/d\rho = 0$ при $\rho = 0$. Итак, уравнение (23.8.7) представляет собой уравнение движения частицы единичной массы с “координатой” ϕ и “временем” ρ , движущейся в потенциале $-V(\phi)$, на которую также действует сила трения $-(3/\rho)d\phi/d\rho$. Частица стартует из некоторого начального положения ϕ_0 при $\rho = 0$ и достигает точки $\phi = 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, теряя энергию $-V(\phi) > 0$ из-за трения. Евклидово действие (23.8.2) для такого решения равно

$$B \equiv \int_0^\infty 2\pi^2 \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (23.8.8)$$

Покажем, что величина B положительна [38]. Воспользуемся для этой цели тем же приемом, что и при доказательстве теоремы Деррика в § 23.1, а именно рассмотрим действие (23.8.8) для полевой конфигурации $\phi_R(\rho) = \phi(\rho/R)$. Заменяя переменные интегрирования, находим

$$S[\phi_R] = \int_0^\infty 2\pi^2 \rho^3 d\rho \left[\frac{R^2}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + R^4 V(\phi) \right]. \quad (23.8.9)$$

Из того факта, что $\phi(\rho)$ является решением уравнения (23.8.7), следует стационарность действия по отношению к любым вариациям ϕ , поэтому производная $dS[\phi_R]/dR$ должна обращаться в нуль при $R = 1$. Таким образом,

$$\int_0^\infty \rho^3 d\rho \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 = -4 \int_0^\infty \rho^3 d\rho V(\phi). \quad (23.8.10)$$

Отсюда видно, что постоянная (23.8.8) действительно положительна,

$$B = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 > 0. \quad (23.8.11)$$

Чуть позже мы продемонстрируем, каким образом можно получить приближенное решение $\phi(\rho)$, но сперва обсудим физические применения отскоковых решений.

Прежде всего, у нас имеется не одно отскоковое решение, которое является стационарной точкой евклидова действия, а целое непрерывное множество таких решений, которое параметризуется коллективными координатами $\mathbf{x}_0, t_0$. В соответствии с результатами § 23.7 мы должны интегрировать по этим параметрам, что для ящика объема $\mathcal{V}$ дает множитель $\mathcal{V}T$. Таким образом, вклад всех одноотскоковых конфигураций в функциональный интеграл из уравнения (23.8.2) в однопетлевом приближении равен

$$\mathcal{V}T A \exp(-B). \quad (23.8.12)$$

Коэффициент A пропорционален¹⁾ произведению

$$\prod_n' \lambda_n^{-1/2},$$

где λ_n — собственные значения ядра

$$\delta^2 S[\phi] / \delta\phi(\mathbf{x}, t) \delta\phi(\mathbf{x}', t'),$$

причем штрих обозначает, что мы должны опустить нулевые собственные значения, отвечающие изменению коллективных координат $\mathbf{x}_0, t_0$. Из уравнения (23.8.10) следует, что вторая производная уравнения (23.8.9) по R отрицательна при $R = 1$, поэтому у ядра $\delta^2 S[\phi] / \delta\phi(\mathbf{x}, t) \delta\phi(\mathbf{x}', t')$ существует по крайней мере одно отрицательное собственное значение. Можно показать [39], что такое собственное значение единственно. Таким образом, величина A является мнимой. Мы не будем заниматься точным вычислением A , нам достаточно заметить, что эта величина, в отличие от $\exp(-B)$, не очень сильно зависит от параметров теории, поэтому из размерных соображений мы можем грубо положить величину A равной iM^{-4} , где M — характерный массовый масштаб теории.

При достаточно больших значениях $\mathcal{V}$ и T стационарными также будут конфигурации, содержащие произвольное число N отскоковых решений. Вклад таких конфигураций равен N -й степени выражения (23.8.12), умноженной на постоянную $1/N!$, которая соответствует тому, что при интегрировании по положениям N отскоковых решений мы учитываем каждую конфигурацию $N!$ раз. Тогда суммирование по N даст экспоненту величины (23.8.12), поэтому энергия (23.8.2) будет определяться выражением (23.8.12), деленным на $-T$:

$$E_0 = -\mathcal{V} A \exp(-B). \quad (23.8.13)$$

¹⁾ Заметим, что в случае, когда непрерывная симметрия G спонтанно нарушается до подгруппы H , имеются дополнительные коллективные координаты, задающие ориентацию подгруппы H относительно G . Интегрирование по этим параметрам дает вклад в множитель A , равный объему пространства смежного класса G/H .

Учитывая тот факт, что A по порядку величины равно iM^{-4} , получим скорость распада ложного вакуума для единицы объема:

$$\Gamma/\mathcal{V} \approx M^{-4} \exp(-B). \quad (23.8.14)$$

Обратите внимание на то, что величина (23.8.14) представляет собой скорость распада на единицу объема, так как при распаде среднее значение поля не меняется одновременно во всем пространстве, а, скорее, в ложном вакууме постепенно происходит образование областей, в которых среднее значение поля равно истинному вакуумному значению.

Результат (23.8.14) важен в случае, когда постоянная B велика, т.е. процесс туннелирования через барьер сильно подавлен, и мы можем считать, что фактор подавления пропорционален $\exp(-B)$. К счастью, оказывается, что для наиболее естественной ситуации, в которой действие B велико, B можно вычислить точно. Такая ситуация имеет место, если энергия $V(\langle\phi\rangle) = -\epsilon$ истинного вакуума лишь незначительно отличается от нулевой энергии ложного вакуума, но потенциал $V(\phi)$ не является малым и положителен, когда ϕ находится между $\phi = 0$ и $\phi = \langle\phi\rangle$. Для минимизации евклидова действия (23.8.3) в этом случае мы должны положить ϕ равным $\langle\phi\rangle$ внутри четырехмерного шара большого радиуса R , затем следует переходная область размера $L \approx M^{-1}$, в которой поле меняет свое значение до нуля. Параметр L представляет собой характерную длину потенциала в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. (Такое приближение называется тонкостенным приближением, хотя, возможно, более уместным было бы название “приближение большого пузыря”.) В этом приближении действие (23.8.3) определяется следующим выражением:

$$S(R) \simeq -\frac{1}{2} \pi^2 R^4 \epsilon + 2\pi^2 R^3 \mathcal{S}, \quad (23.8.15)$$

где $\mathcal{S}$ — поверхностное натяжение, равное вкладу единицы площади стенки пузыря в евклидово действие. Второй член в левой части уравнения (23.8.7) становится пренебрежимо малым при $\rho \approx R$, поэтому в данном случае мы имеем дело с эффективно одномерной задачей. Поэтому мы можем воспользоваться выражением (23.1.4) для поверхностного натяжения:

$$\mathcal{S} = \int_0^{\langle\phi\rangle} \sqrt{2V(f)} df. \quad (23.8.16)$$

Действие (23.8.15) стационарно при значении радиуса пузыря

$$R \simeq 3\mathcal{S}/\epsilon, \quad (23.8.17)$$

поэтому значение действия для стационарной конфигурации равно

$$B \simeq \frac{27\pi^2 \mathcal{S}^4}{2\epsilon^3}. \quad (23.8.18)$$

Отметим, что действие B велико при малых ϵ , поэтому процесс распада ложного вакуума будет сильно подавлен. После туннелирования

через барьер пузырь истинного вакуума будет расширяться со скоростью света до тех пор, пока не столкнется с другим пузырем. В конце концов, истинный вакуум займет все пространство.

Приложение А. Евклидовы интегралы по траекториям

В этом приложении мы обсудим некоторые применения евклидовых функциональных интегралов по траекториям в квантовой теории поля. Как мы упоминали в § 9.1, весь формализм квантовой теории поля можно развивать в терминах четырехмерного евклидова интеграла по траекториям. При таком подходе для вычисления элементов S -матрицы необходимо выполнять операцию аналитического продолжения, которая может оказаться весьма нетривиальной. Вместо этого для примера обсудим задачу, в которой евклидов функциональный интеграл возникает естественным образом.

Рассмотрим эрмитовы канонические переменные Q_a , P_a , удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям

$$[Q_a, P_b] = i\delta_{ab}, \quad (23.A.1)$$

$$[Q_a, Q_b] = [P_a, P_b] = 0. \quad (23.A.2)$$

В квантовой теории поля индекс a включает в себя аналогично § 9.1, как непрерывную пространственную координату $\mathbf{x}$, так и дискретные лоренцевские индексы m , а также сорт частиц. При этом символ Кронекера в уравнении (23.A.1) обозначает величину $\delta_{\mathbf{x}m, \mathbf{y}n} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{mn}$. Выберем нормировку собственных состояний операторов Q_a ,

$$Q_a|q\rangle = q_a|q\rangle, \quad (23.A.3)$$

таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q' - q) \equiv \prod_a \delta(q'_a - q_a). \quad (23.A.4)$$

Собственные состояния $|p\rangle$ операторов импульса P_a нормируем аналогичным способом.

Задача, которую мы будем рассматривать, состоит в вычислении матричного элемента

$$F(q', q; T) \equiv \langle q' | \exp(-H[Q, P]T) | q \rangle, \quad (23.A.5)$$

где H — гамильтониан системы, а T — некоторая положительная постоянная. Одним из применений этой задачи является изучение энергий основных состояний различных систем. В самом деле, если наименьшее собственное значение гамильтониана H равно E_0 и соответствующий ему собственный вектор равен $|0\rangle$, то в пределе $T \rightarrow \infty$

выражение (23.A.5) принимает следующий вид:

$$F(q', q; T) \rightarrow \langle q' | 0 \rangle \langle 0 | q \rangle \exp(-E_0 T),$$

поэтому

$$E_0 = - \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln F(q', q; T)}{T} \right). \quad (23.A.6)$$

Знание матричных элементов (23.A.5) также позволяет вычислить статистическую сумму рассматриваемой системы:

$$Z(\beta) \equiv \text{Tr} \exp(-\beta H) = \int \left[\prod_a dq_a \right] F(q, q; \beta), \quad (23.A.7)$$

где $1/\beta$ есть температура.

Для того чтобы представить $F(q', q; T)$ в виде функционального интеграла, определим следующие евклидовы операторы, зависящие от времени:

$$Q_a(t) \equiv e^{Ht} Q_a e^{-Ht}, \quad P_a(t) \equiv e^{Ht} P_a e^{-Ht}, \quad (23.A.8)$$

а также левые и правые собственные состояния таких операторов:

$$|q, t\rangle \equiv \exp(Ht)|q\rangle, \quad \langle q, t| \equiv \langle q| \exp(-Ht), \quad (23.A.9)$$

$$|p, t\rangle \equiv \exp(Ht)|p\rangle, \quad \langle p, t| \equiv \langle p| \exp(-Ht), \quad (23.A.10)$$

Легко видеть, что таким образом определенные операторы и состояние удовлетворяют соотношениям

$$Q_a(t)|q, t\rangle = q_a|q, t\rangle, \quad \langle q, t|Q_a(t) = q_a\langle q, t|, \quad (23.A.11)$$

$$P_a(t)|p, t\rangle = p_a|p, t\rangle, \quad \langle p, t|P_a(t) = p_a\langle p, t|. \quad (23.A.12)$$

Одно из отличий такого формализма от обычного формализма в пространстве Минковского заключается в том, что “временная” эволюция операторов задается неунитарным преобразованием (23.A.8), поэтому правые собственные состояния $\langle q, t|$ и сопряженные левых собственных состояний $|q, t\rangle$ при произвольном t не связаны никаким простым соотношением.

Пользуясь введенными обозначениями, перепишем определение (23.A.5) матричного элемента $F(q', q; T)$ в форме

$$F(q', q; T) = \langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle. \quad (23.A.13)$$

Вычислим сперва элемент $\langle q', t + dt | q, t \rangle$ для бесконечно малого интервала dt . Будем предполагать, что в гамильтониане $H(Q, P)$ все операторы Q находятся слева от операторов P (очевидно, что, пользуясь каноническими правилами коммутации, мы всегда можем записать гамильтониан в таком виде). Тогда

$$\langle q', t + dt | q, t \rangle = \langle q', t | \exp(-H(q', P)dt) | q, t \rangle.$$

Разложим вектор $|q, t\rangle$ по полному набору собственных состояний операторов $P_a(t)$. Из уравнений (23.А.1) имеем, как обычно,

$$\langle q, t|p, t\rangle = \prod_a \frac{\exp(ip_a q_a)}{\sqrt{2\pi}}, \quad \langle p, t|q, t\rangle = \prod_a \frac{\exp(-ip_a q_a)}{\sqrt{2\pi}},$$

поэтому

$$\langle q', t + dt|q, t\rangle = \int \left(\prod_a \frac{dp_a}{2\pi} \right) \exp \left(i \sum_a p_a (q'_a - q_a) - H(q', p) dt \right).$$

Так же как и в § 9.1, разделим интервал $(-T/2, T/2)$ на большое число очень маленьких интервалов и вставим полный набор собственных состояний операторов Q для каждого интервала. Определяя функции $q(t)$, $p(t)$, интерполирующие собственные значения операторов Q и P на всем интервале, получим определение матричного элемента F через функциональный интеграл в наиболее общем виде:

$$F(q', q; T) = \int_{\substack{q(-T/2)=q, \\ q(T/2)=q'}} \left(\prod_{a,t} dq_a(t) \right) \int \left(\prod_{a,t} \frac{dp_a(t)}{2\pi} \right) \times \\ \times \exp \left(\int_{-T/2}^{T/2} dt \left[i \sum_a \dot{q}_a(t) p_a(t) - H(q(t), p(t)) \right] \right). \quad (23.А.14)$$

Для вычисления статистической суммы (23.А.7) необходимо интегрировать лишь по тем конфигурациям, для которых функция $q(t)$ периодична с периодом, равным обратной температуре β :

$$Z(\beta) = \int_{q(\beta/2)=q(-\beta/2)} \left(\prod_{a,t} dq_a(t) \right) \int \left(\prod_{a,t} \frac{dp_a(t)}{2\pi} \right) \times \\ \times \exp \left(\int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[i \sum_a \dot{q}_a(t) p_a(t) - H(q(t), p(t)) \right] \right). \quad (23.А.15)$$

Уравнения (23.А.14), (23.А.15) выглядят довольно громоздкими, и, на первый взгляд, все осложняется еще и тем, что один член под знаком экспоненты действителен, в то время как другой чисто мнимый. Однако эти формулы становятся вполне привычными после выполнения интегрирования по $p_a(t)$. Это интегрирование тривиально для важного класса теорий с гамильтонианом $H(q, p)$, квадратичным по p :

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} A_{ab}(q) p_a p_b + \sum_a B_a(q) p_a + C(q). \quad (23.А.16)$$

Как показано в приложении к гл. 9, в этом случае после интегрирования по p матричный элемент (23.A.14) принимает вид

$$F(q', q; T) = \int_{\substack{q(-T/2)=q, \\ q(T/2)=q'}} \left(\prod_{a,t} dq_a(t) \right) (\text{Det}[2i\pi\mathcal{A}(q)])^{-1/2} \times \\ \times \exp \left(\int_{-T/2}^{T/2} dt \left[i \sum_a \dot{q}_a(t) \bar{p}_a(t) - H(q(t), \bar{p}(t)) \right] \right), \quad (23.A.17)$$

где $\mathcal{A}(q)$ представляет собой “матрицу”

$$\mathcal{A}(q)_{at',bt} = \delta(t' - t) A_{ab}(q(t)), \quad (23.A.18)$$

а $\bar{p}(t)$ обозначает стационарную “точку” аргумента экспоненты из выражения (23.A.17). Таким образом, $\bar{p}(t)$ определяется уравнением

$$i\dot{q}_a(t) = \left. \frac{\delta H(q(t), p)}{\delta p_a} \right|_{p=\bar{p}(t)}. \quad (23.A.19)$$

Отметим, что в появлении множителя i в левой части этого уравнения нет ничего удивительного, ибо оно совпадает с уравнением, которому удовлетворяют неэрмитовы операторы (23.A.8):

$$i\dot{Q}_a(t) = i[H, Q_a(t)] = \frac{\delta H(Q(t), P(t))}{\delta P_a(t)}.$$

Для системы, имеющей квадратичный гамильтониан (23.A.16), решение уравнения (23.A.19) таково

$$\bar{p}_a = \sum_b [A^{-1}(q)]_{ab} (iq_b - B_b(q)), \quad (23.A.20)$$

поэтому выражение (23.A.17) можно переписать следующим образом:

$$F(q', q; T) = \int_{\substack{q(-T/2)=q, \\ q(T/2)=q'}} \left(\prod_{a,t} dq_a(t) \right) (\text{Det}[2i\pi\mathcal{A}(q)])^{-1/2} \exp(-S[q]), \quad (23.A.21)$$

где $S[q]$ представляет собой действие:

$$S[q] \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + i \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) B_a(q) \dot{q}_b - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) B_a(q) B_b(q) + C(q) \right]. \quad (23.A.22)$$

В наиболее привычной ситуации, когда $B_a(q) = 0$, это действие сильно упрощается:

$$S[q] \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + C(q) \right]. \quad (23.A.23)$$

Таким образом, в этом случае “лагранжиан”, фигурирующий в функциональном интеграле, равен гамильтониану в пространстве Минковского, в котором импульсы p выражены через координаты q и их производные по времени.

Приложение В. Список гомотопических групп различных многообразий

В этом приложении приведены гомотопические группы различных многообразий [40]. Всюду в этом приложении Z обозначает группу целых чисел по сложению, т.е. единичным элементом этой группы является 0, Z_n обозначает группу целых чисел по модулю n , а тривиальную группу, состоящую из одного элемента 0, мы записываем символом 0.

Напомним, что гомотопические группы прямого произведения многообразий равны прямому произведению гомотопических групп сомножителей, т.е.

$$\pi_n(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) = \pi_n(\mathcal{M}_1) \times \pi_n(\mathcal{M}_2).$$

Гомотопические группы сфер

$$\begin{aligned} \pi_n(S_m) &= 0 && \text{при } n < m, \\ \pi_n(S_n) &= Z, \\ \pi_{n+1}(S_n) &= Z_2 && \text{кроме } \pi_2(S_1) = 0; \pi_3(S_2) = Z, \\ \pi_{n+2}(S_n) &= Z_2 && \text{кроме } \pi_3(S_1) = 0, \\ \pi_{n+3}(S_n) &= Z_{24} && \text{кроме } \pi_4(S_1) = 0; \pi_5(S_2) = Z_2; \pi_6(S_3) = Z_{12}; \\ &&& \pi_7(S_4) = Z \times Z_{12}, \\ \pi_n(S_1) &= 0 && \text{кроме } \pi_1(S_1) = Z. \end{aligned}$$

Группы Ли

$$\begin{aligned} \pi_1(G) &= \begin{cases} Z, & G = U(1), \\ Z_2, & G = SO(n) \ (n \geq 3), \\ 0, & \text{другие простые компактные связные группы Ли,} \end{cases} \\ \pi_2(G) &= 0 \quad G \text{ любая компактная связная группа Ли,} \\ \pi_3(G) &= Z \quad G \text{ любая компактная связная простая группа Ли,} \end{aligned}$$

$$\pi_4(G) = \begin{cases} Z_2 \times Z_2, & G = SO(4), Spin(4), \\ Z_2, & G = USp(2n), SU(2), SO(3), Spin(5), SO(5), \\ 0, & G = SU(n) \ (n \geq 3), SO(n) \ (n \geq 6), G_2, F_4, E_n, \end{cases}$$

$$\pi_{4n+2}(USp(2n)) = \begin{cases} Z_{(2n+2)!}, & n \text{ четное}, \\ Z_{2(2n+2)!}, & n \text{ нечетное}, \end{cases} \quad \pi_{2n}(SU(n)) = Z_n!.$$

Теоремы периодичности Ботта. При $n \geq (k-1)/4$, $k \geq 2$,

$$\pi_k(USp(2n)) = \begin{cases} Z, & k = 3, 7 \pmod{8}, \\ Z_2, & k = 4, 5 \pmod{8}, \\ 0, & k = 0, 1, 2, 6 \pmod{8}, \end{cases}$$

при $n \geq k+2$, $k \geq 2$,

$$\pi_k(SO(n)) = \begin{cases} Z, & k = 3, 7 \pmod{8}, \\ Z_2, & k = 0, 1 \pmod{8}, \\ 0, & k = 2, 4, 5, 6 \pmod{8}, \end{cases}$$

при $n \geq (k+1)/2$, $k \geq 2$,

$$\pi_k(SU(n)) = \begin{cases} Z, & k \text{ нечетное}, \\ 0, & k \text{ четное}. \end{cases}$$

Некоторые факты о гомотопических группах пространств смежных классов. Для любой группы Ли G и любой ее подгруппы Ли H верно следующее утверждение:

$$\pi_2(G/H) = \ker\{\pi_1(H) \mapsto \pi_1(G)\}.$$

Таким образом, $\pi_2(G/H)$ представляет собой подгруппу $\pi_1(H)$, которая отображается в единичный элемент $\pi_1(G)$ при вложении H в G . В частности,

$$\pi_2(G/H) = \pi_1(H) \quad \text{для} \quad \pi_1(G) = 0.$$

Задачи

1. Какие члены необходимо добавить в лагранжиан голдстоуновских бозонных полей в четырехмерном евклидовом пространстве для того, чтобы в теории появились топологически нетривиальные решения уравнений поля?

2. Рассмотрим теорию скалярных полей в шести пространственных измерениях, в которой киральная симметрия лагранжиана $SU(2) \times SU(2)$ спонтанно нарушена до группы изоспина $SU(2)$. Предположим, что лагранжиан содержит члены с достаточно высокими производными, которые стабилизируют скирмионные конфигурации.

Какому закону сохранения будут подчиняться скирмионы в этой теории? (Указание: Обратите внимание, что, как показано в § 2.7, топологически группа $SU(2)$ представляет собой сферу S_3 .)

3. Покажите, что для любого многообразия $\mathcal{M}$ гомотопические группы $\pi_n(\mathcal{M})$ с $n > 1$ абелевы.

4. Найдите зависимость одноинстантонного вклада в физические процессы от константы связи в калибровочной теории с группой $SU(4)$.

5. Получите массу аксиона в предположении малости масс кварков m_u , m_d и m_s .

6. Рассмотрим теорию действительного скалярного поля ϕ с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4 - g\phi,$$

где параметры m^2 и λ положительны, а постоянная g мала. Вычислите экспоненциальный множитель $\exp(-B)$, фигурирующий в скорости распада ложного вакуума.

Литература

1. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwarz A.S., Tyupkin Yu.S.* // Phys. Lett. **59B**, 85 (1975).
2. *'t Hooft G.* // Nucl. Phys. **B79**, 276 (1974); *Polyakov A.M.* // JETP. Letters **20**, 194 (1974).
3. *Skyrme T.H.R.* // Proc. Roy. Soc. London **A260**, 127 (1961).
4. *Nielsen H., Olesen P.* // Nucl. Phys. **B61**, 45 (1973).
5. *Zel'dovich Ya.B., Kobzarev I.Yu., Okun' L.B.* // Sov. Phys. JETP **40**, 2 (1975).
6. *Coleman S.* // Phys. Rev. **D15**, 2929 (1977); *Callan C.G., Coleman S.* // Phys. Rev. **D16**, 1762 (1977). Рассуждения, приведенные в § 23.8, основаны на этих работах. Результаты более ранних исследований по образованию областей с нарушенной симметрией можно найти в работах: *Lee T.D., Wick G.C.* // Phys. Rev. **D19**, 2291 (1974); *Voloshin M.B., Kobzarev I.Yu., Okun' L.B.* // Sov. J. Nucl. Phys. **20**, 644 (1975).
7. *Coleman S.* // Nucl. Phys. **B262**, 263 (1985); *Lee T.D., Pang Y.* // Phys. Rep. **221**, 251 (1992), а также ссылки внутри этого обзора.
8. Прекрасный обзор этих тем и ссылки на оригинальные работы можно найти в *Coleman S.* // Aspects of Symmetry (Cambridge University Press, Cambridge, 1985): Chapters 6 and 7. См. также

- более современный обзор: *Weinberg E.J.* // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **42**, 177 (1992).
9. *Derrick G.H.* // *J. Math. Phys.* **5**, 1252 (1964).
10. *Bogomol'nyi E.B.* // *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976).
11. Изучение нарушения симметрии в ранней Вселенной с помощью теории гомотопий впервые провели *Kibble T.W.B.* // *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976) и *Vilenkin A., Shellard E.P.S.* // *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994), см. также ссылки в этих работах.
12. *Georgi H., Glashow S.L.* // *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1494 (1972).
13. *Arafune J., Freund P.G.O., Goebel C.J.* // *J. Math. Phys.* **16**, 433 (1975).
14. *Prasad M.K., Sommerfeld C.M.* // *Phys. Rev. Lett.* **35**, 760 (1975).
15. *Julia B., Zee A.* // *Phys. Rev.* **D11**, 276 (1974); **D13**, 819 (1976).
16. *Dirac P.A.M.* // *Proc. Roy. Soc. London A* **133**, 60 (1934); *Phys. Rev.* **74**, 817 (1948).
17. *Zel'dovich Ya.B., Khlopov M.Yu.* // *Phys. Lett.* **79B**, 239 (1978); *Preskill J.* // *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1365 (1979). См. также обзор: *Preskill J.* // *Annual Rev. Nucl. Part. Science* **34**, 461 (1984).
18. См., например: *Weinberg S.* // *Gravity and Cosmology* (Wiley, N.Y., 1972): Chapter 15.
19. *Guth A.* // *Phys. Rev.* **D23**, 347 (1981); *Linde A.* // *Phys. Lett.* **108B**, 389 (1982); *Albrecht A., Steinhardt P.* // *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
20. *Jackiw R., Rebbi C.* // *Phys. Rev.* **D13**, 3398 (1976).
21. *Rubakov V.A.* // *JETP Lett.* **33**, 644 (1981); *Nucl. Phys.* **B212**, 391 (1982); *Callan C.G.* // *Phys. Rev.* **D25**, 2141 (1982); *Phys. Rev.* **D26**, 2058 (1982); *Nucl. Phys.* **B212**, 391 (1982).
22. *Bott R.* // *Bull. Soc. Math. France* **84**, 251 (1956).
23. *'t Hooft G.* // *Phys. Rev.* **D14**, 3432 (1976); *Phys. Rep.* **142**, 357 (1986).
24. *Atiyah M., Ward R.* // *Commun. Math. Phys.* **55**, 117 (1977).
25. *'t Hooft G.* // *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976). Вывод 'т Хофта основывается на анализе фермионных нулевых мод оператора Дирака (см. § 23.7), которые определяют изменение каждого квантового числа для инстантона с заданной степенью отображения.
26. *Callan C.G., Dashen R.F., Gross D.J.* // *Phys. Lett.* **63B**, 334 (1974); *Jackiw R., Rebbi C.* // *Phys. Rev. Lett.* **37**, 172 (1976).

27. *Kuzmin V.A., Rubakov V.A., Shaposhnikov M.E.* // Phys. Lett. **155B**, 36 (1985) В процессе перехода ложного вакуума в истинный важную роль играют так называемые сфалероны; см.: *Manton N.S.* // Phys. Rev. **D28**, 2019 (1983); *Klinkhammer F.R., Manton N.S.* // Phys. Rev. **D30**, 2212 (1984); *Dashen R.F., Hasslacher B., Neveu A.* // Phys. Rev. **D10**, 4138 (1974).
28. *Georgi H., McArthur I.*, неопубликовано (1981); *Kaplan D.B., Manohar A.V.* // Phys. Rev. Lett. **56**, 2004 (1986); *Choi K.* // Nucl. Phys. **B383**, 58 (1992).
29. Более подробное вычисление можно найти в работах *Baluni V.* // Phys. Rev. **D19**, 2227 (1978); *Crewther R.J., Di Vecchia P., Veneziano G., Witten E.* // Phys. Lett. **88B**, 123 (1979).
30. *Peccei R.D., Quinn H.* // Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977); Phys. Rev. **D16**, 1791 (1977).
31. *Weinberg S.* // Phys. Rev. Lett. **40**, 223 (1978); *Wilczek F.* // Phys. Rev. Lett. **40**, 279 (1978).
32. *Kim J.E.* // Phys. Rev. Lett. **43**, 103 (1979); *Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.* // Nucl. Phys. **B166**, 493 (1980); *Zhitnitsky A.R.* // Sov. J. Nucl. Phys. **31**, 260 (1980); *Dine M., Fischler W., Srednicki M.* // Phys. Lett. **104B**, 199 (1981).
33. *Weinberg S.* Neutrinos '78, ed. E.C. Fowler (Purdue, Lafayette, 1978).
34. *Dicus D.A., Kolb E.W., Teplitz V.I., Wagoner R.V.* // Phys. Rev. **D18**, 1829 (1978); **D22**, 839 (1980).
35. См. обзоры: *Turner M.S.* // Phys. Rep. **197**, 67 (1990); *Raffelt G.G.* // Phys. Rep. **198**, 1 (1990).
36. *Preskill J., Wise M.B., Wilczek F.* // Phys. Lett. **120B**, 127 (1983); *Abbott L.F., Sikivie P.* // Phys. Lett. **120B**, 127 (1983); *Dine M., Fischler W.* // Phys. Lett. **120B**, 137 (1983). См. также обзоры: *Kim E.* // Phys. Rep. **150**, 1 (1987); *Turner M.S.* // Phys. Rep. **197**, 67 (1990).
37. *Coleman S., Glaser V., Martin A.* // Commun. Math. Phys. **58**, 211 (1978).
38. *Coleman S.*, ссылка 8, § 6.2.
39. *Coleman S.*, ссылка 8, § 6.5.
40. *Actor A.* // Rev. Mod. Phys. **51**, 461 (1979); Encyclopedic Dictionary of Mathematics (MIT Press, Cambridge, 1980): Appendix A.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адлера нуль 191
Адлера–Бардина теорема 409
Адлера–Вайсбергера правило сумм 208, 228–229, 269
Адроны, *см.* мезоны, барионы
Аксиальная калибровка 12, 22–26, 44, 50
Аксиальная константа взаимодействия g_A 204, 221–222
Аксионы 493–496
Алгебры Ли, *см.* компактные, полупростые, простые и $U(1)$ -алгебры Ли
Альтарелли–Паризи уравнения 303–304
Аномалии в симметриях 52, 386–446, 488, 494
Аномалия Адлера–Белла–Джакива, *см.* аномалии в симметриях
Аномальные размерности 147
Аномальный множитель $D_{\alpha\beta\gamma}$, определение 401
Анти-БРСТ преобразования 50, 72
Антидухи, *см.* духи и антидухи
Антиканонические преобразования 57, 105
Антиполя 52–53, 104, 434
Антискобки 55–57, 93
— *см. также* Баталина–Вильковского формализм, антиканонические преобразования
Аромат, определение 168
Асимптотическая свобода 147–150, 168
Атьи–Зингера теорема об индексе 398, 500
Аффинная связность 13–14
 $U(1)$ -алгебры Ли, определение 16
Бардина формула 407–408, 427, 444
Бардина–Купера–Шрифера теория 368–379
Барионное число 260, 467, 475, 488–490, 500
Барионы 245–246
— *см. также* нуклоны
Баталина–Вильковского формализм 51–60, 103–108, 434–437
Бегущая константа связи, *см.* бегущие константы, бета-функция
Бета-функция
— определение 134–135
— зависимость от определения константы взаимодействия 152–154, 156
— электродинамики 140–141, 165
— для минимального вычитания 165
— для нескольких констант связи 154–157
— квантовой хромодинамики 168
— скалярной теории поля 135, 143
— *см. также* ренормгруппа
Богомольного неравенства 455, 472, 484
Бозоны Намбу–Гото, *см.* голдстоуновские бозоны
Бореля преобразование, определение 306
Ботта периодичности теорема 510
БПС-монополи 473
БРСТ-квантование 44–45, 50, 103
БРСТ-симметрия 36–51, 56, 92, 427–433
Бьеркена скейлинг 295–297, 303, 306

- Бьянки тождества (для калибровочных полей) 21, 69
- Великое объединение, *см.* объединение сильного и электрослабого взаимодействий
- Внешние поля K_n 91–92
- Внешняя производная, определение 26, 429
- Вихревые линии 245, 364–368, 450, 460
- Восьмеричный путь, *см.* $SU(3) \times SU(3)$
- Временная калибровка 457–458, 468, 488
- Выпуклость эффективного потенциала 85
- Вырождение вакуума 178–182
- Генераторы (симметрий) 22
- Гиперзаряд u , определение 330
- Главное уравнение 53, 55, 93
— *см. также* квантовое главное уравнение
- Глубина проникновения 360, 363, 379
- Глубоко неупругое рассеяние 168, 273, 294–306
- глюоны 169–172, 301
- Голдстоуновские бозоны 103, 183, 233–245, 318–319, 437–446
— *см. также* мезоны, пионы, скирмионы
- Гомотопическая эквивалентность, определение 460
- Гомотопические группы 256, 452–454, 457–467, 477–480, 509–510
- Гравитация 7, 13–15, 21, 26, 53, 415
- Группа $Spin(n)$ 467, 477
- Группы Ли, *см.* компактные, особые группы Ли а также ортогональные, симплектические и унитарные группы
- Z - и Z_n -группы, определение 464, 509
- Де Витта обозначение 46
- Де Витта–Фаддеева–Попова метод, *см.* Фаддеева–Попова–де Витта метод
- Дебая частота 378
- Действительные и псевдодействительные представления 412
- Деррика теорема 453, 458–460, 502
- Джосефсоновский контакт 361–362
- Дирака условия квантования 473–474, 478
- Дифференциальные формы 26, 48, 429
- Доменные стенки 450, 455–456
- Древесные диаграммы, определение 78
- Дух Ландау 146, 150
- Духи духов 48
- Духовое число 34, 53, 99
- Евклидовы интегралы по путям 262, 389, 395–398, 484, 505–509
- Захват 8, 168–170
- Значимые взаимодействия 160, 163
- Изотопический спин 9, 178, 199–200, 264
- Инвариантность относительно зарядового сопряжения 171, 262
- Инвариантность по отношению к обращению времени 262, 339
- Индекс Кроннекера 470
- Инстантоны 309, 450, 456–457, 467, 483–500
- Инфракрасная расходимость 126–128, 169
- Кабиббо угол 202, 336–338
- Калибровка Ландау (или Лоренца) 31, 324
- Калибровка Фейнмана 31
- Калибровка фонового поля 108–113
- Калибровка Фуджикавы–Ли–Санда 324–327
- Калибровочная инвариантность 8–14, 344, 358
- Каллана–Гросса соотношения 297, 303

- Каллана–Симанчика уравнение 134
 — *см. также* ренормгруппа
- Канонические преобразования (в формализме Баталина–Вильковиского), *см.* антиканонические преобразования
- Картана разложение 233
- Картана–Маурера интегральный инвариант 478–483
- Квантование потока 361, 364, 366, 368, 460
- Квантовая хромодинамика 167–173, 197, 209, 245, 259, 260, 310–311, 450, 487
 — *см. также* кварки, глюоны, асимптотическая свобода, глубоко неупругое рассеяние
- Квантовая электродинамика, *см.* электродинамика
- Квантовое главное уравнение 59, 104, 437
- кварки 167–173, 211, 245–247, 297, 336–339
 — массы 251–252, 264, 492–496
 — *см. также* аномалии
- Киральная симметрия 198–202, 208
 — *см. также* $SU(2) \times SU(2)$, $SU(3) \times SU(3)$
- Классы универсальности 163
- Ковариантные производные
 — в калибровочных теориях 11
 — в общей теории относительности 13
 — и спонтанное нарушение симметрии 212, 238, 346
- Когомологии
 — антискобка 106, 108, 434–437
 — анти-БРСТ 72
 — БРСТ 40–42, 50, 429
 — де Рама 259
- Коллективные координаты 498–500, 503
- Компактные алгебры Ли, определение 16
- Компактные группы Ли 17
- Константа взаимодействия
 — электрослабой теории 328–332, 350–351, 355, 500
 — для неабелевых калибровочных полей 19, 113, 121–122, 320
 — для скалярных полей 134
- Константа связи ферми-взаимодействия 202, 340
- Корреляционная длина 363–364
- Космические струны 460
- Космология 456, 475, 490, 496, 500
- Кривизна, *см.* тензор кривизны Римана–Кристоффеля
- Критические показатели, явления 160–164
- Кулоновская калибровка 23
- b*-кварк 169, 338–339
- c*-кварк 168, 336–339
- d*-кварк, *см.* *u*- и *d*-кварки
- s*-кварк 168, 246, 266, 336–339
- t*-кварк 168, 169, 338–341
- u*- и *d*-кварки 168, 199, 246, 266, 297, 336–339, 394, 414
- Лептонное число 330, 342–343, 500
- τ -лептон 294, 338
- Магнитные монополи 245, 450, 459, 466–478
- Мандельштамовские переменные, определение 128
- Матрица Кобаяши–Маскава 338
- Мезоны 245–254, 257, 264–268, 293
 — *см. также* пионы
- Мера
 — интегрирования по фермионным полям 388–398, 488
 — интегрирования по калибровочным полям 26
- Мера Хаара 30
- Метод Фадеева–Попова–Де Витта 8, 27–33, 53
- Метрика
 — калибровочной группы 14–19, 60–64
 — полей голдстоуновских бозонов 452
 — групп Ли 481
- Механизм 336
- Механизм Хиггса, определение 318

- Минимальное вычитание 136, 161–166, 173
Минимальные переменные 54
Модифицированное минимальное вычитание, *см.* минимальное вычитание для сечения Мотта, определение 295
Мюон 333–335, 417
 λ -матрицы, определение 246
 a_1 -мезон 293
 η -мезон 245–246, 249–251, 266–267, 388
 ω -мезон 252
 ϕ -мезон 257
 K -мезоны 247–251, 257
 ρ -мезоны 252
 σ -модель 210–213
- Накрывающие группы** 69, 475–477
Нарушение СР-инвариантности 14, 339, 492–496
Неабелевы калибровочные теории 7–69, 97–103, 168–173, 456–460, 467
— *см. также* электрослабая теория, квантовая хромодинамика, объединение электрослабых и сильных взаимодействий
Нейтральные токи 335–338, 339, 343
Нейтрино 329, 414
— ν - e - и $\bar{\nu}$ - e -реакции 294, 335
— массы и осцилляции 342–343
Нейтрон, *см.* электрический дипольный момент нейтрона, нуклон
Нелинейные реализации 212, 233, 244
Ненарушенные симметрии 259–265
Неоднозначность Грибова 23
Неприводимое, определение 61–62
Нуклон
— скирмион 467
— аксиальные форм-факторы 203–204, 207
— взаимодействие с пионами 220–227
— массы 227, 253–254
- Нулевые моды 456, 498, 500, 503, 512
- Обобщенная феймановская (ξ)-калибровка** 31–33
Образование пузырей 503–504
Обрезание 121, 125, 391–392
Общая теория относительности, *см.* гравитация
Объединение сильных и электрослабых взаимодействий 343–357
Одночастичная неприводимая диаграмма 76–78
Опекающая симметрия 351
Оператор Славнова, определение 48
Оператор Ходжа 50, 73
Операторное разложение 273–306, 310–315
Ортогональные группы 19, 65–69, 412, 510
Особые группы и алгебры Ли 19, 68, 412
Открытые калибровочные алгебры 52, 54, 58–60
Отмеченная точка, определение 461
Отскок 450–451, 501–505
 Δ -оператор, определение 59
- Параметр нарушения симметрии, определение** 188
Параметры Гассера–Летвилера 252–253
Параметры порядка 243–245, 362–363, 459
Партонная модель 296–297
Печчеи–Куина симметрия 493–496
Перенормировка
— на скользящей шкале 124, 132–144
— в общих теориях 156–157
— в “перенормируемых” калибровочных теориях 93–103
— электрон-электронного потенциала 376
— полей 112–113, 131–132

- калибровочных констант связи 113, 121–122, 133
- произвольных операторов 128–131, 137, 276, 281, 314
- констант связи пионного самодействия 217
- констант скалярной связи 127–128
- Пионы
 - как голдстоуновские бозоны 199–229
 - связанные с нуклоном G_π 204
 - $\pi^\pm$ распад 202–203, 206
 - π^0 распад 386–388, 395
 - массы 206, 218
 - рассеяние на нуклонах 224–227
 - рассеяние на пионах 215–220, 271
 - головастики 493
- Поверхностное натяжение 456, 505
- Поверхность Ферми 370
- Подалгебры, определение 16
- Подстройка вакуума 195, 197, 205–206
- Поле Наканиши–Лаутрупа 37
- Полевые p -формы, см. дифференциальные формы
- Полностью приводимое, определение 62
- Полулептонные 335–338
- Поля духов и антидухов 33–36, 48, 325–327, 328
- Пороговые поправки 385
- Посторонние взаимодействия 160, 163, 371
- Постоянные токи 361–362
- Правила суммирования для спектральной функции 288–294
- Правый ко-набор, определение 233
- Предельные взаимодействия 160
- Преобразование Лежандра 76, 92
- Преобразование Хаббарда–Стратоновича 372
- Приближение тонкой стенки 505
- Приводимые калибровочные алгебры 47–48
- Принцип кластерной разложимости 183, 490
- Присоединенное представление, определение 9
- Проникновение через барьер, см. туннелирование
- Простая алгебра Ли, определение 16
- Прямая сумма, определение 16, 62
- Псевдоголдстоуновские бозоны 193–198, 349
- Псевдодействительные представления, определение 412
- Λ -параметр в квантовой хромодинамике 171–173
- $U(1)$ -проблема 264–268, 488
- Разложение Вильсона–Фишера 163–164
- Размерная регуляризация 121–122, 136, 163–164
 - см. также минимальное вычитание
- Распад вакуума 143–144, 450–451, 500–505
- Распад протона 343
- Расширенный техницвет 353
- Ренормализационная группа 124–174, 284–286, 355–357, 487
 - см. также аномальные размерности, асимптотическая свобода, асимптотическая безопасность, бета-функция, критические явления, фиксированная точка, дух Ландау
- Ренормалоны 306–311
- Решеточное приближение 30, 46–47, 125, 150–154, 259, 260
- ¹⁴O-распад 202
- Сверхпроводимость 245, 357–380
- Свободная энергия 162
- Свободное от инфракрасных расходимостей, определение 127
- Связанные состояния 259–260, 417–425
- Связи 23
- Симметричное пространство, определение 233

- Симплектические группы 16, 67–69, 412, 510
 Сингулярности при нулевой массе, см. инфракрасные расходимости
 Скирмионы 450, 452–456
 Слабые взаимодействия 202
 Случайные симметрии 171
 — в квантовой хромодинамике 171
 — в стандартной модели 342–343, 351
 Смежные классы, определение 233
 Соотношение Голдберга–Треймана 204, 207–208, 222
 Сохранение четности 171, 262, 339, 446, 492–496
 Спонтанное нарушение симметрии 74
 — приближенных симметрий 193–198
 — динамическое нарушение симметрии 343–353
 — глобальных симметрий 178–268, 286–288
 — в сверхпроводимости 357
 — локальных симметрий 8, 318–379
 Стандартная $SU(2)$ подгруппа 482
 Стандартная модель 412–417
 — см. также электрослабая теория, квантовая хромодинамика
 Статсумма 505, 506
 Степенной подсчет 214–215, 218, 221–222, 223–224, 348, 371
 Странность 171, 260
 Струи 169, 171
 Структурные константы 8–9, 15–16, 48, 60–64, 101
 Структурные функции 294–303
 Супергравитация 52
 Суперсимметрия 356
 Сфалероны 512
 $SU(3)$ - и $SU(3) \times SU(3)$ -симметрии 245–259, 264, 295
 $SO(10)$ (или $Spin(10)$) симметрия 353, 415
 $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия 199, 208
 $SU(2) \times U(1)$ -симметрия, см. электрослабая теория
 $SU(4) \times SU(4)$ -симметрия 353
 $SU(5)$ -симметрия 353
 Твист 300
 Температурные эффекты 161–162, 490, 505, 506
 Тензор кривизны Римана–Кристоффеля 13, 415
 Тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}$, определение 12
 Тензор энергии–импульса 21, 306, 420
 Теорема Римана–Лебега 182
 Теории струн 26, 46, 48, 50
 Теория Гинзбурга–Ландау 363, 367
 Теория электрослабых взаимодействий 328–343, 350–353, 488, 500
 Теория Янг–Миллса, см. неабелевы калибровочные теории
 Техницвет 260, 351–353
 Тождества Тейлора–Славнова 88, 92, 437
 Тождество Якоби 9, 48, 55, 56
 Токи
 — аксиально-векторный 202–207, 217
 — в калибровочных теориях 20–21
 — в сверхпроводниках 348, 362
 — соответствующие аномальным симметриям 392–394, 405–406, 408
 — соответствующие нарушенным симметриям 185–186
 — используемые при определении эффективного действия 74–76
 — векторные (изоспиновые) 202
 Токи второго класса 203
 Топология 451–460
 — см. также гомотопия, когомология
 Трансляционная инвариантность антидухов 99
 Тривиальность 151
 Тривиальные пары 54
 Туннелирование 180, 490, 500, 505
 Тэта угол 490–496
 Угол электрослабого смешивания θ 331–332, 334–335, 356

- Унитарная калибровка 349, 379–380, 510
- Унитарные группы и алгебры 19, 65, 69, 412, 464
- Уравнение Зинн-Жустена 52, 91–93, 105, 434–436
- Уравнения спуска 431–433
- Уравнения спуска Стора–Зумино, *см.* уравнения спуска
- Условие устойчивости масс 259–260, 424–425
- Условия самосогласованности Весса–Зумино 425–437, 439, 441
- Условия самосогласованности, *см.* Весса–Зумино условия самосогласованности
- Фазовые переходы** 164
- Ферромагнетизм 162
- Фиксированная точка 147, 160–164
- Формула КСФР 293
- Фундаментальная группа 461
- Функционал с фиксированной калибровкой 27, 53, 58, 324
- Функция Гелл–Манна–Лоу, *см.* бета-функция
- Функция щели 375–376
- Δ_+ -функция, определение 186
- Хиггсовский бозон** 340
- Цвет (кварков), определение** 168
- Частичное сохранение аксиального тока (ЧСАТ)** 208
- Черна–Понтрягина плотность 392, 484
- Черна–Саймонса форма 393, 431
- Число намотываний 466–467, 482, 486–487, 490, 492
- Чисто калибровочные поля 13, 360, 442, 457, 458, 482, 490
- Члены Весса–Зумино–Виттена 255–259, 443–445
- J/ψ -частица 338
- $W^\pm$ -частицы 331–335, 340
- Z^0 -частицы 141, 173, 331–335, 340
- σ -член 227
- Швингеровские члены** 432–433
- Электрический дипольный момент нейтрона** 493
- Электродинамика 7, 42–43, 121, 131–132, 139–141, 165, 173, 174
- Электрон 329–335, 414
- e^-e^+ -аннигиляция 141, 169, 294, 295, 310, 340
- *см. также* глубоко неупругое рассеяние, электродинамика
- Электрослабая модель Джорджи–Глешоу 329, 467, 474, 477
- Эффект Мейснера 360
- Эффективная теория поля 160
- нарушенная глобальная симметрия 229–245, 455
- пионы и нуклоны 209–229
- сверхпроводимость 368–379
- *см. также* Весса–Зумино–Виттена члены
- Эффективное действие, *см.* квантовое эффективное действие
- Эффективное квантовое действие 74–79, 86–89, 179, 183, 373–374, 379
- Эффективный потенциал 80–86, 141–144, 184, 374–377
- Юкавовские взаимодействия** 332–334

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ *

- Абачи (Abachi S.) 382
Аббот (Abbot L.) 123, 480
Абе (Abe K.) 177
Абе (Abe F.) 382, 383
Абрикосов (Abrikosov A.A.) 384
Адемолло (Ademollo M.) 316
Адлер (Adler S.) 176, 269, 271, 388, 409, 447
Айхтен (Eichten E.) 177, 384
Актор (Actor A.) 513
Альбрехт (Albrecht A.) 512
Альтарелли (Altarelli G.) 176, 177, 303, 317
Амальди (Amaldi U.) 384
Андерсон (Anderson P.M.) 358, 384
Анно (Henneaux M.) 72, 123, 435, 449
Ансельми (Anselmi D.) 123
Арафуне (Arafune J.) 470, 512
Арнисон (Arnison G.) 383
Атья (Atiyah M.F.) 447, 448, 512
- Баллиан (Balian R.) 123
Балуни (Baluni V.) 512
Бамерт (Bamert P.) 383
Банкс (Banks T.) 447, 449
Барбиери (Barbieri R.) 449
Бардин (Bardeen W.A.) 177, 358, 368, 384, 407, 409, 447, 448
Барних (Barnich G.) 72, 123, 449
Баталин (Batalin I.A.) 72, 73, 434
Баур (Baur R.) 269
Беане (Beane S.R.) 270
Белавин (Belavin A.A.) 483, 486, 511
- Белл (Bell J.S.) 388, 447
Бенвенути (Benvenuti A.) 383
Бендер (Bender C.M.) 90
Бенфатто (Benfatto G.) 384
Бернард (Bernard C.) 316
Бернштейн (Bernstein J.) 269
Беччи (Becchi C.) 36, 71, 123
Бижненс (Bijmens J.) 269, 271
Бисмут (Bismut J.M.) 448
Блейлер (Bleuler K.) 71
Блудман (Bludman S.) 382
Блум (Bloom E.D.) 177, 316
Боголюбов (Bogoliubov N.N.) 176
Богомольный (Bogomol'nyi E.B.) 364, 455, 472, 473, 512
Больё (Baulieu L.) 72
Бонора (Bonora L.) 72
Борель (Borel A.) 272
Ботт (Bott R.) 272, 482, 512
Брайденбах (Breidenbach M.) 177, 316
Брандт (Brandt F.) 72, 123, 449
Бранчина (Branchina V.) 90
Браун (Brown D.E.) 384
Брезин (Brézin E.) 176, 177
Броут (Brout R.) 381
Бушиа (Bouchiat C.) 448
Бьёркен (Bjorken J.D.) 295, 316
Бэйкер (Baker M.) 176
Бюргесс (Burgess C.P.) 383
- Вагонер (Wagoner R.V.) 513
Вайзе (Weise W.) 269
Вайнберг (Weinberg E.) 80, 90, 141, 512

* Наклонным шрифтом указаны номера страниц ссылок на публикации в разделах “Литература”.

- Вайнберг (Weinberg S.) 71, 90, 123, 176, 177, 183, 208, 268, 269, 270, 271, 272, 316, 381, 382, 383, 384, 448, 449, 493, 512
- Вайнгартен (Weingarten D.) 259, 272
- Вайнштейн (Vainshtein A.I.) 512
- Вайс (Wise M.B.) 270, 513
- Вайсбергер (Weisberger W.I.) 269
- Вайтман (Wightman A.S.) 71, 123
- ван Колк (van Kolck U.) 270
- ван Нивенуйзен (van Nieuwenhuizen R.) 73, 383, 448, 449
- Ван Проен (Van Proeyen A.) 449
- ван Холтен (van Holten J.W.) 73
- Ванстоун (Vanstone R.) 272
- Вафа (Vafa C.) 260, 262, 272, 424
- Вело (Velo G.) 71, 123
- Вельтман (Veltman M.) 123, 383, 387, 447
- Венециано (Veneziano G.) 316, 512
- Венцель (Wentzel G.) 382
- Весс (Wess J.) 255, 271, 272, 425, 426, 437, 449
- Виалле (Viallet C.M.) 449
- Вигнер (Wigner E.P.) 73
- Вик (Wick G.C.) 511
- Виленкин (Vilenkin A.) 512
- Вильковский (Vilkovisky G.A.) 72, 73, 434
- Вильсон (Wilson K.G.) 162, 176, 177, 273, 316
- Вильчек (Wilczek F.) 168, 177, 304, 317, 384, 493, 512, 513
- Виттен (Witten E.) 255, 257, 260, 262, 272, 412, 425, 445, 448, 449, 512
- Волошин (Voloshin M.B.) 512
- Воронов (Voronov B.L.) 73, 123
- Ву (Wu Y.-S.) 447
- Высоцкий (Vysotsky M.I.) 383
- Гайлард (Gaillard M.K.) 177
- Гайтлер (Heitler W.) 71
- Галлавотти (Gallavotti G.) 384
- Гальперин (Halperin S.) 272
- Гамов (Gamow G.) 382
- Гассер (Gasser J.) 252, 253, 271
- Гатто (Gatto R.) 177
- Гелл-Манн (Gell-Mann M.) 71, 124, 140, 173, 176, 177, 245, 246, 251, 269, 270, 271, 376, 383, 443
- Герб (Herb S.W.) 382
- Гиббонс (Gibbons G.W.) 449
- Гилкей (Gilkey P.B.) 448
- Гилман (Gilman F.J.) 383
- Гилмор (Gilmore R.) 73
- Гинзбург (Ginzburg V.L.) 384
- Гиншпарт (Ginsparg P.) 447, 448
- Глазер (Glaser V.) 513
- Глимм (Glimm J.) 176
- Глэшоу (Glashow S.L.) 71, 271, 272, 382, 384, 448, 512
- Гобель (Goebel C.J.) 470, 512
- Голдбергер (Goldberger M.L.) 269
- Голдман (Goldman T.) 270
- Голдстоун (Goldstone J.) 90, 183, 208, 269, 381
- Голлик (Hollik W.) 383
- Голович (Golowich E.) 270, 271, 316
- Гольштейн (Holstein B.R.) 269, 270, 271
- Гомис (Gomis J.) 73, 123
- Горьков (Gor'kov L.P.) 363
- Грибов (Gribov V.) 71
- Грин (Green M.) 383
- Грин (Green M.S.) 176
- Гринберг (Greenberg O.W.) 177
- Грисару (Grisaru M.) 316, 447, 448
- Гройб (Greub W.) 272
- Гросс (Gross D.J.) 70, 168, 176, 177, 297, 304, 317, 448, 512
- Гупта (Gupta S.N.) 71
- Гуральник (Guralnik G.S.) 269, 271, 381
- Гут (Guth A.) 512
- Дайн (Dine M.) 512, 513
- Дайсон (Dyson F.J.) 306, 317
- Дас (Das T.) 269
- Дафф (Duff M.J.) 448
- Дашен (Dashen R.F.) 269, 271, 512
- де Боер (de Boer W.) 384
- де Вит (de Wit B.) 72
- Де Витт (De Witt B.S.) 8, 36, 71, 90, 123, 448, 449
- Де Витт (De Witt C.) 90

- Дезер (Deser S.) 316, 447
Дельборро (Delbouro R.) 448
Деррик (Derrick G.H.) 512
Джакив (Jackiw R.) 71, 176, 272, 384, 388, 447, 448, 449, 512
Джозефсон (Josephson B.D.) 361, 384
Джонсон (Johnson K.) 176, 384
Джонстон (Johnston D.) 90
Джорджи (Georgi H.) 304, 317, 382, 384, 448, 449, 512
Джулия (Julia B.) 512
Дзялошинский (Dzyaloshinskii I.Ye.) 384
Ди Вечchia (Di Vecchia P.) 512
Диксон (Dixon J.A.) 449
Дикус (Dicus D.A.) 513
Димопулос (Dimopoulos S.) 384, 449
Дирак (Dirac P.A.M.) 22, 512
Домб (Domb C.) 176
Донохью (Donoghue J.F.) 269, 270, 271, 316
Драгон (Dragon N.) 449
Дункан (Duncan A.) 316, 317
Д'Хокер (D'Hoker E.) 272
Дюбуа-Виолетте (Dubois-Violette M.) 449
- Егучи (Eguchi T)** 448
- Житницкий (Zhitnitsky A.)** 512
- Заппала (Zappala D.) 90
Захаров (Zakharov V.I.) 512
Зельдович (Zel'dovich Ya.B.) 511, 512
Зи (Zee A.) 168, 177, 384, 447, 449, 512
Зигель (Siegel W.) 72
Зингер (Singer I.M.) 72, 447, 448
Зингер (Alvarez-Gaume L.) 72, 447, 448
Зинн-Жюстен (Zinn-Justin J.) 52, 73, 91, 122, 176, 177, 317, 381
Зичичи (Zichichi A.) 317
Зоммерфельд (Sommerfield C.M.) 473, 512
- Зумино (Zumino B.) 72, 255, 271, 272, 425, 426, 437, 447, 448, 449
- Иверсон (Iverson G.)** 448
Израэль (Israel W.) 176
Илиопулис (Iliopoulos J.) 90, 382, 448
Ициксон (Itzykson C.) 90
Ишам (Isham C.) 123
Иянага (Iyanaga S.) 272
Йона-Ласинио (Jona-Lasinio G.) 90, 208, 269
Йост (Jost R.) 176
- Кабиббо (Cabibbo N.)** 382
Кавада (Kawada Y.) 272
Каварабаяши (Kawarabayashi K.) 316
Каллан (Callan C.G.) 176, 271, 297, 317, 511, 512
Каллош (Kallosh R.E.) 73
Каплан (Kaplan D.B.) 270, 512
Карлсон (Carlson C.) 384, 448
Картан (Cartan E.) 19, 34, 73
Касторина (Castorina P.) 90
Кахилл (Cahill K.) 90
Квинн (Quinn H.R.) 384, 512
Келлей (Kelley S.) 384
Кеммер (Kemmer N.) 382
Кендалл (Kendall H.W.) 177, 295
Киббл (Kibble T.W.B.) 381, 512
Киллинг (Killing W.) 19
Ким (Kim J.E.) 512, 513
Кимура (Kimura T.) 72
Кирк (Kirk W.T.) 177
Клейн (Klein O.) 70
Клемкнехт (Klemknecht K.) 383
Клинкхаммер (Klinkhammer F.R.) 512
Книл (Kniehl B.) 383
Кобаяши (Kobayashi M.) 382
Кобзарев (Kobzarev I.Yu.) 511, 512
Когут (Kogut L.) 177
Колб (Kolb E.W.) 513
Коллинз (Collins J.C.) 176
Колман (Coleman S.) 80, 90, 141, 176, 269, 271, 272, 449, 511, 512, 513

- Корнваль (Cornwall J.M.) 384
 Кословски (Koslowsky V.T.) 382
 Котта-Рамузино (Cotta-Ramusino P.) 72
 Котчан (Kotchan D.) 269
 Коэн (Cohen T.) 270
 Крейтцер (Kreuzer M.) 449
 Крист (Christ N.) 71, 317
 Кристенсен (Christensen S.M.) 448
 Кричлей (Critchley R.) 448
 Крюдер (Crewther R.J.) 512
 Куго (Kugo T.) 71, 123
 Кузьмин (Kuzmin V.A.) 512
 Купер (Cooper L.N.) 358, 368, 384
 Купер (Cooper F.) 90
 Курси (Curci G.) 71, 72
 Курсуноглу (Kursunoglu B.) 71
- Лавров** (Lavrov P.M.) 72, 123
Лангакер (Langacker P.) 271, 383, 384
Ландау (Landau L.D.) 150, 176
Ле Гийю (Le Guillou J.C.) 176, 177, 317
Леви (Lévy M.) 269, 270, 449
Лейтвилер (Leutwyler H.) 177, 252, 253, 271
Лейтес-Лопес (Leites-Lopes J.) 382
Леман (Lehmann H.) 72
Ли (Lee B.W.) 123, 324, 381
Ли (Lee C.Y.) 270
Ли (Lee T.D.) 71, 382, 383, 511, 512
Липатов (Lipatov L.N.) 307, 317
Лиси (Lisi E.) 382, 383
ЛоСекко (LoSecco J.) 316
Лотруп (Lautrup B.) 71, 317
Лоу (Low F.E.) 124, 140, 173, 176, 269
Лурье (Lurie D.) 269
Луттингер (Luttinger J.M.) 176
Лэйн (Lane K.) 177, 384
Любенский (Lubensky T.C.) 176
- Майани** (Maiani L.) 271, 382, 449
МакАртур (McArthur I.) 512
Максимюк (Maksymuk I.) 383
Мальтман (Maltman K.) 269
Манес (Mañes J.) 72, 448, 449
- Манохар** (Manohar A.V.) 512
Мантон (Manton N.S.) 512
Мартин (Martin A.) 90, 513
Маскава (Maskawa K.) 382
Матур (Mathur V.S.) 269
Мейер (Meyer Ph.) 448
Мейснер (Meissner U.G.) 271
Мехта (Mehta M.L.) 448
Миллер (Miller G.) 270
Миллс (Mills R.L.) 7, 19, 70
Мин (Min D.-P.) 270
Миттер (Mitter P.K.) 72, 449
Миямото (Miyamoto Y.) 447
Мияцава (Miyazawa H.) 269
Мостов (Mostow G.D.) 271
Мошхин (Moshhin P.Yu.) 72
Муциних (Muzinich I.) 71
Мюллер (Mueller A.H.) 317
Мюссель (Mussel P.) 383
- Наканиши** (Nakanishi N.) 71
Намбу (Nambu Y.) 177, 183, 208, 269
Нанопулос (Nanopoulos D.V.) 384
Невье (Neveu A.) 512
Нееман (Ne'eman Y.) 245, 246, 251, 271, 443
Никель (Nickel B.G.) 177
Нильсен (Nielsen N.K.) 448
Нильсен (Nielsen H.) 511
Новиков (Novikov V.A.) 383
Нортон (Norton R.E.) 383
- Обер** (Aubert J.J.) 382
Оджима (Ojima I.) 71, 72
Оеме (Oehme R.) 269
Окубо (Okubo S.) 251, 271, 272
Окунь (Okun' L.) 383, 511, 512
Олесон (Oleson P.) 511
О'Райферти (O'Raifeartaigh L.) 90
Ордьонез (Ordóñez C.) 270
Оукс (Oakes R.J.) 271
- Павер** (Paver N.) 271
Пагельс (Pagels H.) 271
Пад (Pad J.) 384
Палэ (Palais R.S.) 271
Панг (Pang Y.) 511

- Панчери (Pancheri G.) 271
Паризи (Parisi G.) 303, 317
Парис (Paris J.) 73
Парк (Park T.-S.) 270
Парравичини (Parravicini G.) 90
Пендлтон (Pendleton H.) 316, 447
Пенроуз (Penrose R.) 123
Перес-Меркадер (Perez-Mercader J.) 90
Перл (Perl M.L.) 382
Перлмуттер (Perlmutter A.) 71
Пернис (Pernice S.) 317
Перри (Perry M.J.) 448
Пескин (Peskin M.) 177
Петерман (Peterman A.) 176
Петронцио (Petronzio R.) 449
Печчеи (Peccei R.D.) 512
Пич (Pich A.) 271
Политцер (Politzer H.D.) 168, 177, 304, 317
Полонский (Polonsky N.) 384
Полчинский (Polchinski J.) 71
Поляков (Polyakov A.M.) 467, 483, 511
Попов (Popov V.N.) 8, 36, 71
Поуп (Pope C.) 448
Прасад (Prasad M.K.) 473, 512
Прескилл (Preskill J.) 272, 449, 512, 513
- Раби (Rabi I.I.) 271
Раби (Raby S.) 384, 449
Рамон (Ramond P.) 383
Раффелт (Raffelt G.G.) 513
Ребби (Rebbi C.) 71, 512
Ренк (Renk B.) 383
Реннер (Renner B.) 271
Решетняк (Reshetnyak A.A.) 72
Риазуддин (317) 316
Ро (Rho M.) 270
Рой (Roy P.) 449
Ромер (Romer R.) 448
Росенберг (Rosenberg L.) 447
Рубаков (Rubakov V.A.) 512
Руэ (Rouet A.) 36, 71, 123
Рэй (Ray L.) 270
- Савар (Savard G.) 382
- Сазерленд (Sutherland D.G.) 387, 447
Саката (Sakata S.) 447
Салам (Salam A.) 90, 183, 208, 269, 381, 382
Самьюэл (Samuel S.) 73
Санда (Sanda A.) 324, 381
Сасскинд (Susskind L.) 384, 449
Свартхольм (Svartholm N.) 381
Сигг (Sigg D.) 270
Сикиви (Sikivie P.) 513
Сили (Seely R.) 272
Симанзик (Symanzik K.) 90, 176
Сирлин (Sirlin A.) 383
Скирме (Skyrme T.H.R.) 511
Скотт (Scott L.) 71
Славнов (Slavnov A.A.) 90
Слански (Slansky R.) 383
Сокал (Sokal A.D.) 176
Средницки (Srednicki M.) 512
Сривастава (Srivastava P.K.) 448
Стора (Stora R.) 36, 71, 72, 123, 448, 449
Стратонович (Stratonovich R.L.) 384
Сузуки (Suzuki M.) 316
Сэвидж (Savage M.) 270
Сэнд (Sand U.) 384
Сэнфорд (Sanford J.) 271
- Тайтельбойм (Teitelboim C.) 73
Талон (Talon M.) 449
Таникава (Tanikawa Y.) 447
Таунер (Towner I.S.) 269, 382
Таунсенд (Townsend P.K.) 449
Теллер (Teller E.) 382
Теплиц (Teplitz V.I.) 513
Тернер (Turner M.S.) 513
Тинкхам (Tinkham M.) 366
Тирринг (Thirring W.) 269
Титчмарш (Titchmarsh E.C.) 269
Томозава (Tomozawa Y.) 270
Трубовиц (Trubowitz E.) 279
Труст (Troost W.) 449
Трэйман (Treiman S.) 269, 317
Тьерри-Миг (Thierry-Mieg J.) 72
Тэйлор (Taylor J.C.) 90, 295
Тюпкин (Tyupkin Yu.S.) 483, 511

Тютин (Tyutin I.V.) 36, 71, 73, 123

Уайлер (Wyler D.) 269

Уорд (Ward J.) 382

Уорд (Ward R.) 512

Урек (Urech R.) 269

Утияма (Utiyama R.) 71

Фаддеев (Faddeev L.D.) 8, 36, 71, 449

Фанчотти (Fanchotti S.) 383

Фаррар (Farrar G.) 449

Фархи (Farhi E.) 272, 384, 449

Фаулер (Fowler E.C.) 512

Фаязуддин (317) 316

Фейнман (Feynman R.P.) 8, 71, 296, 316

Фельдман (Feldman J.) 384

Фернандез (Fernandez R.) 176

Феррара (Ferrara S.) 73

Феррари (Ferrari R.) 71, 72

Финкельштейн (Finkelstein R.J.) 447

Фишер (Fisher M.E.) 162, 176

Фишлер (Fischler W.) 512, 513

Фогли (Fogli G.L.) 382, 383

Фрадкин (Fradkin E.S.) 72

Фрадкина (Fradkina T.E.) 72

Фрайер (Friar J.) 270

Фрид (Freed D.S.) 448

Фридман (Freedman D.Z.) 73, 383

Фридман (Friedman J.L.) 177, 295

Фриц (Fritzsch H.) 177

Фришман (Frishman Y.) 447, 449

Фройнд (Freund P.G.O.) 448, 470, 512

Фролих (Frohlich J.) 176

Фубини (Fubini S.) 269

Фуджикава (Fujikawa K.) 324

Фуджимото (Fujimoto Y.) 90

Фукуда (Fukuda H.) 447

Фурстман (Furstmann H.) 384

Хаббард (Hubbard J.) 384

Хагберг (Hagberg E.) 382

Хаген (Hagen C.R.) 381

Хаймейкер (Haymaker R.W.) 90

Хан (Han M.Y.) 177

Хансон (Hanson A.J.) 448

Хансон (Hanson G.) 177

Харада (Harada M.) 123

Харвей (Harvey J.) 384

Харди (Hardy G.N.) 317

Харди (Hardy J.C.) 382

Хасерт (Hasert F.J.) 382, 383

Хасслахер (Hasslachher B.) 317, 512

Хиггс (Higgs P.W.) 381

Хиндмарш (Hindmarsh M.) 90

Хинчлиф (Hinchliffe I.) 177

Хлопов (Khlopov M.Yu.) 512

Хо (Ho P.-M.) 449

Хокинг (Hawking S.W.) 176, 448, 449

Холл (Hall L.J.) 384

'т Хоофт ('t Hooft G.) 72, 123, 168, 177, 272, 317, 324, 381, 419, 423, 424, 437, 448

Цвейг (Zweig G.) 177

Циммерман (Zimmerman W.) 273, 316

Чайкин (Chaikin P.M.) 176

Чанда (Chanda R.) 449

Чой (Choi K.) 512

Чоу (Chou K.-C.) 269

Чу (Chu C.-S.) 446, 449

Шанкар (Shankar R.) 384

Шапошников (Shaposhnikov M.E.) 512

Шварц (Schwarz A.S.) 72, 483, 511

Швиммер (Schwimmer A.) 447, 449

Швингер (Schwinger J.) 382, 447, 449

Швиттерс (Schwitters R.F.) 177

Шеллард (Shellard E.P.S.) 512

Шиамма (Sciama D.) 123

Ширков (Shirkov D.V.) 176

Шифман (Shifman M.A.) 177, 512

Шриффер (Schrieffer J.R.) 358, 368, 384

Шронер (Shrauner E.) 269

Штейнбергер (Steinberger J.) 447

Штейнхардт (Steinhardt P.) 512

Штерман (Stermann G.) 177
Штюдельберг (Stueckelberg E.C.G.)
176
Шур (Schur I.) 448

Эйнштейн (Einstein A.) 178
Эккер (Ecker G.) 271
Эллис (Ellis J.) 177, 382, 383, 384
Энглерт (Englert F.) 381
Эрикссон (Ericson T.) 269

Юнг (Young J.E.) 269

Ямаваки (Yamawaki K.) 123
Янагида (Yanagida T.) 383
Янг (Yang C.N.) 7, 19, 70, 382
Янкелович (Yankielowicz S.) 447,
449
Яффе (Jaffe A.) 72, 176

Научное издание

ВАЙНБЕРГ Стивен

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Том 2

СОВРЕМЕННЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*

Оригинал-макет: *Д.В. Горбачев*

Оформление переплета: *А.А. Логунов*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 09.12.03.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 33. Уч.-изд. л. 36,5. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, <http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс: (8172) 72-60-72
E-mail: form.pfp@votel.ru <http://www.vologda/~pfpv>